内 容 提 要

本书是继初等微积分之后包括大学数学分析内容在内的一本教程，其特点是渗透了现代数学分析的观点和方法．本书阐述了实数和一元微积分的理论，并在此基础上抽象出距离空间及其映象的现代分析的基本概念；以距离空间的观点阐述了多元微积分理论，使数学分析的经典内容与现代分析相衔接；论述了常微分方程解的存在唯一性定理、级数理论、黎曼—斯蒂阶斯积分理论、凸函数的基本性质；给出了现代分析中阿采拉定理、斯桃茵—外尔斯特拉斯定理及R_N中一般的斯托克斯定理．

本书叙述简明并配有较多理论性习题，可作为理工科大学数学分析的教学参考书，也可作为中学教师及需要现代数学分析基础知识的读者进修用书．

前　言

本书主要依据美国加利福尼亚大学教授M•H•protter，C•B•Morrey合著《A First course in Real Analysis》，并结合我国数学分析教学实际编译而成的。这是继初等微积分之后的大学数学分析教程，其特点是以现代分析的观点与方法阐述$\mathbf{R}_N$中微积分理论，使分析的基础与现代分析相衔接。

本书共十五章。第一章以公理法讲述实数理论，为分析的代数运算、极限、连续性概念提供逻辑基础。第二章至第五章，作为初等微积分的总结和分析的基础，包括了$\mathbf{R}_1$中连续、极限和微积分理论。导数是以算子的观点定义的，积分中介绍了约当测度，并将测度与积分联系了起来。

现代分析发展的关键是抽象出距离空间的概念。第六章引入了距离空间，以$\mathbf{R}_N$、$C[a, b]$等为典型讲述了点集拓扑的基础知识。基于紧性集将连续函数的性质一般化，还将逐次逼近法上升为完备空间中的压缩映象不动点定理，据以证明隐函数、常微分方程解的存在唯一性。第七、八章以距离空间的观点为指导，简捷地将R_1的微积分理论发展为$\mathbf{R}_N$的微积分理论。介绍级数理论的第九、十两章中，一致收敛性概念也被推广到距离空间，同时以抽象测度的思想提出无序和的概念，统一处理多重级数的收敛性。第十一、十二章推广黎曼积分。广义积分理论的重点是积分号下求导数。把黎曼

积分推广为黎曼—斯蒂阶斯积分，不仅对学习概率论是必要的，而且为把约当测度、黎曼积分发展为勒贝格测度与积分，进而为抽象测度理论打好基础。第十三章介绍距离空间的函数理论，讲述了现代分析中很有用的阿采拉定理，泰兹延拓定理及斯桃茵—外尔斯特拉斯定理。

鉴于凸分析对现代应用数学(如最优化理论)的重要作用，专设第十四章介绍凸集、凸函数的最初等的基本结果。

最后一章研究特殊的距离空间之间的映象—$\mathbf{R}_N$的场理论。先以拓扑学的观点论述了曲线、曲面的表示。尔后把通常场论三公式作为微积分基本定理在二维、三维的推广，在引入了外微分运算及外微分形式之后，最终将它们概括为$\mathbf{R}_N$中一般的斯托克斯定理。该定理在微分几何及现代物理中是非常重要的。

本书各章节后面配有总计上千道习题，这是本书的有机部分。

编译者认为以现代分析观点处理$\mathbf{R}_N$中微积分的这样简明的教程，符合改革数学分析使之现代化的要求。张学铭教授对此给予热情地指教与鼓励，在此致以真诚的谢意。

希望这本书能为数学分析或高等数学的理工科师生提供参考，对学过初等微积分又需要现代分析的中学数学教师和工程技术人员能有所帮助，这是编译者的良好意愿。但由于自己水平有限，书中存有不妥之处，恳请读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　实　数　系

§1·1　域的公理系

本节提出的域公理系，是微积分中代数运算的逻辑基础。任意对象所组成的集合，当它满足下列A_1—A_5、M_1—M_5及D共十一条公理时，称这个集合为域；域中的元素称为“数”。

加法与减法公理（A_1—A_5）

A_1　封闭性。若a，b是数，有且仅有一个数称为a与b的和，记为$a+b$。

A_2　交换律。对于任意两个数a，b，都有

$$a+b=b+a.$$

A_3　结合律。对任意数a，b和c，有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

A_4　零的存在性。有且仅有一数0，称为零，对任意数a，满足

$$a+0=a.$$

A_4中可以不要求仅有一个数0，其唯一性容易证明。事实上，设0和$0'$都是这样的数，那么便有$0+0'=0$及$0'+0=0'$.根据A_2有$0+0'=0'+0$，即$0=0'$.这说明当零存在便是唯一的。

A_5　负数存在性。a是任意数，有且仅有一数x，满足

$$a+x=0.$$

这个数x称为a的负数（或称a的相反数），表示为$-a$。

如同A_4，类似地可证，A_5中唯一性要求是不必要的。

定理1·1 若a，b是数，那么有且仅有一个数x满足$a+x=b$；数$x=b+(-a)$。

证明 应当证明：（i）$x=b+(-a)$满足$a+x=b$；（ii）没有其他数能满足这一等式。

为证（i），使用A_2，A_3，A_4，有

$$a+x=a+[b+(-a)]=a+[(-a)+b]$$
$$=[a+(-a)]+b=0+b=b.$$

于是（i）成立。

在 $a+x=b$ 两端加（$-a$），得

$$(a+x)+(-a)=b+(-a).$$

而左端

$$(a+x)+(-a)=a+[x+(-a)]$$
$$=a+[(-a)+x]=[a+(-a)]+x$$
$$=0+x=x.$$

可见$x=b+(-a)$，这便证明了解的唯一性。

数$b+(-a)$也记成$b-a$。

有了上述两个数的加法定义，可用结合律来定义三个、四个以及任何有限个数的加法。由A_3，$(a+b)+c$与$a+(b+c)$相等，定义$a+b+c$为这一共同值。

引理1·1 若a，b和c是任意的三个数，那么

$$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a$$
$$=c+a+b=c+b+a.$$

请读者据A_2、A_3详细地写出引理1·1的证明。

引理1·2 若a，b，c和d是任意数，那么

$$(a+c)+(b+d)=(a+b)+(c+d).$$

证明 由引理1·1及A_3，有

$$(a+c)+(b+d)=[(a+c)+b]+d$$

$$=(a+c+b)+d=(a+b+c)+d$$

$$=[(a+b)+c]+d=(a+b)+(c+d).$$

定理1·2

（i）若a是一数，那么$-(-a)=a$。

（ii）若a，b是数，那么

$$-(a+b)=(-a)+(-b).$$

证明 （i）由$-a$的定义，有

$$(-a)+[-(-a)]=0 \quad 及$$

$$(-a)+a=a+(-a)=0.$$

A_5指出（$-a$）是唯一的，因此 $a=-(-a)$。

（ii）据负数定义，应有

$$(a+b)+[-(a+b)]=0.$$

再用引理1·2，有

$$(a+b)+[(-a)+(-b)]$$

$$=[a+(-a)]+[b+(-b)]$$

$$=0+0=0.$$

由A_5一个数仅有一个相反数，得出（ii）成立。

定理1·2可以叙述为：（i）（$-a$）的相反数是a；（ii）和的相反数等于相反数的和。

乘法与除法公理（M_1—M_5）

M_1　封闭性。若a，b是数，有且仅有一个数称为 a与b的积，表示为ab（或$a \times b$或$a \cdot b$）。

M_2　交换律。对任意的两个数a与b，有

$$ba = ab.$$

M_3　结合律。对任意的a、b、c，有

$$(ab)c = a(bc).$$

M_4　单位的存在性。有且仅有一个不等于零的数u，对任意数a都有　$au = a$成立，这个数u称为单位，照习惯表示为1。

M_5　倒数的存在性。对每个不为零的数a，有且仅有一数x满足　$ax = 1$。这个数x称为a的倒数（或a的逆），表示为a^{-1}（或$1/a$）。

注　公理M_1—M_5与公理A_1—A_5是相"平行"的，相当于以乘法代替加法，但M_5与A_5并不恰好相当，M_5还要求$a \neq 0$．其原因由下面定理1·3指出：任意数与0的积等于0，就是零不能做除数．

特殊的公理D

D　分配律。对于任意的数a、b、c，有

$$a(b + c) = ab + ac,$$

注　在每一逻辑系统之中，必然有不定义的概念——原始概念．例如欧几里德平面几何里的点、直线就是不定义的原始概念．当然，对这两个概念可以直观地给以描述，但在几何学的理论结构中它是不能下定义的，它们的性质是由公理系来给出的．在域的公理系当中，"数"是不定义的原始概念．我们可以用实数来解释，也可以用有理数或者复数来解释．事实上有理数系、实数系、复数系还有若干数系(可以是有限个数组成)都满足域公理，实数系只是满足域公理系的诸数系当中的一个．满足公理系统的集合称为这一公理系统的一个解释，实数系是域公理系统的一个解释．

如果要求仅以实数系为其解释的公理系，还需在域公理之外再增加新的公理，这将在§1·3及§2·1中完成．

定理1·3 若a是任意数，那么 $a0=0$。

证明 设b是任一数。那么$b+0=b$，所以 $a(b+0)=ab$，由分配律D，有

$$(ab)+(a0)=(ab)$$

由A_4，有 $a0=0$。

定理1·4 若a、b是数，且$a\neq 0$时，那么有且仅有一个数x，满足$ax=b$，数$x=ba^{-1}$。

欲证定理1·4，只要把定理1·1证明中的“加”换为“乘”，0换为1，$-a$换为a^{-1}即得。

注 “当且仅当”是数学中常用的术语.设A与B是两个命题.“当B真，A真”意味着B真蕴含A真；“A真仅当B真”意味着A真蕴含B真；“A真当且仅当B真”这意味着双重含意：A真蕴含B真和B真蕴含A真.今后用符号$\Longleftrightarrow$表示“当且仅当”并记为

$$A\Longleftrightarrow B.$$

“当且仅当”也常说成“充分与必要”或“等价于”.

定理1·5

(i) $ab=0$当且仅当a，b至少有一为零。

(ii) $a\neq 0$及$b\neq 0$当且仅当$ab\neq 0$。

证明 (i)，(ii)都要证明当且仅当两个方面。

对于(i)，注意若a，b至少有一为零，那么由定理1·3应有$ab=0$。另一方面，若$ab=0$，那么有$a=0$或$a\neq 0$两种情况。当$a=0$时，结果成立；当$a\neq 0$时，那么

$$b=1b=(a^{-1}a)b=a^{-1}(ab)=a^{-1}0=0.$$

这时有$b=0$，结果成立。综合两方面，(i)得证。

对于(ii)，首先假定$a\neq 0$，$b\neq 0$，应用(i)可知$ab\neq 0$。否则a，b至少有一为零与假定矛盾。另一方面，设$ab\neq 0$，那么$a\neq 0$与$b\neq 0$成立。否则由定理1·3将有$ab=0$，

这与$ab\neq 0$矛盾。

把$(ab)c$与$a(bc)$这共同值作为abc的定义。读者容易证得与引理1·1及引理1·2相似的下列引理。

引理1·3 若a，b，c是数，那么

$$abc=acb=bac=bca=cab=cba.$$

引理1·4 若a，b，c，d是数，那么

$$(ac)(bd)=(ab)(cd).$$

定理1·6

(i) 若$a\neq 0$，那么$a^{-1}\neq 0$且$(a^{-1})^{-1}=a$。

(ii) 若$a\neq 0$，$b\neq 0$，那么$(ab)^{-1}=(a^{-1})(b^{-1})$。

这一定理的证明与定理1·2的证明一样，只要以乘法代加法，以1代0，a^{-1}，b^{-1}分别代$(-a)$，$(-b)$即可。注意若$a\neq 0$，$aa^{-1}=1\neq 0$，由定理1·5的(ii)便得$a^{-1}\neq 0$。

定理1·7 若a,b是数(可以是正的、负的或是零)，那么

(i) $a(-b)=-(ab)$.

(ii) $(-a)b=-(ab)$.

(iii) $(-a)(-b)=ab$.

证明 (i) 因为$b+(-b)=0$，由分配律有

$$a[b+(-b)]=ab+a(-b)=0$$

另一方面$ab+[-(ab)]=0$，由公理A_5有

$$a(-b)=-(ab).$$

(ii) 可由(i)交换a、b得到。至于(iii)，由(i)，(ii)，得

$$(-a)(-b)=-[a(-b)]=-[-(ab)].$$

再由定理1·2的(i)得

$$-[-(ab)]=(ab)$$

即 $(-a)(-b)=ab$, (iii) 成立。

推论 $(-1)a=-a$。

现在根据上述公理及定理来证明代数中学过的诸分数律。

注 对于 ab^{-1} 引进以下符号：

$$ab^{-1}=\frac{a}{b}=a/b=a\div b$$

这些表示相除的符号称之为分数.分数的分子与分母按通常定义.以零为分母的分数没有意义.

定理1·8

(i) 对于每个数a有等式$a/1=a$。

(ii) 若$a\neq 0$，那么$a/a=1$。

证明 (i) 我们有

$a/1=(a\cdot 1^{-1})=(a\cdot 1^{-1})\cdot 1=a(1^{-1}\cdot 1)=a\cdot 1=a$。

(ii) 若$a\neq 0$，按定义$a/a=aa^{-1}=1$。

定理1·9 若a，b，c，d是数且$b\neq 0$，$d\neq 0$，那么 $bd\neq 0$ 且 $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ac}{bd}$。

证明 从定理1·5得出$bd\neq 0$，由关于分数的注释及引理1·4与定理1·6的 (ii)，有

$$\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{c}{d}\right)=(ab^{-1})\cdot(cd^{-1})=(ac)\cdot(b^{-1}d^{-1})$$

$$=(ac)(bd)^{-1}=\frac{ac}{bd}.$$

下列五个定理的证明都留给读者去完成。

定理1·10 若$b\neq 0$，$c\neq 0$，那么

$$\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}.$$

定理1·11 若$c\neq 0$，那么

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

定理1·12 若$b\neq 0$，那么$-b\neq 0$且

$$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\left(\frac{a}{b}\right)$$

定理1·13 若$b\neq 0, c\neq 0$，$d\neq 0$，那么$(c/d)\neq 0$，且

$$\frac{(a/b)}{(c/d)}=\frac{ad}{bc}=\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{d}{c}\right).$$

定理1·14 若$b\neq 0$，$d\neq 0$，那么

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

习　题

1. 证明公理A_5中要求满足$a+x=0$的数x的唯一性是不必要的，即$a+x=0$的解x是唯一的。
2. 证明引理1·1。
3. 根据公理A_1—A_5证明：

$$(a+c)+(b+d)=(a+d)+(b+c).$$

要求注明证明过程的每一步骤的理由。

4. 证明定理1·4，

5．证明引理1·3。

6．证明引理1·4。

7．证明定理1·6。

8．证明 $a-(b+c)=(a-b)-c$

及 $a-(b-c)=(a-b)+c$。

要求注明证明的每一步骤的理由。

9．证明 $a(b+c+d)=ab+ac+ad$，且注明每一步骤的理由。

10．规定 $a+b+c+d$ 的意义是 $(a+b+c)+d$，证明

$$a+b+c+d=(a+b)+(c+d).$$

11．按第10题的规定，证明：

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd.$$

12．证明定理1·10。

13．证明定理1·11。

14．证明定理1·12。

15．证明定理1·13。〔提示：用定理1·10〕

16．证明定理1·14。

17．若 $b\neq 0$，$d\neq 0$，$f\neq 0$，证明

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)=\frac{ace}{bdf}.$$

18．若 $d\neq 0$，证明：$\frac{a}{d}+\frac{b}{d}+\frac{c}{d}=\frac{a+b+c}{d}$。

19．若 $b\neq 0$，$d\neq 0$，$f\neq 0$，证明

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}.$$

§1·2 自然数、序列、数系的扩充

域公理系提供了加、减、乘、除四则运算法则．但这一公理系还不能区别或者说还未讨论数之间的大小．如果一个域包含了自然数，可以按传统的方法，把自然数及其相反数以及A_4公理中的零称之为整数，然后把有理数定义为整数的商（或比）．这就是说一个包含自然数的域就会包含有理数。为了建立实数系与域之间的关系，应从讨论自然数开始。

直观地，全部自然数可以从1着手，而后是$1+1$，$(1+1)+1$，$[(1+1)+1]+1\cdots\cdots$，这样来构成。我们称$1+1$为2；$(1+1)+1$称为3，如此得到所有自然数的集。当然，可以给出更合逻辑要求的抽象的自然数定义，我们将在§1·4中用归纳法原理给出。

为运用熟知的自然数的一般性质及域公理系给出三个数及多于三个数的和、积及其运算法则，先复习序列的定义。

定义　序列是以自然数集为定义域的函数。当定义域为有限个自然数的集时，则称这函数为有限序列；否则称为无限序列。一般函数的定义域里的元素是不论什么顺序的，而序列的定义域具有自然数的顺序．例如序列定义域由$1,2,\cdots,n$组成，值域中相应的数叫做序列的项，可按自然数的顺序写出来。若以a表序列，序列的项表示为a_1，$a_2\cdots$，a_n或$a_{(1)}$，$a_{(2)}$，$\cdots$，$a_{(n)}$。元素a_i或$a_{(i)}$称为序列的第i项。若序列a的定义域是所有自然数的集，把a表示为

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots\quad 或\ \{a_n\}\ .$$

有限序列的和及积用归纳法定义。下面各命题将在§1·4根据归纳法原理给出证明。

命题1·1 若a_1，$a_2 \cdots a_n$是给定的有限序列，那么存在唯一的序列b_1，b_2，$\cdots b_n$，具有性质：

$$b_1=a_1,\ b_{i+1}=b_i+a_{i+1} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots n-1,\ n>1).$$

命题1·2 若a_1，a_2，$\cdots$，a_n是给定的有限序列，那么存在唯一的有限序列c_1，c_2，$\cdots$，c_n，具有性质：

$$c_1=a_1,\ c_{i+1}=c_i \cdot a_{i+1} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots n-1,\ n>1).$$

元素b_1，b_2，$\cdots$，b_n是序列a_1，a_2，$\cdots$，a_n的顺次的和；而c_1，c_2，$\cdots$，c_n是序列a_1，a_2，$\cdots$，a_n的顺次的积。其中

$$b_3=b_2+a_3=(a_1+a_2)+a_3,$$

$$b_4=b_3+a_4=[(a_1+a_2)+a_3]+a_4;$$

$$c_3=c_2a_3=(a_1a_2)a_3,$$

$$c_4=c_3a_4=[(a_1a_2)a_3]a_4,$$

等。因为序列$b_1,b_2,\cdots,b_n$与$c_1,c_2,\cdots,c_n$是唯一确定的，所以

定义 对自然数$n\geqslant 1$，a_1，a_2，$\cdots$，a_n的和及积定义为$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_n$及$a_1a_2\cdots a_n=c_n$。用记法

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+a_2+\cdots+a_n\ ,\quad \prod_{i=1}^{n}a_i=a_1a_2\cdots a_n.$$

Σ与Π分别是和与积的简短记号。读$\sum\limits_{i=1}^{n}$为“i从1到n的和”。读“$\prod\limits_{i=1}^{n}$为i从1到n的积”。

基于这些定义与上面的诸命题，不难证明以下的结果。

命题1·3 若a_1，a_2，$\cdots$，a_n，a_{n+1}是一序列，那么

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \text{ 及 } \prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot a_{n+1}.$$

下面的命题可用数学归纳法证明。

命题1·4 若a_1，a_2，…，a_m，a_{m+1}，…，a_{m+n}是一序列，那么

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i,$$

$$\prod_{i=1}^{m+n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{m+n} a_i\right).$$

下一命题是读者在初等代数中熟悉的一般的结合律．它也可以用归纳法证明。

命题1·5 一有限序列的和，可由这序列分为更短的若干序列的和相加而得到。一有限序列的积，可由这序列分为更短的若干序列的积相乘而得到。

命题1·6是交换律公理A_2、M_2的一般化，命题1·7、命题1·8是分配律公理D的一般化。这些命题都可用归纳法证明。

命题1·6 有限序列的和及积均与其项的顺序无关。

命题1·7 若a是一数，b_1，b_2，…，b_n是一序列，那么

$$a(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)a$$
$$= ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n.$$

命题1·8 两个有限序列的和相乘之积等于一序列的每

一项与另一序列各项相乘积的和．如

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)=a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3.$$

形如$a+(-b)+(-c)+d+(-e)$的和，基于$x-y=x+(-y)$的定义及定理1·2的（ii），可以简记为$a-b-c+d-e$。同理可以得出通常的有限项的加法及减法法则．借助于乘法的符号律及推广的分配律可以得出代数和的积的法则．例如

$$\begin{aligned}&(a_1-a_2)(b_1-b_2-b_3)\\&=a_1(b_1-b_2-b_3)-a_2(b_1-b_2-b_3)\\&=a_1b_1-a_1b_2-a_1b_3-a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3.\end{aligned}$$

符号x^n（n是自然数）的定义是n个x的积．读者可从域公理及上面的定理导出关于幂的积与商的指数相加减的法则。

十进制记数法基于如下的自然数表示定理：若n是一个自然数，那么对n有且仅有表示式

$$n=d_0(10)^K+d_1(10)^{K-1}+\cdots+d_{K-1}(10)+d_K$$

K是自然数或零，d_i为0，1，2，…，9中的某一数，且$d_0\neq0$．0，1，2，…，9称为十进制数的数字．有了这样的表示，自然数的算术运算法则可从x的多项式相应的运算法则导出，这里$x=10$。

定义 一实数是整数，当且仅当它是零或是自然数或是自然数的相反数．一实数r称为有理数当且仅当存在整数p、q

$(q\neq 0)$，使$r=\frac{p}{q}$。一个实数它不是有理数就称为无理数。

根据上面关于加、减、乘、除运算法则的定理、命题，容易得出有限个整数的和及积仍是整数；有限个有理数的和、积、商仍是有理数。

最后再次强调指出：域公理系蕴含了关于加、减、乘、除运算法则的定理。而域的元素的实质并未描述。例如上述公理系不能保证域中有平方等于2的数（参看本书附录2）．事实上，只以“有理数”来解释域中的数而不论及别的数，所有域公理都被满足．有理数构成一个域，如果要求域还包括如$\sqrt{2}$这样的无理数，则还应添加新的公理。一个包含自然数的域必然包含所有有理数。其实还能构造出仅含有有限个元素的域。显然有限域不能包括所有自然数。例如由0、1、2、3、4五个元素组成的系，其加法、乘法的值分别如下表所示：

加　法

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

乘　法

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

容易验证这个系满足域公理。

习　题

1. 对于含有五项的序列证明命题1·1及命题1·2。

2. 若a_1，a_2，…，a_5是一序列，证明：$\prod_{i=1}^{5} a_i = 0$当且仅当序列至少有一项是零。

3. 证明命题1·3。

4. 用命题1·4证明命题1·5的下列特殊情况：

设给定序列$a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_p$，那么

$$\sum_{i=1}^{p} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{p} a_i.$$

5. 对于含有 4 项的序列证明命题1·6。

6. (a) 指出建立公式，$(a+b)^5 = \sum_{i=0}^{5} \frac{5!}{i!(5-i)!} a^{5-i} b^i$，要用哪些命题。

(b) 指出建立一般二项式展开公式：

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} a^{n-i} b^i$，要用哪些命题。假定公式对$n-1$时成立。

(c) 写出 $(a+b+c)^n$的展开公式。

7. 设由 0，1 两元素组成的集，其加法，乘法为：

$0+0=0$，$0+1=1$，$1+0=1$，$1+1=0$；

$0\cdot 0=0$，$1\cdot 0=0$，$0\cdot 1=0$，$1\cdot 1=1$。

证明这一集按上述加法、乘法是一个域。

8．形如$a+b\sqrt{5}$的数，a，b为有理数，证明按通常的加法、乘法，一切数$a+b\sqrt{5}$的集构成一个域。

9．研究一切形如$a+b\sqrt{6}$的数，a，b是有理数，这个集是否满足域公理系？

10．设a．b是实数，证明$a+bi$组成的复数系是个域。

§1·3　序公理与不等式

除了实数系还有若干数系满足域公理系．为了把实数系区别开来，还要增加描述实数系的域性质之外的公理．其中之一是区别正负数的不等式公理，也叫序公理。

序公理（不等式公理）数系中存在一个称为正数的集，满足（i）数系中每一数a有且仅有为正、为零或$-a$为正这三种情况之一成立．（ii）有限个正数的和及积都为正数。

把序公理加到域公理系，这时只有具有直线顺序的数系才能满足公理系，所谓直线顺序是指能使数与直线上的点保持顺序相对应。有理数系、实数系满足域公理及序公理，而复数系不满足序公理．

定义　满足域公理系及序公理的数系称为有序域．有序域中一个数a是负数当且仅当$-a$是正数．若a和b是数，称$a>b$（读为a大于b），当且仅当$a-b$是正数．称$a<b$（读为a小于b），当且仅当$a-b$是负数。

定理1·15

（i）$a>0 \Longleftrightarrow a$是正的；

（ii）$a<0 \Longleftrightarrow a$是负的；

(iii) $a>0 \Longleftrightarrow -a<0$；

(iv) $a<0 \Longleftrightarrow -a>0$；

(v) a，b是数，那么以下三种情况有且仅有一种成立：$a>b$，或$a=b$，或$a<b$；

(vi) $a<b \Longleftrightarrow b>a$。

定理1.16 若a，b、c是数，且$a>b$，那么

$$a+c>b+c \quad 及 \quad a-c>b-c。$$

证明 因为$a>b$，由定义及定理1·15的（i）得$a-b>0$。因此

$(a+c)-(a+c)=a-b>0$ 及 $(a-c)-(b-c)=a-b>0$。有$a+c>b+c$ 及 $a-c>b-c$。

定理1·17

(i) 若$a>0$及$b<0$，那么$ab<0$。

(ii) 若$a<0$及$b<0$，那么$ab>0$。

(iii) $1>0$

定理1·18

(i) a，b均为正或均为负，当且仅当$ab>0$；a与b反号，当且仅当$ab<0$。

(ii) 若$a\neq 0$，$b\neq 0$，那么ab与$\frac{a}{b}$同号。

定理1·19

(i) 若$a>b$，$c>0$，那么 $ac>bc$及$\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$。

(ii) 若$a>b$，$c<0$，那么 $ac<bc$及$\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$。

(iii) 若a，b同号且$a>b$，那么$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

定理1·20 若$a>b$及$b>c$，那么$a>c$。

采用一水平轴上的点来表示实数可使代数问题获得几何解释。于轴上取一适当的点为原点，原点表示数零，原点右边的点表示正数，左边的点表示负数(图1·1)。每一实数对应直线上的一个点；反过来，直线上的每个点对应一个实数。

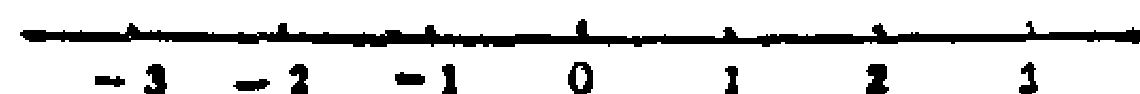


图 1·1

这样$a<b$也可读为a在b之左。用几何的观点来看不等式，往往有助于问题的解决。若a，b是两个数且$a<b$（图1·2），从a到b的开区间是大于a小于b的一切数的集，即a，b之间的一切数的集。数x在a，b之间是指$x>a$与$x<b$都成立。简记为

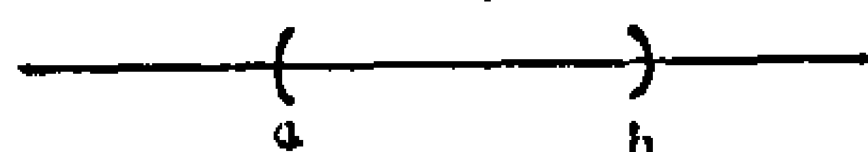


图 1·2

$$a<x<b$$

从a到b的闭区间由a，b之间的所有数连同a与b所构成的集（图1·3）。若数x不小于a记为$x\geqslant a$，读作“x大于等于a”．x不大于b记为$x\leqslant b$，读作“x小于等于b”。从a到b的闭区间简记为

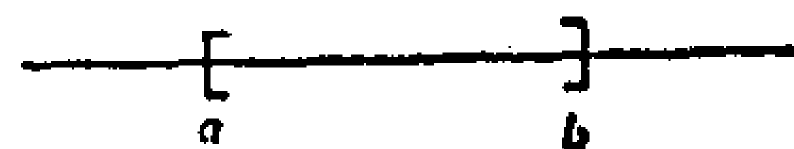


图 1·3

$$a\leqslant x\leqslant b.$$

一区间包含端点b（或a）但不包含端点a（或b）称之为左（或右）的半开区间，简记为

$$a<x\leqslant b \qquad (a\leqslant x<b).$$

用圆括号及方括号表示区间：

$(a,\ b)$ 表示开区间 $a<x<b$，

$[a,\ b]$ 表示闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$，

$(a,\ b]$ 表示左半开区间 $a<x\leqslant b$，

$[a, b)$ 表示右半开区间 $a\leqslant x<b$。

把区间概念推广使之包括无界的情况：把所有大于a的数集用双重不等式$a<x<\infty$来记，并以(a, ∞)表示。这里"∞"读作"正无穷"，注意"∞"不是数，只是一个表示符号。类似地$[a, \infty)$，$(-\infty, b)$，$(-\infty, b]$分别表示满足$a\leqslant x$，$x<b$，$x\leqslant b$的所有数的集，也分别用双重不等式$a\leqslant x<\infty$，$-\infty<x<b$，$-\infty<x\leqslant b$来记（图1·4）。

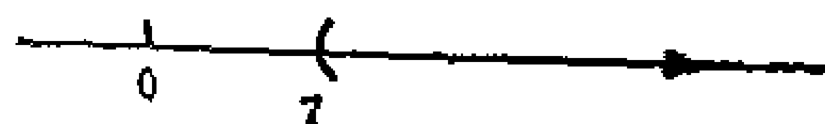


图 1·4

在实数系当中，方程$3x+7=19$有唯一的解$x=4$。二次方程$x^2-x-2=0$有两个解，$x=-1$，2。三角方程$\sin x=\frac{1}{2}$的解有$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$\frac{13\pi}{6}$，$\frac{17\pi}{6}$，…等无限多个解。不等式$x^2\leqslant 2$的解为区间$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$的一切数。通常把使含有x的等式或不等式成立的一切数的数集叫做解集。例如，不等式

$$3x-7<8$$

的解集为小于5的数集，即区间$(-\infty, 5)$。为确定解集，据有序域的各条公理及定理，并采用$\Longleftrightarrow$符号，求解步骤如下：

$3x-7<8\Longleftrightarrow 3x<15$　　（两端加7），

$3x<15\Longleftrightarrow x<5$　　（两端除以3），

解集是区间$(-\infty, 5)$。

例1　求不等式$-7-3x<5x+29$的解。

解

$-7-3x<5x+29\Longleftrightarrow -36<8x$　　（两端加$3x-29$）

$\Longleftrightarrow 8x>-36$　　（定理1·15之(vi)）

$$\Leftrightarrow x > -\frac{9}{2}$$

解集是区间$\left(-\frac{9}{2},\ \infty\right)$.

注　为了方便，介绍一下集的有关概念及符号，这些概念将贯穿于全书.一般地说，一个集是指某种对象的全体。这些对象具有某种特征（数、点、线等），该特征使我们知道对象是否属于给定的集.若S是集，p是集中的对象，称p为S的元素，记为$p\in S$，读作p属于S．若S_1与S_2是两个集，由至少属于两个集之一的所有元素组成的集称为S_1与S_2的并集，记为$S_1\cup S_2$．同时属于两个集的元素组成的集称为S_1与S_2的交集，记为$S_1\cap S_2$．如图1·5所示，S_1画以水平线，S_2画以垂直线，那么$S_1\cup S_2$由画线的范围表示；而$S_1\cap S_2$是画双重线的范围表示.同样，S_1，S_2，…，S_n，n个集的并集是由至少属于诸S_i之一的所有元素组成的集记为$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$，简记为$S=\bigcup_{i=1}^{n} S_i$．同时属于$n$个集的所有元素的集称为$n$个集的交集，记为$S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n$或简记为$\bigcap_{i=1}^{n} S_i$．可能出现$S_1$与$S_2$没有公共元素的情况。这时它们的交集是空的，称为空集，空集是不含元素的集，记为ϕ．

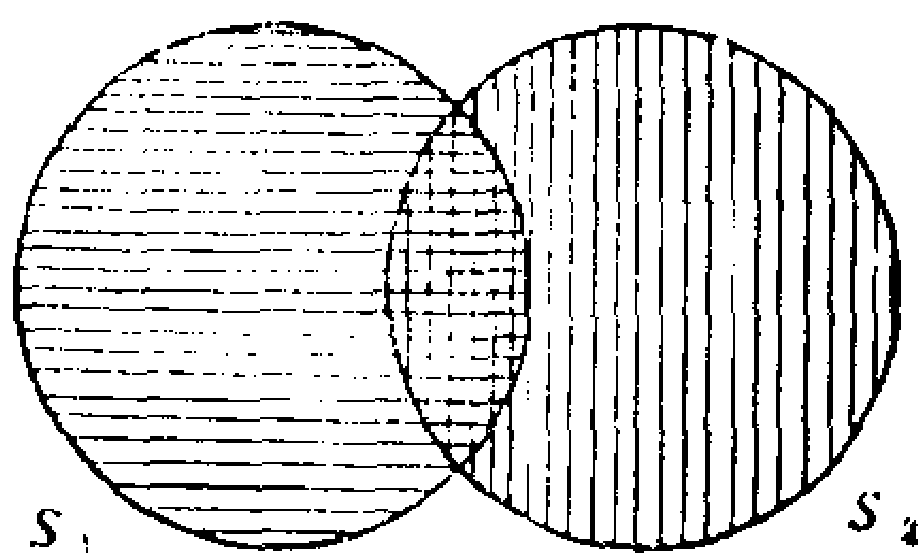


图　1·5

常常以集的元素的性质作为集的标志。例如，偶数的集可以表示成：

$$\{x:\ x=2n,\ n\text{是整数}\}.$$

表示法的括号中之最左边的x为集的一般元素，冒号右边指出元素的特征。例如介于0与1之间的有理数的集表示成：

$$\{x:\ x\in(0,\ 1)\text{且}x\text{是有理数}\}.$$

如果一个集只含有几个元素，可以把元素写在括号内。如由-2，0，1组成的集表示或$\{-2,\ 0,\ 1\}$，一个集可

用几个性质为标志，若集的元素同时具有性质A，B与C，可以表示这个集为：

$$\{p：p有性质A，B与C\}.$$

区间也可这样表示，例如

$(0, 2) = \{x: 0<x<2\}$，$[2, 14) = \{t: 2\leqslant t<14\}$.

用于说明集元素性质时，“与”及“或”各具有专门的意义。一个由具有性质A“或”性质B的元素组成的集是具有性质A的元素的集和具有性质B的元素的集的并集。可以象征地记为：

$\{x:x有性质A或性质B\} = \{x: x有性质A\} \cup \{x: x有性质B\}$。一个由具有性质$A$“与”性质$B$的元素组成的集是具有性质$A$的集与具有性质$B$的集的交集。即

$$\{x:x有性质A与性质B\} = \{x:x有性质A\} \cap \{x: x有性质B\}.$$

设A，B是两个集，若每一A的元素是B的元素，我们说A是B的子集，记为$A\subset B$。若$A\subset B$且$B\subset A$便等价于$A=B$。

例2 解不等式：$\dfrac{3}{x}<5 \quad (x\neq 0)$.

解 既然x可正可负，把问题分为两种情况：(i) x为正，(ii) x为负。要求的解集可记为S_1与S_2的并

$$S_1=\left\{x: \frac{3}{x}<5与x>0\right\},\quad S_2=\left\{x: \frac{3}{x}<5与x<0\right\}.$$

当 $\quad x\in S_1 \Longleftrightarrow 3<5x与x>0,$

$$\Longleftrightarrow x>\frac{3}{5}与x>0,$$

$$\Longleftrightarrow x>\frac{3}{5}.$$

当 $\qquad x\in S_2\Longleftrightarrow 3>5x$ 与 $x<0$,

$$\Longleftrightarrow x<\frac{3}{5}\text{ 与 }x<0,$$

$$\Longleftrightarrow x<0.$$

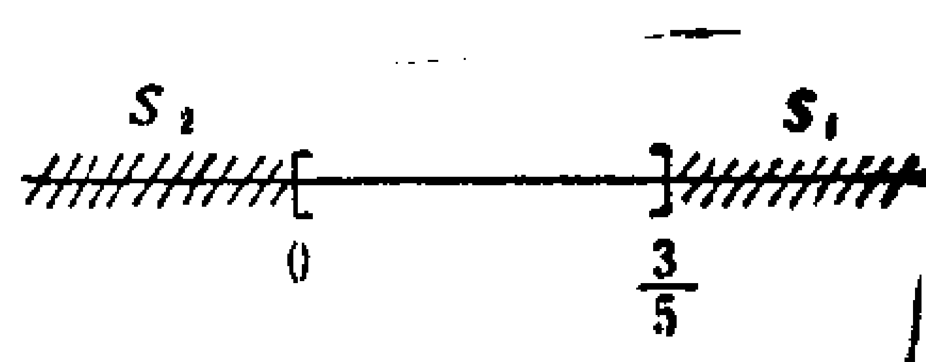


图 1·6

于是解集为:

$$S_1\cup S_2=(\frac{3}{5},\ \infty)\cup(-\infty,\ 0)\ (\text{图}1\cdot 6).$$

例3 解不等式: $\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}\qquad(x\neq-2)$.

解 如同例2,解集是$S_1\cup S_2$,这里

$$S_1=\{x:\ \frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}\text{与}x+2>0\},$$

$$S_2=\{x:\ \frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}\text{与}x+2<0\}.$$

$$x\in S_1,\ \frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}\Longleftrightarrow 3(2x-3)<x+2\text{与}x+2>0,$$

$$\Longleftrightarrow 5x<11\text{ 与 }x+2>0,$$

$$\Longleftrightarrow x<\frac{11}{5}\text{ 与 }x>-2$$

$$\Longleftrightarrow x\in\left(-2,\ \frac{11}{5}\right).$$

$$x\in S_2,\ \frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}\Longleftrightarrow 3(2x-3)>x+2\text{与}x+2<0$$

$$\Longleftrightarrow 5x>11 \quad \text{与} x+2<0$$

$$\Longleftrightarrow x>\frac{11}{5} \quad \text{与} x<-2。$$

因为不存在x同时满足 $x>\frac{11}{5}$与$x<-2$，集S_2为空集。解集为

$S_1=\left(-2,\ \frac{11}{5}\right)$（图1·7）.

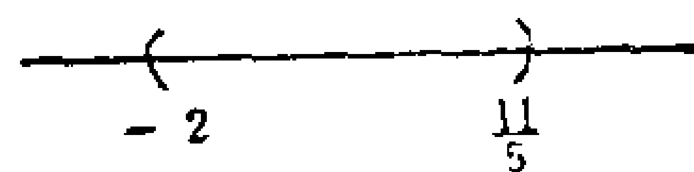


图 1·7

如果读者不熟悉绝对值的概念和包含绝对值的不等式及方程的解法，可参看书末之附录1.

习　　题

1. 考察由$a+b\sqrt{7}$组成的域，这里a，b是有理数，这个域是否满足序公理？证明你的回答。
2. 研究$ai\sqrt{7}$（a为实数，$i=\sqrt{-1}$）组成的集，证明可以定义集的元素的顺序使之满足序公理。这样的集称为序集，这个序集是否构成域？
3. 设a，b是有理数，证明所有形如$a+b_i$的复数的集满足域公理系。
4. 解下列不等式并于数轴上画出解集示意图：

(i)$2x-2<27+4x$；　　(ii)$5(x-1)>12-(17-3x)$；

(iii)$\frac{2x+1}{8}<\frac{3x-4}{3}$；

(iv)$\frac{x+10}{6}+1-\frac{x}{4}>\frac{4-5x}{6}-1$。

5. 求联立不等式的解（其解集是各不等式解集的交集）：

(i) $2x-3<3x-2$, $4x+1<2x+3$；

(ii) $3x+5>x+1$, $4x-3<x+6$；

(iii) $4-2x<1+5x$, $3x+2<x-7$。

6. 求不等式的解集：

(i) $\frac{x-2}{x}<3$； (ii) $\frac{x+2}{x-1}<4$；

(iii) $\frac{x}{2-x}<2$； (vi) $\frac{x+2}{x-3}<-2$；

7. 证明定理1·17。

8. 证明定理1·18。

9. 证明定理1·19。

10. 证明定理1·20。

11. 应用本节定理证明：若$a>b$，$c>d$，那么

$$a+c>b+d.$$

12. 应用本节定理证明：

(i) 若$a>b>0$，$c>d>0$，那么 $ac>bd$。

(ii) 若$a<b<0$，$c<d<0$，那么 $ac<bd$。

§1·4 数学归纳法，自然数的定义

数学归纳法能够作为有序域公理系的结果被导出。由于数学归纳原理以自然数定义为基础，因此把两者放到一起来研究。

定义 一数集S称为是归纳的，当且仅当

(a) $1\in S$；(b)如果$x\in S$，则$(x+1)\in S$。

自然数系，整数系，有理数系，实数系都是归纳集。0与10之间的实数只满足(a)不满足(b)，它不是归纳集。有限个实数的集不满足(b)，不可能是归纳集。

自然数系以它是最“小”的实数的归纳集为特征，可用这一特征来作为自然数的逻辑定义。

定义 一个实数称为自然数，当且仅当它属于每一个实数的归纳集。所有自然数的集用符号N表示。

定理1·21 自然数的集N是一归纳集。

证明 我们应当证明N满足归纳集定义中的性质(a)与(b)。凡归纳集按(a)应含有元素1，因此有$1\in$N。现设$K\in$N。那么由自然数的定义，K属于每一归纳集S。而对归纳集S，当$K\in S$便有$(K+1)\in S$。于是$K+1$属于每一归纳集，因而$(K+1)$是自然数，即$(K+1)\in$N。因此N具有性质(a)与(b)，N是归纳集。

定理1·22(数学归纳法原理) 若S是由自然数组成的归纳集，那么$S=$N。

证明 因为S是归纳集，由N的定义，有N$\subset S$。另一方面S由自然数组成，又有$S\subset$N，所以N$=S$。

通常数学归纳法是这样叙述的：如果和自然数n有关的命题：(i)当$n=1$时成立，(ii)假定$n=K$成立，则对$n=K+1$成立。那么命题对一切自然数成立。容易明白定理1·22与上述叙述形式只是表面上不同而已。现在举例说明如何应用数学归纳原理。

例1 证明对每一自然数n，有

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1\cdot1)$$

解 设S是使公式(1·1)成立的自然数n的集。证明S是归纳集。

(a)因为公式(1·1)对$n=1$成立。所以$1\in S$。

(b)设$K\in S$，那么公式(1·1)对$n=K$成立。两端加$K+1$，有

$$1+2+\cdots+K+(K+1)=\frac{K(K+1)}{2}+(K+1)$$

$$=\frac{(K+1)(K+2)}{2},$$

公式对$n=K+1$成立。于是$(K+1)\in S$。

综合(a)与(b)，S是由自然数组成的归纳集，由定理1·22，$S=\mathbf{N}$。即公式对所有自然数成立。

例2 证明对$n>3$的自然数n，有

$n!>2^n$ （这里$n!$ 表示$1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$）。

解 设S是$n>3$且$n!>2^n$成立的自然数及1，2，3所组成的集。证明S是归纳集。

(a)由S的定义$1\in S$。

(b)设$K\in S$。即$K=1$，2，3，或$K>3$且$K!>2^K$。若$K=1$，$K+1=2\in S$；若$K=2$，$K+1=3\in S$；若$K=3$，那么$K+1=4$，因为$4!=24$，$2^4=16$，$4!>2^4$，所以$4\in S$。若$K>3$且$K!<2^K$，显然$K+1>3$且

$$(K+1)!=(K+1)\cdot(K!)>(K+1)\cdot2^K>3\cdot2^K>2^{K+1}.$$

于是$(K+1)\in S$。因此S是归纳集。由定理1·22，$S=\mathbf{N}$。这样证明了当n为大于3的自然数时，便有$n!>2^n$。

注　例2的$n! > 2^n$在$n=1, 2, 3$时并不成立，必须直接定义$n=1, 2, 3$属于集S.遇到象例2这样的问题，可把定理1·22作如下的修正：称一实数集S具有修正的归纳性质，如果（1）S有一最小数；（2）当$x \in S$时有$(x+1) \in S$.定理1.22成为：若S是具有修正的归纳性质的自然数的集，那么S包含大于S内最小自然数的所有的自然数.

可以用数学归纳法证明§1·2中的命题1·1、命题1·2、命题1·4等。我们把它们重述为如下的定理1·23，1·24及1·25。后两定理的证明留给读者。

定理1·23　若a_1，a_2，$\cdots a_n$是给定的有限序列，那么，存在唯一的序列b_1，b_2，$\cdots b_n$，具有性质：

$$b_1 = a_1 \tag{1·2}$$

$$b_{i+1} = b_i + a_{i+1} \quad (i=1,2,\cdots,n-1, \text{当} n>1) \tag{1·3}$$

证明　设S为使定理成立的一切自然数n的集。我们证明S是归纳集。因为$b_1 = a_1$，$1 \in S$。设a_1，a_2，$\cdots$，a_K，a_{K+1}是给定的且$K \in S$。那么有唯一的序列$b_1, b_2, \cdots b_K$满足$b_1 = a_1$，及当$K>1$时，$b_{i+1} = b_i + a_{i+1}$（$i=1$，2，$\cdots$，$(K-1)$）；当$K=1$时，$b_1 = a_1$。定义$b_{K+1} = b_K + a_{K+1}$。于是序列b_1, b_2，$\cdots b_K$，b_{K+1}满足定理的等式（1·2）和（1·3），还应证明这样序列是唯一的。设$b_1', b_2', \cdots b_K', b'_{K+1}$是具有同样性质的另一序列。因为$K \in S$，当$i=1$，$2$，$\cdots$，$K$时有$b_i' = b_i$，而

$$b'_{K+1} = b'_K + a_{K+1} = b_K + a_{K+1} = b_{K+1}.$$

于是$(K+1) \in S$。因此集S是归纳的，由定理1·22 $S = \mathbb{N}$，即定理对一切自然数成立。

定理1·24　若a_1，a_2，$\cdots a_n$是给定的有限序列，那么，存在唯一的序列C_1，C_2，$\cdots, C_n$，满足

$c_1 = a_1$

$c_{i+1} = c_i \cdot a_{i+1} \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1$，当$n > 1)$。

定理1·25 若$a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, \cdots, a_{m+n}$是有限序列，那么

$$\sum_{i=1}^{m+n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} a_i$$

$$\prod_{i=1}^{m+n} a_i = \left(\prod_{i=1}^{m} a_i\right) \cdot \left(\prod_{i=m+1}^{m+n} a_i\right).$$

直观地，大家知道自然数集N就是正整数集。自然数是正数的事实可从序公理及N的定义导出。下一定理的证明请读者完成。

定理1·26 自然数是正数。

下面三个定理指出自然数集是有序的，对加法及乘法运算是封闭的（即满足公理A_1与M_1）。

定理1·27 若m，n是自然数，那么或者$n \leqslant m$或者有一自然数p使$n = m + p$成立。

定理1·28 若m，n是自然数，那么$m + n$是自然数。

定理1·29 若m，n是自然数，那么$m \cdot n$是自然数。

这三个定理的证明都留给读者。定理1·27说明自然数集是有序集。下面定理指出自然数集的序还有更好的性质——良序性。

定理1·30 （良序性定理） 任意的一个非空自然数集T含有最小数。

证明 设K是T的数，定义一个由自然数组成的集$S = \{p: p \in T$与$p \leqslant K\}$。那么$S \subset \{1, 2, \cdots, K-1, K\}$。

这说明S是有限个自然数的集，S有最小的元素，表示为s。现在我们来证明s是T的最小元素。首先因为$s\in S$及$S\subset T$，所以$s\in T$。设$t\in T$且$t\neq s$。当$t>K$，由$K\geqslant s$得$t>s$。另一方面，当$t\leqslant K$，那么$t\in S$，s是S的最小数且$s\neq t$，因为必有$s<t$。总之s是T的最小数。

§1·1、§1·3的域公理及序公理虽然给出了实数运算及不等式关系的逻辑基础，但这一公理系并不以实数系为唯一的解释。有理数系与实数系都是有序域。要得到以实数系为唯一解释的公理系还要增加新的公理。所要增加的新公理是描与实数系连续性的连续性公理，将在§2·5中来完成这一工作。

习　题

1.用数学归纳法证明下列公式：

(i) $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$；

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$；

(iii) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$，

(iv) $\sum_{i=1}^{n} i(i+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$；

(v) $\sum_{i=1}^{n} i(i+2)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$；

(vi) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n}{n+1}$.

2. 设p，q，r是自然数且满足$p+q<p+r$。证明

$$q<r.$$

3. 设p，q，r是自然数且满足$pq<pr$.证明

$$q<r$$

4. (i) 证明正有理数集是归纳集。

   (ii) 设a，b是自然数，一切$a+b\sqrt{5}$组成的集是归纳集吗?

   (iii) 所有复数的集是归纳集吗?

5. 用数学归纳法证明下列等式。

   (i) a,d是实数，

$$\sum_{i=1}^{n}[a+(i-1)d]=\frac{1}{2}n[2a+(n-1)d];$$

   (ii) $\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$。

   (iii) $(1+a)^n>1+na$,a为实数$a\geqslant 0$,n为自然数。

   (iv) $\sum_{i=1}^{n}3^{2i-1}=\frac{1}{8}\cdot 3(9^n-1)$。

6. 证明定理1·24。

7. 证明定理1·25。

8. 证明定理1·26。

9. 证明定数1·27.〔提示：设m是固定的自然数，定义S是使

定理成立的所有自然数的集。〕

10. 证明定理1·28。〔提示：使用定理1·27〕

11. 证明定理1·29。

12. 用归纳法证明§1·2的命题1·5。

13. 用归纳法证明§1·2的命题1·6。

14. 证明下列命题：若a_1，a_2，$\cdots a_n$及b_1，b_2，$\cdots b_n$是两有限序列且对$i=1$，2，$\cdots$ n，$b_i\neq 0$，那么

$$\frac{a_1}{b_1}\quad\frac{a_2}{b_2}\cdots\cdots\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1a_2\cdots\cdots a_n}{b_1b_2\cdots\cdots b_n}.$$

第二章　连续性和极限

§2·1　连　续　性

反映客观世界当中变量依赖关系的函数概念是分析数学的基本概念。

全体实数的集以$\mathbf{R}_1$表示。全体二个实数的序组（简称序偶）的集以$\mathbf{R}_2$表示。全体三个实数的序组的集以$\mathbf{R}_3$表示，全体N个实数的序组的集以$\mathbf{R}_N$表示。

定义　称$\mathbf{R}_2$中的一个集$\{(x,y):x\in D\subset\mathbf{R}_1,y\in S\subset\mathbf{R}_1\}$为$\mathbf{R}_1$到$\mathbf{R}_1$的关系。关系的序偶（$x,y$）的第一个元$x$组成的集$D$称为关系的定义域；第二个元$y$的集$S$称为关系的值域。如果$\mathbf{R}_1$到$\mathbf{R}_1$的关系$f$不含有第一元相同的两个序偶，称$f$为从$\mathbf{R}_1$到$\mathbf{R}_1$的函数。表示为$f:\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$。若$D$是$f$的定义域，$S$是$f$的值域，也用$f:D\to S$。表示函数。函数也称映射，映射是函数的同义语。一个函数是这样的关系：对关系定义域的每一x有唯一的y属于关系的值域，这样的序偶（x,y）组成函数.有时将函数表示为$f:x\to y$或$y=f(x)$，或$x\to f(x)$。

在初等微积分里。所研究的函数绝大多数是用简单公式表示的函数，这种函数几乎恒为可以求导的，导数不存在的点仅是个别的点，例如函数$\frac{1+x^2}{x}$，$\text{ctg}x$，$\sin\frac{1}{x}$在$x=0$点不存在导数。这种函数的图象都是光滑的曲线。现实要求

我们研究更广的函数类。为此，引入连续函数的概念。

定义 设f是以$D\subset R_1$为定义域的函数。称f在a点连续，当且仅当(i)点a属于包含在D内的一开区间I内；(ii)对每一正数ε存在一正数δ使当 $|x-a|<\delta$，有$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。若f在集S的每一点连续，称f在S上连续。在定义域上连续的函数称为连续函数。

在一点连续的几何意义如图2·1所示。不等式

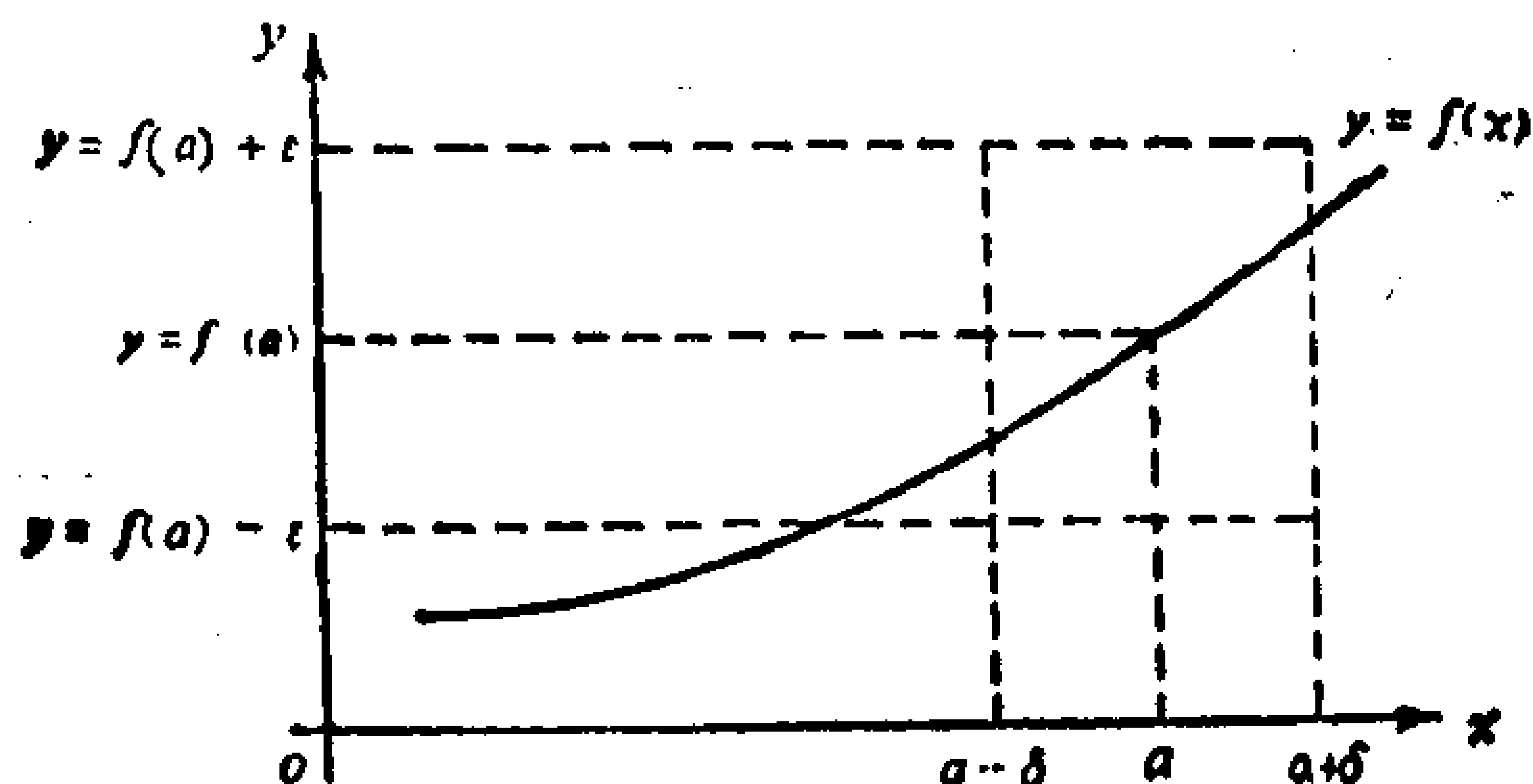


图 2·1

$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$与双重不等式

$$-\varepsilon<f(x)-f(a)<\varepsilon \text{ 或 } f(a)-\varepsilon<f(x)<f(a)+\varepsilon$$

等价。同样地，$|x-a|<\delta$ 等价于

$$a-\delta<x<a+\delta.$$

于平面直角坐标系中画出：$x=a-\delta$，$x=a+\delta$，$y=f(a)-\varepsilon$及$y=f(a)+\varepsilon$等四条直线。这四条直线确定一个以点$(a,f(a))$为中心的矩形。f在a点连续的几何解释是对每一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使$(a-\delta,a+\delta)$区间内的一切x，f的图象保留在这一矩形范围之内。

按定义直接证明函数的连续性，一般说是很困难的。这样的证明要对每一正数ε都找到相应的δ，并证明f图象的相

应部分落在所述的矩形里。如果函数f以充分简单的公式给出时，对于ε有可能求出相应δ的表示式。下面举例说明求相应δ的方法。

例1 给定函数$f: x \to \frac{1}{x+1}$，$x \neq -1, a = 1, \varepsilon = 0.1$，求使当$|x-1| < \delta$，有$|f(x) - f(1)| < 0.1$的$\delta$。

解 画出f的草图并注意当$x > -1$时函数是递减的（图2·2），$f(1) = \frac{1}{2}$，从方程$f(x) - f(1) = 0.1$及方程$f(x) - f(1) = -0.1$分别求解x：

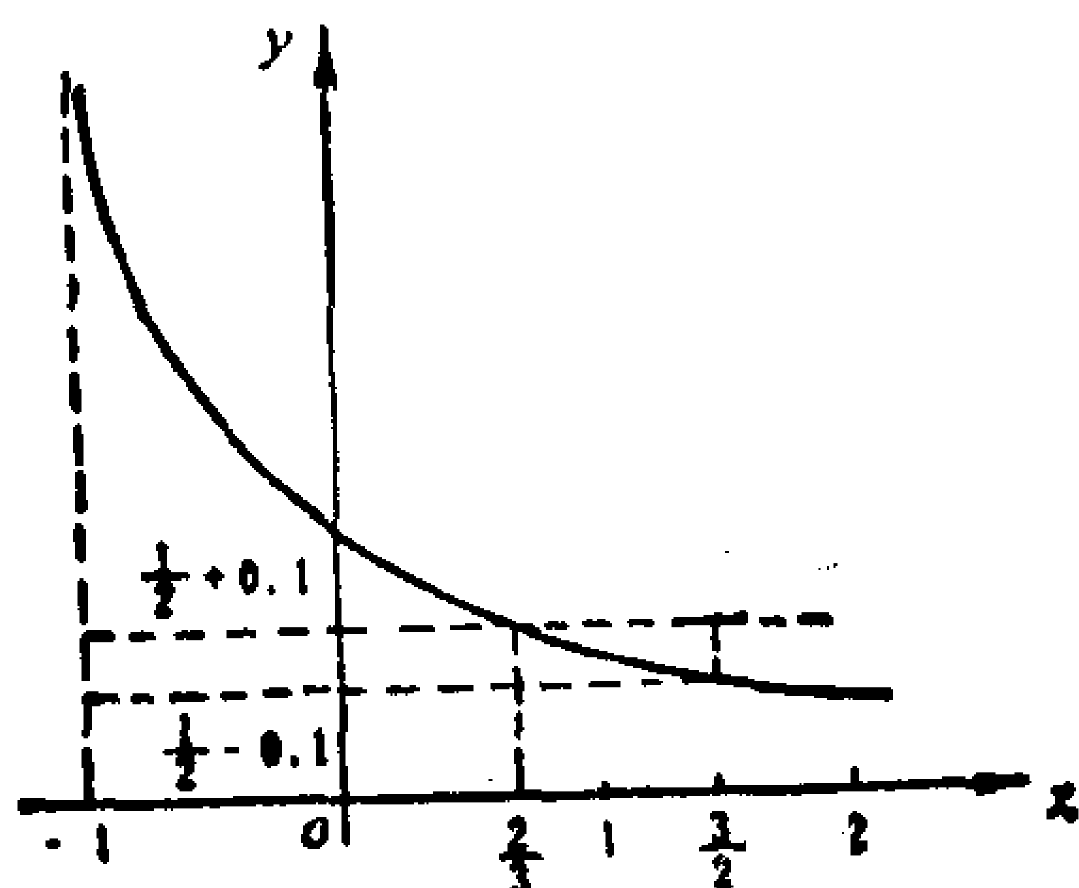


图 2·2

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} = 0.1 \iff x = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} = -0.1 \iff x = \frac{3}{2}.$$

因为f在$x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$内是递减的，显然$f$的图象位于由直线$x = \frac{2}{3}, x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2} - 0.1, y = \frac{1}{2} + 0.1$构成的矩形内。

应当选取$a=1$点到$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$两点距离较小的$\frac{1}{3}$为相应于$\varepsilon=0.1$的δ，即$\delta=\frac{1}{3}$。重要的一点是，对给定的ε得到了某一相应的δ，那么比这一δ更小的值仍然适合于同一ε的要求。如本例中相应于$\varepsilon=0.1$的δ可取为$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{10}$等比$\frac{1}{3}$小的任何一个正数。

例2 给定函数

$$f: x \to \begin{cases} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}, & x \geqslant 0 \quad x \neq 4, \\ 4 & x = 4. \end{cases}$$

若取$\varepsilon=0.01$，求使当$|x-4|<\delta$，有$|f(x)-f(4)|<0.01$的δ。

解 当$x\neq 4$，

$$f(x)=\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}=\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2}=\sqrt{x}+2$$

f的图象如图2·3.f是一增函数.解方程

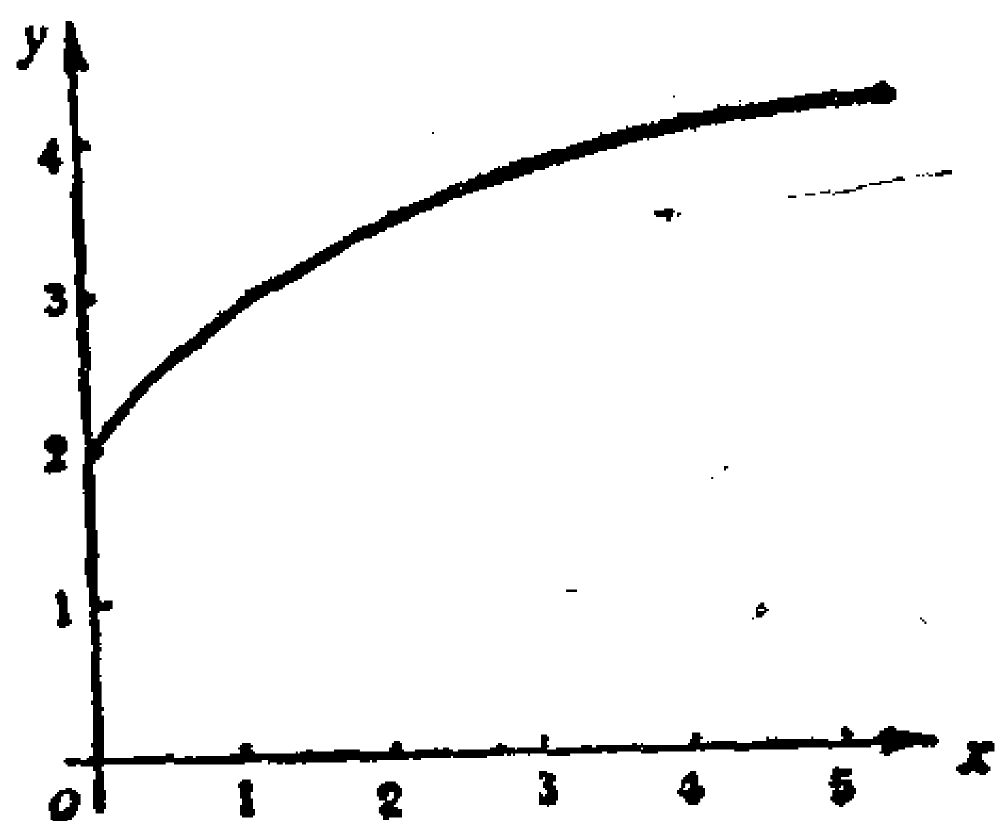


图 2·3

$$f(x)-f(4)=0.01 \quad 及 \quad f(x)-f(4)=-0.01.$$

$$\sqrt{x}+2-4=0.01 \Longleftrightarrow \sqrt{x}=2+0.01 \Longleftrightarrow x=4.0401.$$

$$\sqrt{x}+2-4=-0.01 \Longleftrightarrow \sqrt{x}=2-0.01 \Longleftrightarrow x=3.9601.$$

因f是递增的，当$x\in(3.9601,4.0401)$，有$|f(x)-f(4)|<0.01$.取$\delta=\min((4-3.9601),(4.0401-4))=0.0399$，当$|x-4|<\delta$，便有$|f(x)-f(a)|<0.01$.

常常遇到函数的定义域D是R_1中的区间除去区间内的一点或一端点的情况。例如函数$x\to\frac{x^2+1}{x}$，除$x=0$点外处处有定义。$\log x$对所有$x>0$有定义，但对$x=0$无定义。$\operatorname{ctg}x$对不包含$K\pi$（K表示整数）的区间有定义。函数$\frac{x^3+8}{x+2}$对$x=-2$无定义。一般的，函数是两多项式的商，那么定义域要除去分母等于零的点。

讨论在除去的这种区间内的点或区间端点附近函数的变化情况，需要引进函数极限的概念。

定义 设f是从定义域$D\subset R_1$到R_1的函数，a，L是实数。称在x趋向于a时f趋向于极限L，当且仅当(i)存在包含a点的开区间I，I可能除去a点之外包含于D内。(ii)对每一正数ε存在一个正数δ使当$0<|x-a|<\delta$时，

$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

记为：当$x\to a$，$f(x)\to L$；当以$\lim\limits_{x\to a}f(x)$表示L，也常写成$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.

注 (i) f在a点连续当且仅当 $a\in D$并且$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. (ii) 极限定义中 $0<|x-a|<\delta$ 与连续性定义中 $|x-a|<\delta$ 不同，前者排除了$x=a$，即极限定义中f可以在a点没有定义。

习 题

设下列1—8题中，给定的函数在a点连续，按连续性定义对给定之ε求相应的δ，并画出图形。

1. $f(x)=2x+5$, $a=1$, $\varepsilon=0.01$;

2. $f(x)=1-3x$, $a=2$, $\varepsilon=0.01$;

3. $f(x)=\sqrt{x}$, $a=2$, $\varepsilon=0.01$;

4. $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $a=1$, $\varepsilon=0.01$;

5. $f(x)=1+x^2$, $a=2$, $\varepsilon=0.01$;

6. $f(x)=x^3-4$, $a=1$, $\varepsilon=0.5$;

7. $f(x)=x^3+3x$, $a=1$, $\varepsilon=0.5$;

8. $f(x)=\sqrt{2x+1}$, $a=4$, $\varepsilon=0.1$.

设下列9—17题中，给定函数在包含a点的区间内除了a点外有定义。对给定L和ε，求使当$0<|x-a|<\delta$有$|f(x)-L|<\varepsilon$成立的δ，并画出草图。

9. $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $a=-3$, $L=-6$, $\varepsilon=0.005$;

10. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x}-2}{x-2}$, $a=2$, $L=\dfrac{1}{2}$, $\varepsilon=0.01$;

11. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$, $a=2$, $L=4$, $\varepsilon=0.01$

12. $f(x)=\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$, $a=9, L=6$, $\varepsilon=0.1$;

13. $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$, $a=2$, $L=12$, $\varepsilon=0.5$;

14. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$, $a=-1$, $L=12$, $\varepsilon=0.5$;

15. $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, $a=1$, $L=3$, $\varepsilon=0.1$;

16. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $a=0$, $L=1$, $\varepsilon=0.1$;

17. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, $a=0$, $L=1$, $\varepsilon=0.1$.

18. 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在。

19. 函数$f(x)=x\operatorname{ctg}x$在$x=0$点无定义，能否补充$f$于$x=0$点的定义，使$f(x)$成为连续函数？

§2·2 极限定理

极限定理是证明微积分定理的基础。

定理2·1（极限的唯一性） 设f是$R_1\to R_1$的函数，当

$x\to a$，$f(x)\to L$及$f(x)\to M$，那么$L=M$。

证明 假定$L\neq M$将导致矛盾。取$\varepsilon=\frac{1}{2}|L-M|$。依极限定义，对这一正数$\varepsilon$，存在一个$\delta_1>0$使当$0<|x-a|<\delta_1$有$|f(x)-L|<\varepsilon$成立。同样，存在$\delta_2>0$，使当$0<|x-a|<\delta_2$有$|f(x)-M|<\varepsilon$成立。如图2·4所示取$x_0$，满足$0<|x_0-a|<\min\{\delta_1,\delta_2\}$。记

$$L-M=(L-f(x_0))+(f(x_0)-M).$$

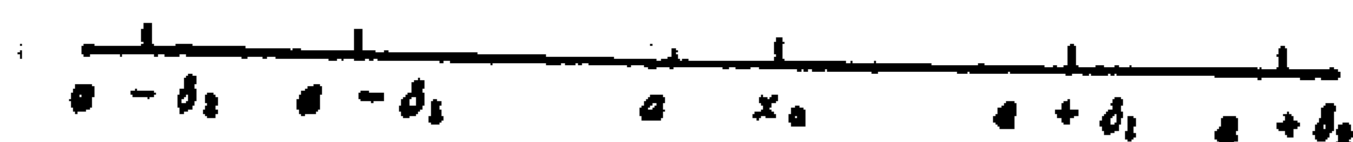


图 4·2

于是

$$|L-M|\leqslant|L-f(x_0)|+|f(x_0)-M|<\varepsilon+\varepsilon$$

$$=2\varepsilon=2\cdot\left(\frac{1}{2}|L-M|\right)=|L-M|,$$

出现$|L-M|<|L-M|$的矛盾。

定理2·2（常数的极限） 设c是常数，对$\mathbf{R}_1$的一切x，$f(x)=c$。那么，对每一数a有

$$\lim_{x\to a}f(x)=c$$

证明 对每一正数ε，取$\delta=1$，便有

$|f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$，对$|x-a|<\delta$的$x$成立。

定理2·3（明显的极限） 设$f(x)=x$，对每一数a，都有

$$\lim_{x\to a}f(x)=a.$$

证明 因为$f(x)-a=x-a$，对每一$\varepsilon>0$取$\delta=\varepsilon$，显然当$0<|x-a|<\delta$,有$|f(x)-a|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=a$。

定理2·4（相等函数的极限） 设f与g都是定义域包含集$S=\{x: 0<|x-a|<r, r为一正数\}$的函数，且当$x\in S$时，$f(x)=g(x)$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$,那么

$$\lim_{x\to a}f(x)=L。$$

证明 因$\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$,对每一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$0<|x-a|<\delta$有$|g(x)-L|<\varepsilon$。如有必要可以减小$\delta$,使$\delta<r$。由$x\in S$，$f(x)=g(x)$。因此，当$0<|x-a|<\delta$便有$|f(x)-L|=|g(x)-L|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$。

注 定理2·4中的f与g在集S之外可以不相等；f或g也都允许在$x=a$无定义.

定理2.5（和的极限） 设$\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=L_1$,$\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=L_2$。定义$g(x)=f_1(x)+f_2(x)$。那么

$$\lim_{x\to a}g(x)=L_1+L_2。$$

证明 设$\varepsilon>0$是给定的，那么对$\frac{\varepsilon}{2}$，存在正数δ_1与δ_2，使当$0<|x-a|<\delta_1$有$|f_1(x)-L_1|<\frac{\varepsilon}{2}$；及当$0<|x-a|<\delta_2$有$|f_2(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}$取一比$\delta_1,\delta_2$都小的$\delta>0$，那么,当$0<|x-a|<\delta$时便有

$$|g(x)-(L_1+L_2)|=|f_1(x)-L_1+f_2(x)-L_2|$$
$$\leqslant|f_1(x)-L_1|+|f_2(x)-L_2|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon。$$

于是 $\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$

推论 设$\lim_{x\to a} f_i(x)=L_i$, $i=1,2,\cdots,n$.定义

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

那么 $$\lim_{x\to a} g(x)=\sum_{i=1}^{n} L_i.$$

推论可象定理那样直接证明或用定理及归纳法证明，把它留给读者。

定理2·6（积的极限） 设$\lim_{x\to a} f_1(x)=L_1$及$\lim_{x\to a} f_2(x)=L_2$.定义$g(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$.那么$\lim_{x\to a} g(x)=L_1\cdot L_2$.

证明 为了估计$|g(x)-L_1L_2|$,由等式

$$g(x)-L_1L_2=L_2(f_1(x)-L_1)+f_1(x)(f_2(x)-L_2).$$

取绝对值得不等式

$$|g(x)-L_1L_2|\leqslant|L_2|\cdot|f_1(x)-L_1|+|f_1(x)||f_2(x)-L_2|.$$

由假设，对正数ε_1及ε_2，存在相应的正数δ_1及δ_2，使

$$\text{当}\quad 0<|x-a|<\delta_1,\quad |f_1(x)-L_1|<\varepsilon_1. \tag{2·1}$$

$$\text{当}\quad 0<|x-a|<\delta_2,\quad |f_2(x)-L^2|<\varepsilon_2. \tag{2·2}$$

此时 $$|f_1(x)|=|f_1(x)-L_1+L_1|$$

$$\leqslant|f_1(x)-L_1|+|L_1|<|L_1|+\varepsilon_1.$$

把$|L_1|+\varepsilon_1$用M来记。

现在对于给定$\varepsilon>0$，为了找到相应的δ，使当$0<|x-a|<\delta$有$|g(x)-L_1L_2|<\varepsilon$，选取(2·1)及(2·2)中的

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2|L_2|+1},\ \varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{2M},$$

并记$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$。当$0<|x-a|<\delta$有

$$|g(x)-L_1L_2|\leqslant|L_2|\ |f_1(x)-L_1|+|f_1(x)|\ |f_2(x)-L_2|$$

$$<|L_2|\cdot\frac{\varepsilon}{2|L_2|+1}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}<\varepsilon.$$

于是$\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_1\cdot L_2$。

推论 设当$x\to a$，$f_i(x)\to L_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，且

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n}g_i(x),\qquad \text{那么}\qquad \lim_{x\to a}g(x)=\prod_{i=1}^{n}L_i.$$

设函数$g: D_1\to S_1$，$f: D_2\to S_2$且$S_1\subset D_2$，那么由$x\to f[g(x)]$所给出的D_1上的函数h称为f与g的复合函数，记为$h=f\circ g$或$h(x)=f[g(x)]$。

定理2·7（复合函数的极限） 设h是f与g的复合函数，且$x\to a$，$g(x)\to L$，而f在L点连续，那么

$$\lim_{x\to a}h(x)=f(L).$$

证明 因为f在L点连续，对每一$\varepsilon>0$，存在一$\delta_1>0$使当 $|t-L|<\delta_1$有

$$|f(t)-f(L)|<\varepsilon.$$

而由$x\to a$，$g(x)\to L$，对$\varepsilon'=\delta_1>0$，存在$\delta>0$，使当

$0<|x-a|<\delta$ 有

$$|g(x)-L|<\varepsilon'=\delta_1.$$

进而有

$$|h(x)-f(L)|=|f[g(x)]-f(L)|<\varepsilon.$$

注 定理2·7要求f在L点连续，不能减弱为$\lim\limits_{t\to L}f(t)$存在.本节的习题8就是例证.

推论 若g在a点连续且$g(a)=L$，f在L点连续，那么复合函数$h(x)=f[g(x)]$在a点连续。

通常把推论叙述成：连续函数的复合函数是连续函数。

定理2·9（商的极限） 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$及$\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$且$M\neq 0$。定义$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，那么$\lim\limits_{x\to a}h(x)=\dfrac{L}{M}$。

证明 只需证明$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$，然后应用定理2·6便得本定理的结论。对于$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$，可以按极限定义完成证明。下面用另一方法，即通过证明函数：$t\to\dfrac{1}{t}$，$t\neq 0$连续，把$\dfrac{1}{g(x)}$看作$\dfrac{1}{t}$与$g(x)$的复合函数应用定理2·8得到$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{M}$。

现在证明函数$t\to\dfrac{1}{t}$在$a\neq 0$点连续。对给定$\varepsilon>0$，由

$\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|t-a|}{|t\cdot a|}$，取$\delta=\min\left\{\frac{|a|}{2},\ \frac{1}{2}a^2\varepsilon\right\}$，当$0<|t-a|<\delta$，有$\left|\frac{1}{t}-\frac{1}{a}\right|=\frac{|t-a|}{|t\cdot a|}<\frac{2|t-a|}{|a|^2}<\frac{2}{|a|^2}\cdot\frac{a^2}{2}\varepsilon=\varepsilon$。

定理2.9（不等式的极限） 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$，且在包含$a$的某区间内（$a$点可能除外）$f(x)\leqslant g(x)$，那么$L\leqslant M$。

证明 假定$L>M$将导致矛盾。取$\varepsilon=\frac{L-M}{2}>0$，由极限定义存在正数$\delta_1$，$\delta_2$，使当$0<|x-a|<\delta_1$，$|f(x)-L|<\varepsilon$；当$0<|x-a|<\delta_2$，$|g(x)-M|<\varepsilon$。选取比$\delta_1$与$\delta_2$都小的正数$\delta$，且使$\delta$小到使$0<|x-a|<\delta$的$x$有$f(x)\leqslant g(x)$成立。对这样的$x$，有

$$M-\varepsilon<g(x)<M+\varepsilon \quad 及 \quad L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon。$$

因为$\varepsilon=\frac{L-M}{2}$，$M+\varepsilon=L-\varepsilon$，导致

$$g(x)<M+\varepsilon=L-\varepsilon<f(x)$$

的矛盾。

注 定理2·9中的f，g在$x=a$点可以没有定义．如果f与g在a点连续，由定理断定$f(a)\leqslant g(a)$．如果定理中$f(x)\leqslant g(x)$换成$f(x)<g(x)$，但却不能断定$L<M$．例如在$-1<x<1$，$x\neq0$内有$f(x)=x^4<g(x)=x^2$，可是$\lim\limits_{x\to a}x^4=\lim\limits_{x\to a}x^2=0$．

定理2·10（两边夹定理） 设K是一正数，给定函数f，g及h在$0<|x-a|<k$上有定义．若对这样的x有$f(x)\leqslant g(x)$

$\leqslant h(x)$，并且$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$.那么，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$

证明　由$x\to a$，$f(x)$，$h(x)$都以L为极限的假设，对任给$\varepsilon>0$，存在小于K的正数δ_1，δ_2，使当$0<|x-a|<\min\{\delta_1, \delta_2\}$，有$|f(x)-L|<\varepsilon$与$|h(x)-L|<\varepsilon$，也即

$$L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon \quad 及 \quad L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon.$$

由$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，对满足$0<|x-a|<\min\{\delta_1, \delta_2\}$的$x$，有

$$L-\varepsilon<f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)<L+\varepsilon,$$

也即$|g(x)-L|<\varepsilon$.于是$\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$.

习　题

1. 综合运用定理2·2，2·3，2·5，2·6，证明对任意a

　(i)　$\lim\limits_{x\to a}(cx+d)=ca+d$.

　(ii)　$\lim\limits_{x\to a}(cx^2+dx+e)=ca^2+da+e$.

2. 设n次多项式$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，用归纳法证明$\lim\limits_{x\to a} p_n(x)=p_n(a)$.

3. 设$p_n(x)$，$q_m(x)$分别是n次、m次多项式，运用习题2的结果及定理2·8证明：当a不是$q_m(x)$的根时，

$$\lim_{x\to a}\frac{p_n(x)}{q_m(x)}=\frac{p_n(a)}{q_m(a)}.$$

*4. 设$x_1, x_2, \cdots x_n\cdots$是趋向$a$的点列，$f$与$g$在$0<|x-a|<K$内有定义且$f(x_n)=g(x_n)$. 如果$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$，是否有$\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$.

5. 自然数$n\geqslant3$，运用定理2·10证明$\lim\limits_{x\to a}x^n=0$。

6. 直接按极限定义证明定理2·5推论。

7. 证明定理2·6的推论。

*8. 设$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$-\pi\leqslant x\leqslant\pi$，$x\neq0$。画出$f$的草图。

（i）证明$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$；

（ii）定义$g(x)\equiv f(x)$。显然地，当$x_n=\pm\dfrac{1}{n\pi}$，$n=1,2,\cdots$，$g(x)=0$。由此断定对$x=x_n$，$f[g(x)]$没有定义。

（iii）用（ii）的结果证明$h(x)=f[g(x)]$当$x\to0$时极限不存在。(请读者把（iii）与定理2.7相对照)

（iv）如果定义

$$F(x)=\begin{cases}x\sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant\pi, x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

用定理2·7证明$\lim\limits_{x\to0}F[g(x)]=0$。

9. 设f，g是连续函数，定义$F(x)=\max[f(x),\ g(x)]$，证明F是连续函数。

10. 证明定理2·8。

11. 设n为自然数，$a>0$，证明$G(x)=\sqrt[n]{x}$在a点连续。(关于对数函数、指数函数的严格定义将在§5·3中给出。)

§2·3 单边极限——相对于集的连续性

函数f：$x\to\sqrt{x}$对$x>0$的点有定义并且连续．因为函

数对$x<0$没有定义，在$x=0$点f不满足§2·1中的连续性定义。很明显，当x通过正数趋向于零仍然有$f(x)\to f(0)$。为了使连续性概念包括象上述函数在定义域之端点的情况，我们推广连续性的定义。为此，需要引进单边极限概念。

定义 设f是以D为定义域的函数，$a\in R_1$，称当x从a的右边趋向于a，f趋向于L，当且仅当(i)存在一个以a点为左端点的开区间$I\subset D$。(ii) 对每一$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使当$0<x-a<\delta$，有

$$|f(x)-L|<\varepsilon.$$

当此记为：当$x\to a^+$，$f(x)\to L$或$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=L$。称$f(x)$在$x=a$点的右极限为$L$。

同样地，把定义中的"右"换成"左"，把$0<x-a<\delta$换成$0<a-x<\delta$ 就是$f(x)$在$x=a$点的左极限定义。记为：当$x\to a^-$，$f(x)\to L$或$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=L$。函数的左、右极限统称为单边极限。

注 既然$0<|x-a|<\delta$和$0<x-a<\delta$与$0<a-x<\delta$两者相等价，那么§2·2证明的关于极限的所有定理对于左、右单边极限都有相应的定理成立，只须把定理叙述中的"极限"换成"单边极限"。

由单边极限概念来定义单边连续性。

定义 函数f在a点右(左)连续当且仅当a属于定义域且

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)\ (\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a)).$$

若函数f的定义域是有限区间$a\leqslant x\leqslant b$，当x是(a,b)内的点，f在x点有极限，当且仅当f在x点有相同的左、右极限；

f在x点连续，当且仅当f在x点左、右连续。在$[a, b]$的左端点只能讨论右极限，右端点只能讨论左极限。相应地在左端点a讨论右连续性，在右端点b讨论左连续性。如函数$f: x \to \sqrt{x}$，$0 \leqslant x \leqslant 1$，在$x=0$点右连续，在$x=1$点左连续，在$(0, 1)$的每一点连续(注意是双边的！)，说$f$在$[0, 1]$上连续。

在区间端点函数的单边连续性，限制x在定义域里变化的这种观点能够用来进一步推广连续性概念。

定义 设函数f的定义域$D \subset \mathrm{R}_1$，$a \in \mathrm{R}_1$，称函数f在a点关于D连续，当且仅当(i)$a \in D$，(ii)对每一$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，当$x \in D$且$|x-a| < \delta$，有

$$|f(x)-f(a)| < \varepsilon.$$

如果f在D的每一点关于D连续称f在D上连续。

注 (i)今后我们常省略定义中的"关于D"的副词，这是因为在上下文中D往往是已知的.(ii)当存在区间I，$a \in I \subset D$，那么现在的定义与§2·1的定义相重合.(iii)当a是区间I的左端点，$a \in D$，现在的定义与右连续性重合.定义域是闭区间$a \leqslant x \leqslant b$，$f$在$D$上连续就是指$f$在$(a, b)$的每一点连续，在$a$点右连续，在$b$点左连续.

定义 称$a \in D$为D的孤立点，当且仅当存在开区间I，使$I \cap D = \{a\}$，$\{a\}$表示仅有单一元素a组成的集。

设a是函数f的定义域D中的孤立点，那么f在a点关于D是连续的。事实上，a是D的孤立点，存在包含a的开区间I，$I \cap D = \{a\}$。选取δ小于a点到I的端点的距离中较小者，那么$x \in D$而又满足$|x-a| < \delta$的x仅有$x=a$点。这时$|f(x)-f(a)|$成为$|f(a)-f(a)| = 0$。因此，f在a点连续！

函数在定义域D的孤立点a处其图象是R_2平面上的孤立

点$(a,f(a))$，f的图象在这里不再是"连续"的曲线。由此可见连续性概念已被推广成相当一般化的概念了，仅在定义域是区间的特殊情况下，连续函数的图象才有"连续不断"的形象。

借助于连续性的一般定义。可以证明函数$g: x \to \sqrt[n]{x}$（n为自然数）在其定义域上连续。

定理2·12 设函数$g: x \to \sqrt[n]{x}$当n为正偶数时，g在$[0,\infty)$上连续；当n为正奇数时，g在$(-\infty,\infty)$上连续。

证明 上节之习题11证明了对自然数n当$x>0$时，g在x点连续。对$x \geqslant 0$及任意的$\varepsilon>0$，当$|x-0|<\varepsilon^n$有$|\sqrt[n]{x}-0|<\varepsilon$。于是$g$在$x=0$点右连续。若$n$为奇数，那么$\sqrt[n]{-x}=-\sqrt[n]{x}$，因此$g$在0点也是左连续的，从而$g$在$(-\infty,\infty)$上连续。

有时讨论单边极限比讨论双边极限来得简便些。

例 设函数$f(x)=\begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \sqrt{\dfrac{3(x^4-16)}{2(x^3-8)}}, & 2<x \leqslant 5. \end{cases}$ 研究在$x=2$函数是否连续？

解 因为f的定义域D是闭区间$[-1,5]$，而$2 \in (-1,5)$，因此要研究f在$x=2$的双边连续性。根据定理2·3，$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ $\lim\limits_{x \to 2^-} x = 2 = f(2)$，函数在$x=2$点左连续。

现在再来研究$f(x)$在$x \to 2^+$时右极限是否存在。首先对$x>2$，$\dfrac{3(x^4-16)}{2(x^3-8)}=\dfrac{3(x+2)(x^2+4)}{2(x^2+2x+4)}$。应用极限定理，有

$$\lim_{x\to 2^+} 3(x+2)(x^2+4)=3\cdot 4\cdot(4+4)=96.$$

同理，$\lim\limits_{x\to 2^+} 2(x^2+2x+4)=2\cdot(4+4+4)=24.$

再应用商的极限及由$t\to\sqrt{t}$对$t>0$连续及复合函数的极限定理得到

$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{3(x^4-16)}{2(x^3-8)}}=\sqrt{\frac{96}{24}}=\sqrt{4}=2=f(2).$$

函数在$x=2$点左连续也右连续，所以f在$x=2$点连续。

习　　题

对习题1—12，讨论给定函数在给定点a是否连续．若f在a点不连续则进一步讨论是左不连续还是右不连续：

1．$f(x)=\begin{cases} x-4, & -1<x\leqslant 2 \\ x^2-6, & 2<x<5, \end{cases}$　　$a=2$；

2．$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^4-1} & 1<x<2 \\ x^2+3x-2 & 2\leqslant x<5 \end{cases}$　　$a=2$；

3．$f: x\to \dfrac{x}{|x|}$，　　$a=0$；

4．$f: x\to |x-1|$，　　$a=1$；

5. $f: x \to x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\qquad a=0$;

6. $f(x)=\left(\frac{x^2-27}{x^2+2x+1}\right)^{\frac{1}{3}}$, $\qquad a=3$;

7. $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{2x+5}{3x-2}\right)^{\frac{1}{2}} & -1<x<2 \\ 2x-1 & 2\leqslant x<4,\end{cases}$ $\qquad a=2$;

8. $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{2}} & 1<x<2 \\ \frac{x^2}{2} & 2\leqslant x<5,\end{cases}$ $\qquad a=2$;

9. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-8}{x^2-4} & x\neq 2 \\ 4 & x=2,\end{cases}$ $\qquad a=3$;

10. $f(x)=\begin{cases}x^2-9 & 2<x<3 \\ \frac{x^2-9}{x^2+1} & 3\leqslant x<4,\end{cases}$ $\qquad a=3$;

11. $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0,\end{cases}$ $\qquad a=0$;

12. $f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0, \end{cases}$　　$a=0$;

13. 设$f(x)=\text{tg}x, -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$, $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\pi$.研究

$$\lim_{x\to a^+} f[g(x)]$$

当$a=\dfrac{\pi}{4}, a=\dfrac{\pi}{2}, a=0$得出什么结论?

14.对左极限叙述并证明如定理2·4的相等函数的极限定理。

15.对右极限叙述并证明如定理2·5和的极限定理。

16.对右极限叙述并证明如定理2·10的两边夹定理。

§2·4　趋向无穷处的极限，无穷极限

研究函数$f: x\to\dfrac{x}{x+1}$　$x\neq-1$,它的图象如图2·5所示。

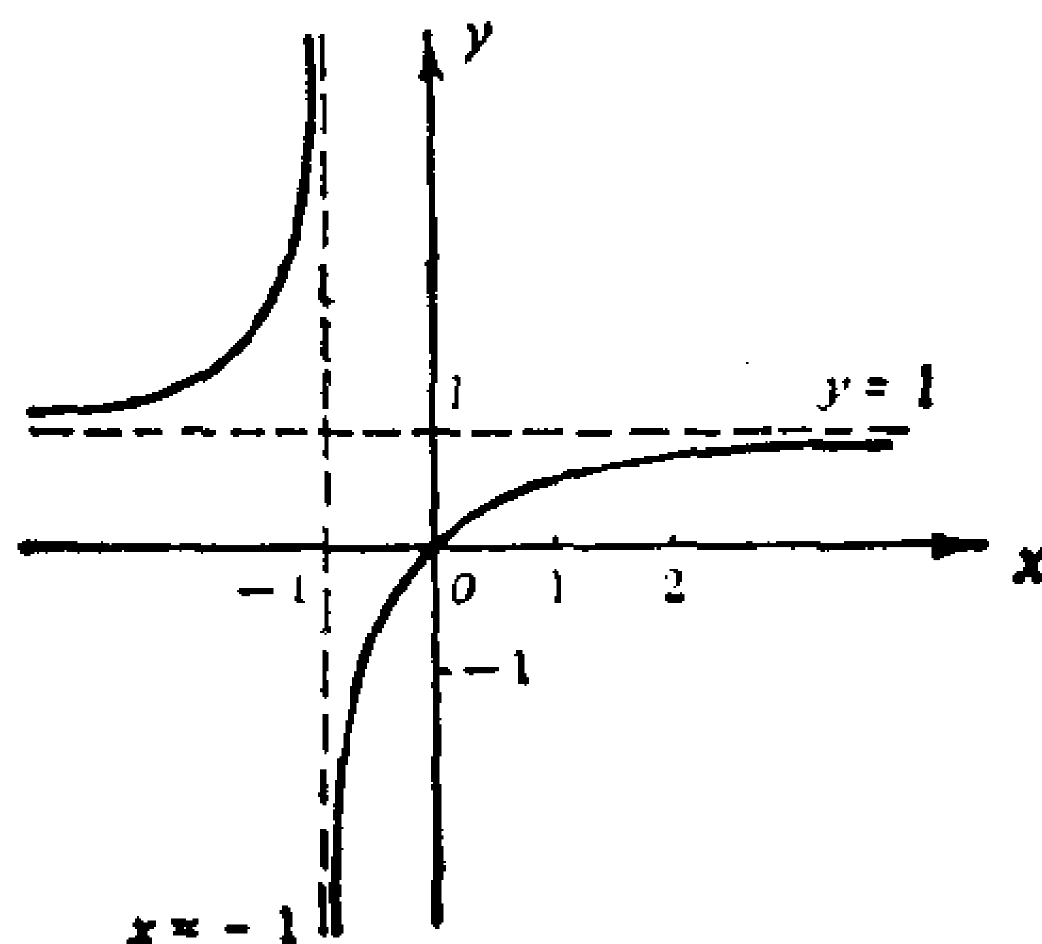


图　2·5

从图形上看出，当x递增通过正数无限增大或递减通过负数无限减小，$f(x)$随之趋向于1。

定义 如果x递增通过大于某数的所有实数，就称x趋向于正无穷，记为$x\to+\infty$；如果x递减通过小于某数的所有实数，就称x趋向于负无穷，记为$x\to-\infty$；如果$|x|\to+\infty$就称x趋向于无穷，记为$x\to\infty$。

定义 称当$x\to\infty$时$f(x)\to L$，当且仅当对每一$\varepsilon>0$，存在一$A>0$，使对f定义域中满足$|x|>A$的一切x，都有$|f(x)-L|<\varepsilon$，也记为$\lim_{x\to\infty}f(x)=L$。

称当$x\to+\infty$时 $f(x)\to L$，当且仅当对每一$\varepsilon>0$，存在一$A>0$，使对f定义域中满足$x>A$的一切x，都有$|f(x)-L|<\varepsilon$，也记为$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$。

称当$x\to-\infty$时，$f(x)\to L$，当且仅当对每一$\varepsilon>0$，存在$A>0$，使对f定义域中满足$x<-A$的一切x，有$|f(x)-L|<\varepsilon$，也记为$\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$。

§2·2内关于极限的许多定理，对x趋向于∞，趋向于$+\infty$或$-\infty$有类似的结果.其叙述和证明只需以$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$分别代替$x\to a$便得，只有定理2·3和定理2·7例外。定理2·3在$x\to\infty$时采取下列形式：

定理2·13（明显极限） 若$f(x)=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$，那么

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0,\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,\lim_{x\to-\infty}f(x)=0.$$

下一定理代替关于复合函数的定理2·7。

定理2·14（复合函数的极限） 设f，g为R_1到R_1的函

数。且f在L点连续，当$x\to+\infty$时$g(x)\to L$。那么

$$\lim_{x\to+\infty}f[g(x)]=f(L)。$$

注 (i) 定理2·14也可对$x\to-\infty$或$x\to\infty$来叙述.同样，§2·2内的每个定理都有分别相应于$x\to+\infty$，$x\to-\infty$和$x\to\infty$的定理. (ii) 定理2·13，2·14的证明可分别仿照定理2·3及定理2·7写出，我们把它们留给读者.

现在再来观察图2·5，当$x\to-1^-$，$f=\dfrac{x}{x+1}$无限递增；当$x\to-1^+$，f无限递减。我们说$x\to-1$时f趋向于无穷极限。精确地叙述为如下定义：

定义 函数f当$x\to a$时成为无穷大，当且仅当对每个数$A>0$，存在$\delta>0$，使f定义域内满足$0<|x-a|<\delta$的一切x，有 $|f(x)|>A$。记为$x\to a$，$f(x)\to\infty$，也表示为$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$。也称当$x\to a$时，$f$趋向于无穷极限。

把$x\to a$换成$x\to a^-(x\to a^+)$得到$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty(\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty)$的定义。

把$|f(x)|>A$换成$f(x)>A$或$f(x)<-A$便得

$$\lim_{x\to a}f(x)=+\infty\text{或}\lim_{x\to a}f(x)=-\infty\text{以及}\lim_{x\to a^-}f(x)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=-\infty;\ \lim_{x\to a^+}f(x)=+\infty,\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty\text{的定义。}$$

§2·2中的极限定理对无穷极限大都有类似的定理．但是，“∞”“$+\infty$”“$-\infty$”表示函数相应的状态，它们并不是数，数的通常代数运算法则对“无穷”不适用，因此关于无穷极限的定理条件与§2·2极限定理有所不同，要注意

下述定理中的新条件。

定理2·15（极限的唯一性） 设函数f当$x\to a$，$f(x)\to\infty$，那么当$x\to a$时f不能趋向于某一有限极限。

证明 用反证法。设$x\to a$时还有$f\to L$，L是一有限数，将导致矛盾。既然$f\to L$由定义取$\varepsilon=1$，存在$\delta>0$，使当f定义域内满足$0<|x-a|<\delta$的x，有$|f(x)-L|<1$，即$-1+L<f(x)<1+L$。由此对这样的x，

$$-1-|L|\leqslant -1+L<f(x)<1+L\leqslant 1+|L|$$

成立。从而导出$|f(x)|<1+|L|$。而由$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，对$A>1+|L|$存在比$\delta$小的$\delta_1>0$，使对$f$定义域中满足$0<|x-a|<\delta_1$的一切$x$，有$|f(x)|>A>1+|L|$。导致$1+|L|>1+|L|$的矛盾。

定理2·16（复合函数的极限） 设$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=L$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$，那么

$$\lim_{x\to a}f[g(x)]=L.$$

定理2·16的证明留给读者。定理中的∞可换成$+\infty$，$-\infty$，也可以a^-，a^+代替a，还可以把L换成∞，$+\infty$，$-\infty$。但是，所有这些定理都应保证复合函数$f[g(x)]$确有定义才行。例如下面定理：

定理2·17 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=a$，且设有一正数$M$，当$x<-M$时有$g(x)\neq a$，那么$\lim\limits_{x\to-\infty}f[g(x)]=\infty$。

注 如果有$g(x)=a$，$f[g(x)]$可能没有定义。例如$f(x)=\frac{1}{x}$，$g(x)=\frac{1}{x}\sin x$，$x\neq 0$。这里 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$。由于当

$x=-n\pi$ 时，$g(x)=0$ 使复合函数 $f[g(x)]=\frac{x}{\sin x}$ 没有定义，于是 $\lim\limits_{x\to-\infty} f[g(x)]=\infty$ 不成立！

例1 设 $f: x\to\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$，判断当 $x\to0$ 时，f 是否趋向于极限。

解 当 $x_n=\frac{1}{2n\pi}$, $f(x_n)=2n\pi$, $n=1,2,\cdots$；

当 $x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $f(x'_n)=0$，$n=1,2,\cdots$。因此当 $x\to0$，f 不存在极限（图2·6）。

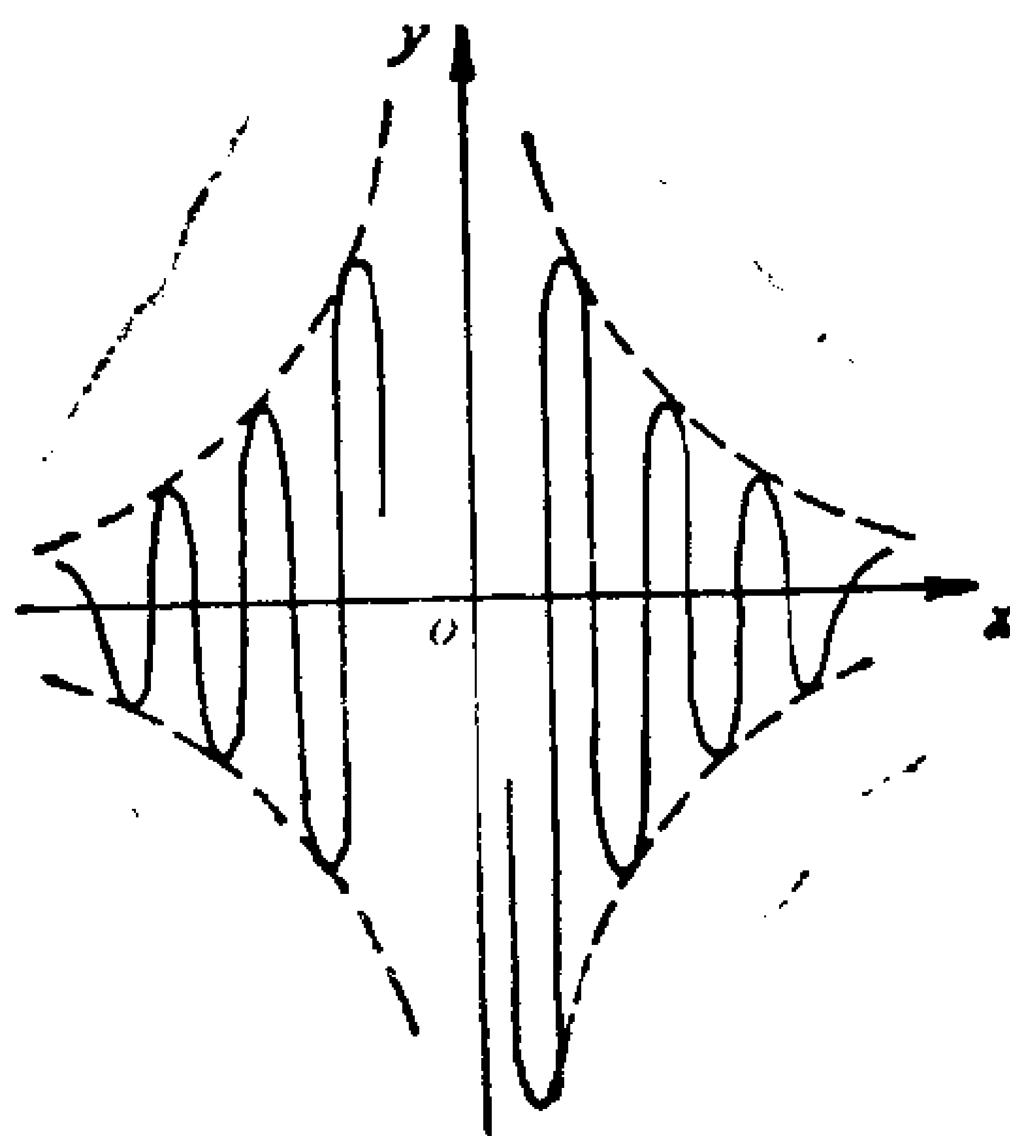


图 2·6

例2 设 $f: x\to\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2x+3}$，求 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$，要求叙述每一步骤的理由。

解 当$x<0$，将函数表示式的分子、分母同除以x得

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2x+3}=\frac{\sqrt{1+2\frac{1}{x}+4\frac{1}{x^2}}}{2+3\frac{1}{x}},$$

应用常量的极限、明显的极限及和、积的极限定理有

$$\lim_{x\to+\infty}[1+2\frac{1}{x}+4\frac{1}{x^2}]=\lim_{x\to+\infty}1+\lim_{x\to+\infty}2\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}4\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$$

$$=1+2\cdot 0+4\cdot 0=1.$$

同理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+3\frac{1}{x}\right)=2$．应用复合函数定理，求得

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+2\left(\frac{1}{x}\right)+4\left(\frac{1}{x^2}\right)}=\sqrt{1}=1$．最后由商的极限定理

便得：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\frac{1}{2}$.

当$x<0$，将函数表示式分子、分母同除以x得 $f(x)=$

$$\frac{\sqrt{x^2+2x+4}}{2x+3}=\frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}}\cdot\sqrt{x^2+2x+4}}{2+3\frac{1}{x}}=-\frac{\sqrt{1+2\frac{1}{x}+4\frac{1}{x^2}}}{2+3\frac{1}{x}}$$

如$x>0$时同样的讨论可得：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\frac{1}{2}$.

当函数有无穷极限或作分母的函数以零为极限时，和、积、商定理要特别补充条件才能成立。下面以商的极限定理为例说明之。

定理2·18 设$\lim_{x\to a}f(x)=L\quad(L\neq0)$，$\lim_{x\to a}g(x)=0$。当存在正数$\delta$，使$0<|x-a|<\delta$的$x$有$g(x)\neq0$，那么

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty.$$

证明留给读者。

注 (i) 为了$\frac{f}{g}$在$0<|x-a|<\delta$内有定义，定理中假定在a点邻近$g(x)\neq0$是不能少的. (ii) 数L换成∞定理也成立. 也可研究单边极限. 如果$f\to+\infty$，$g\to0^+$，有$\frac{f}{g}\to+\infty$.

对于两函数和的极限，若$\lim_{x\to a}f(x)=L$，$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$，那么$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=\infty$。当$f$，$g$都趋向无穷，不能冒然下结论，需进一步讨论$f(x)+g(x)$是否有极限以及极限是什么。这是因为“$\infty$”不能和数一样对待。但是可以有$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$，及$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$的“法则”；而$(+\infty)-(+\infty)$，$(-\infty)-(-\infty)$，$(+\infty)+(-\infty)$，$(\infty)\pm(\infty)$均无意义。

对于积的极限，若$\lim_{x\to a}f(x)=L$，$L\neq0$，$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$，有$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\infty$。但当$L=0$时，应进一步讨论$fg$才可能作出结论。

习　　题

习题1—10，求函数的极限或无穷极限。

1．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{x^3+4}$；

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+4}{x^2-2x+3}$；

3．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+6}{x^2+7}$；

4．$\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$；

5．$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-\sqrt{x^2-a^2})$；

6．$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$；

7．$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$；

8．$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^{\frac{3}{2}}}$；

9．$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{6-5x+x^2}}$；

10．$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)$

11．证明定理2·13。

12．证明定理2·14。

13．叙述并证明定理2·15以$x\to a^+$代替$x\to a$的定理。

14．证明定理2·17。

15．分别举出$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$，$g(x)\to-\infty$的f、g．使满足

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=+\infty$。

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=-\infty$。

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+g(x)]=A$，$A$为任给实数。

16.确定p的值，使下列极限存在：

$$(a)\lim_{x\to0^+}x^p\sin\frac{1}{x};\ (b)\lim_{x\to+\infty}x^p\sin\frac{1}{x};\ (c)\lim_{x\to-\infty}|x|^p\sin\frac{1}{x}.$$

17.证明定理2·18。

§2·5 序列的极限，连续性公理

无限序列是以自然数集为定义域的函数，它可以记为$\{x_n\}$，$n=1,2,\cdots$，简称为序列x_n。当n依次取自然数1，2，…变化，也记为 $n\to+\infty$，对n取自然数趋向于$+\infty$，习惯上省去正号记成$n\to\infty$.相应地，x_n在$n\to\infty$时可能趋向或不趋向于极限，当x_n趋向于极限时它也有§2·2中所述的极限定理.

定义 设序列$\{x_n\}$，当且仅当存在数L，对每一$\varepsilon>0$，存在一自然数N，使当$n>N$有

$$|x_n-L|<\varepsilon.$$

称$n\to\infty$时序列$\{x_n\}$趋向于极限L，记为$n\to\infty$，$x^n\to L$或$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$.类似地，当且仅当对每个$A>0$，存在自然数$N$，使当$n>N$有

$$|x_n|>A \quad (x_n>A\text{或}x_n<-A)$$

称$n\to\infty$时序列x_n趋向于无穷大（正无穷大，负无穷大），记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty(+\infty,-\infty)$.

读者可以叙述与证明关于序列的如§2·2中那样的极限

定理。作为例子，把明显极限定理及和的极限定理叙述如下。

定理2·19

(a) (明显极限) $n\to\infty$，$\frac{1}{n}\to 0$。

(b) (和的极限) 设$n\to\infty$时，$x_n\to a$，$y_n\to b$。那么

$$x_n+y_n\to a+b \quad (n\to\infty).$$

关于复合函数的定理2·7变形为

定理2·20 设f在a点连续，当$n\to\infty$，$x_n\to a$。那么存在一自然数N，使当$n>N$时，$f(x_n)$有定义，且$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$。

研究函数在其定义域内的特殊序列的状态，对于判断函数的性质有重要意义。

例 讨论函数$f: x\to\begin{cases}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 在$x=0$点是否存在极限？

解 选取序列 $x_n=\frac{1}{n\pi}$，$y_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$，$Z_n=\frac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}$，显然$x_n$，$y_n$，$z_n$当$n\to\infty$时都趋向于零，而

$$f(x_n)=n\pi\sin n\pi=0$$

$$f(y_n)=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

$$f(z_n)=\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi\sin\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi=-\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi.$$

当$n\to\infty$时　$f(x_n)\to 0$,　$f(y_n)\to+\infty$,　$f(z_n)\to-\infty$。据极限唯一性定理，断定$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在。

这一例子启发我们寻求函数极限与序列极限的关系。如下重要定理是定理2·20的推广。

定理2·20　函数$f(x)$在$x\to a$时，$f(x)\to L$，当且仅当对$0<|x-a|<k$（k是某一正数）中的任何一个趋向a的序列x_n（$x_n\neq a$），有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L.$$

证明（i）设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$.对每一$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$,使当

$$0<|x-a|<\delta,\ 有|f(x)-L|<\varepsilon.$$

现设$\{x_n\}$，$x_n\neq a$，当$n\to\infty$时$x_n\to a$。对上述$\delta>0$，存在N，使当$n>N$，有$0<|x_n-a|<\delta$.因而

$$|f(x_n)-L|<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=L$.

（ii）设对任何一$\{x_n\}$　$x_n\neq a, x_n\to a$　都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$

$=L$。假定$\lim_{x\to a}f(x)=L$不成立。那么存在某个正数ε_0，不论δ如何选取，在$0<|x-a|<\delta$中总有x_δ，使$|f(x_\delta)-L|\geqslant\varepsilon_0$。取$\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$。相应地$0<|x-a|<\delta_n$中有使$|f(x_n)-L|\geqslant\varepsilon_0$的$x_n$。显然序列$x_n\neq a$且$x_n\to a$。按所设条件$\lim_{x\to\infty}f(x_n)=L$，这便导致与$|f(x_n)-L|\geqslant\varepsilon_0$相矛盾。

现在按照序列极限的观点来完成实数公理系统的讨论。§1.1的十一条域公理再加上§1·3的序公理，还不是以实数系为唯一解释的公理系。例如有理数系也满足这十二条公理。这十二条公理的系还没有描述实数系不同于有理数系能够和直线上所有点一一对应的完备性质。例如数轴上原点之右到原点距离为单位正方形对角线长的点，其坐标是$\sqrt{2}$，便不是有理数。（参看本书附录2）这说明有理点不能布满数轴，即有理数系不完备。此外，还有一个困难：若序列x_n，对每一自然数n有$x_n>n$。按极限定理应当有$\lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$。但确有满足上述十二条公理的有序域，在这域中存在序列$x_n>n$，$x_n\to+\infty$却不成立（这样的例子见本节的习题8、9、10）。

如果在有序域的十二条公理系再加上下述连续性公理（总计十三条），那么实数系就是这一公理系的唯一的解释了*。

---

* 抽象地定义凡是满足所述的十三条公理的数系称为实数系$\boldsymbol{R}$. 实数系也被称为连续的有序域. 我们说公理系以实数系$\boldsymbol{R}_1$为唯一的解释的含义是：如果另有一数系$\mathfrak{X}$也满足这十三条公理，那么$\mathfrak{X}$与$\boldsymbol{R}_1$之间存在同构对应. 即存在$\mathfrak{X}$与$\boldsymbol{R}_1$之间的一一对应，在这对应之下，零元，单位元彼此对应，对应元素的和、积与元素的和、积相对应，递增有上界序列的极限与对应序列的极限相对应.

定理C（连续性公理） 如果序列$x_1, x_2, \cdots x_n, \cdots$，对每一$n$都满足(i) $x_{n+1} \geqslant x_n$； (ii) 存在数M，$x_n \leqslant M$，那么存在一个数$L \leqslant M$，$x_n \leqslant L$且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$。

公理C的直观形象如图2·7所示。在水平轴上表示x_n的

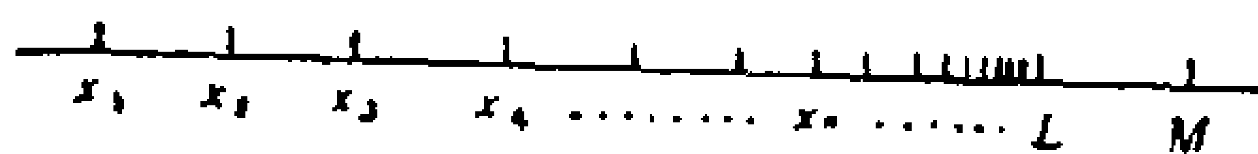


图 2·7

点随着n增大向右移动，但不能超过M，那么必定在某一不超过M的点L左边聚集于L。

根据公理C可以建立下面结果。

定理2·21

(a) 不存在大于一切自然数的实数。

(b) 若对每一n，$x_n > n$，那么$x_n \to +\infty$ ($n \to \infty$)。

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$。

证明 (a) 令$x_n = n$ ($n = 1, 2, \cdots$)，且设有实数M，$M \geqslant x_n$。按公理C，存在数$L \leqslant M$，使$x_n \leqslant L$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$。在极限定义中取$\varepsilon = 1$，那么存在自然数$N$，使当$n > N$有

$$L - 1 < x_n < L + 1.$$

但是$x_{N+1} = N + 1$，因而

$$L - 1 < N + 1 < L + 1.$$

因此$N + 2 = x_{N+2} > L$，这与对一切n，$x_n \leqslant L$矛盾。

(b) 设M是任意的正数。由(a)存在自然数N使$N \geqslant M$，当$n > N$，$x_n > N \geqslant M$即$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$。

(c) 设 ε 是任给的正数，存在自然数 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，那么当 $n>N$ 显然有 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

习　题

1．设函数 f：$x\to x\cos x$，

(a) 求一序列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\to+\infty$ 且 $f(x_n)\to 0$ $(n\to\infty)$．

(b) 求一序列 $\{y_n\}$ 使 $y_n\to+\infty$ 且 $f(y_n)\to+\infty$ $(n\to\infty)$．

(c) 求一序列 $\{z_n\}$ 使 $z_n\to+\infty$ 且 $f(z_n)\to-\infty$ $(n\to\infty)$．

2．证明定理2·20。

3．设对每一 n，$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且 $x_n\to L$，$z_n\to L$ $(n\to\infty)$，证明 $n\to\infty$，$y^n\to L$。

4．计算下列极限或判断 ∞，$+\infty$ 或 $-\infty$：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{n^2-3n+2}$；　　(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+4n-1}{2n^2+n+5}$；

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\frac{1}{n}}{2n^2-3n}$；　　(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+4n-1}}{\sqrt{n^2+4n-2}}$．

5．若 $a>1$，n 为自然数，证明 $a^n>1+n(a-1)$。

6．若$a>1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a^n=+\infty$。

7．若$|a|<1$，证明

（i） $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

（ii） $\lim\limits_{n\to\infty}b(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=\dfrac{b}{1-a}$。

〔提示：利用$1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}=\dfrac{1-a^n}{1-a}$。〕

*8．研究既约分式$\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$（$m$、$n$为非负整数）组成的集$Q$。若按通常分式相加、相乘定义加法与乘法，选$\dfrac{0}{1}$为“零”元，$\dfrac{1}{1}$为单位元。证明这一集合满足域公理。

*9．第8题中分式当$a_0>0$定义为正的。证明Q满足序公理I。即Q是有序域。

*10．按习题8、9，证明Q中存在“数”，即Q的元素大于任何自然数$\dfrac{n}{1}$。这样的有序域Q称为非阿基米德有序域。

11．证明不存在有理数，它的平方等于2。

〔提示：用反证法，设既约分数$\dfrac{p}{q}$，$\left(\dfrac{p}{q}\right)^2=2$，导出矛盾〕

*12．证明有理数系不满足公理C。

〔提示：找一有理数序列 $\{x_n\}$，$1 \leqslant x_n \leqslant 2$，$x_n \leqslant x_{n+1}$。并且满足 $2 - x_n^2 \leqslant \frac{1}{10^n}$，$x_n$ 不存在有理数的极限〕

13. 证明公理 C 可叙述为等价的形式：如果序列 $\{x_n\}$ 对每一 n 都满足 (i) $x_{n+1} \leqslant x_n$ (ii) 存在数 M，$x_n \geqslant M$，那么存在一数 $l \geqslant M$，$x_n \geqslant l$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = l$。

第三章　R_1上函数的基本性质

§3·1　介值定理

微积分中许多定理的证明，需要利用连续函数的基本性质。本节的介值定理就是证明微、积分中值定理和微积分基本定理所必须的。

定理3·1（闭区间套定理）　设闭区间序列

$$I_n=\{x: a_n\leqslant x\leqslant b_n\},\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

对$\forall n$（$\forall$表示"每一个"或"任意的"符号），$I_{n+1}\subset I_n$。如果$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，那么有且仅有一$x_0$属于每一$I_n$。

证明　由$\forall n$，$I_{n+1}\subset I_n$，有$a_n\leqslant a_{n+1}$及$b_{n+1}\leqslant b_n$。因此数列$\{a_n\}$不减且以b_1为上界；数列$\{b_n\}$不增且以a_1为下界（图3·1）。根据连续性公理c，存在数x_0及x_0'，满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x_0$，$a_n\leqslant x_0$及$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0'$，$b_n\geqslant x_0'$。再由$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，可得$x_0=x_0'$，所以

$$a_n\leqslant x_0\leqslant b_n\ （对\forall n成立）。$$

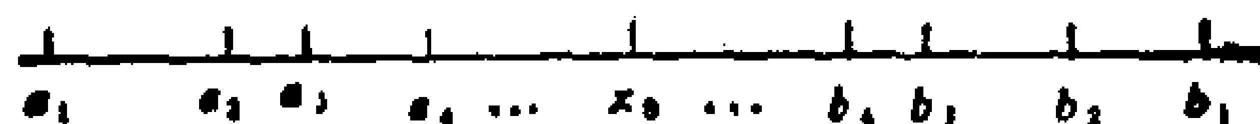


图　3·1

设还有一x_1也属于每一I_n且$x_1\neq x_0$。既然x_1，x_0同时

属于每一I_n，必定有 $|x_1-x_0|\leqslant b_n-a_n$ 对$\forall n$成立。于是

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)\geqslant|x_1-x_0|.$$

但由假设$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，$|x_1-x_0|>0$ 导致$0\geqslant|x_1-x_0|>0$的矛盾。于是证明了仅有一个x_0属于所有I_n。

注　定理假设区间为闭区间的条件是不可少的.例如半开区间序列$I_n=\{x:0<x\leqslant\frac{1}{n}\}$满足$I_{n+1}\subset I_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$的条件.$I_n$是套缩的，但它们没有公共点.事实上，设$I_n$有公共点$x_*$，一方面$x_*>0$；另一方面$x_*\leqslant\frac{1}{n}$对一切$n$成立，又有$x_*\leqslant0$，便导致矛盾.

现在建立本节的主要定理。

定理3·2（介值定理）　设函数f在$[a,b]$上连续，$c\in R_1$，$f(a)<c$，$f(b)>c$。那么至少存在一个x_0，$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=c$。

注　图3·2，说明使$f(x_*)=c$的x_*可以多于一个.

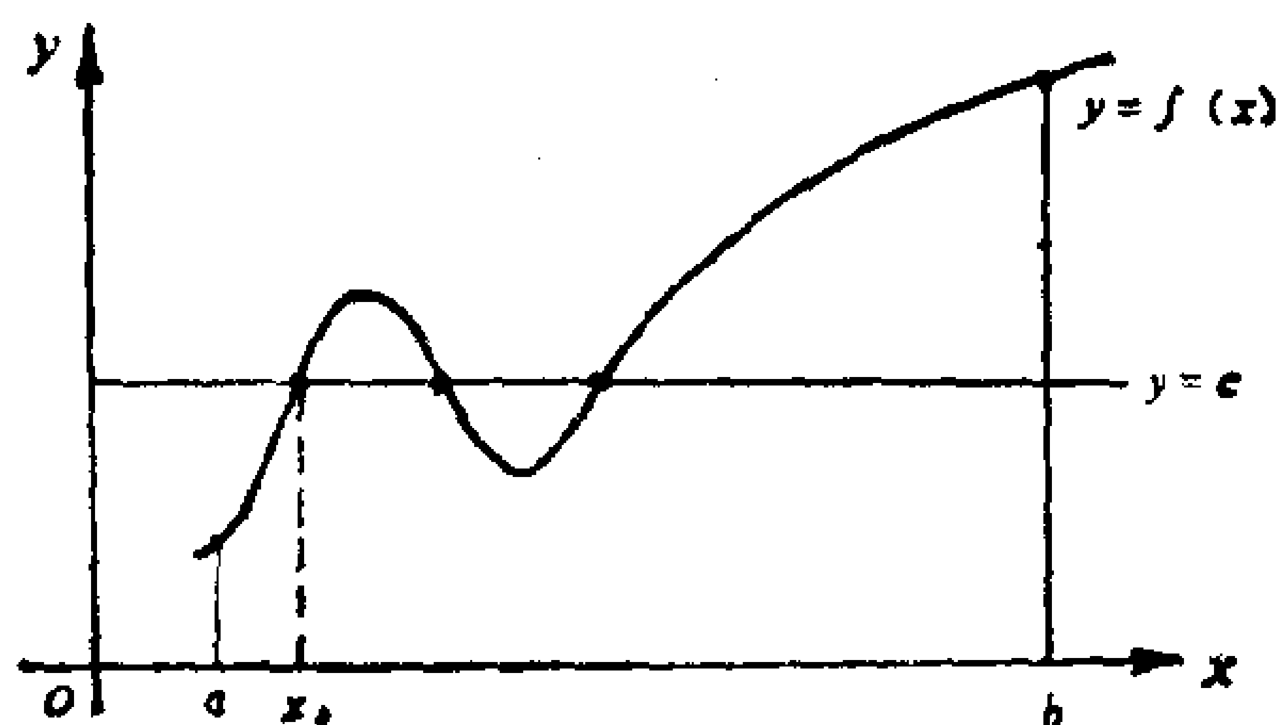


图　3·2

证明　令$a_1=a$，$b_1=b$.$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)$等于c、大于c或小于c三者有且仅有其一成立。若$f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)=c$，取$x_0=$

$\frac{a_1+b_1}{2}$定理成立。若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)>c$，令 $a_2=a_1$，

$b_2=\frac{a_1+b_2}{2}$。若 $f\left(\frac{a_1+b_1}{2}\right)<c$，令 $a_2=\frac{a_1+a_2}{2}$，$b_2=b_1$。

这样，$f(a_2)<c$，$f(b_2)>c$成立。再看$f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)$，

若 $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)=c$，取$x_0=\frac{a_2+b_2}{2}$定理成立。若 $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)$

$>c$，令$a_3=a_2$，$b_3=\frac{a_2+b_2}{2}$。若 $f\left(\frac{a_2+b_2}{2}\right)<c$，令

$a_3=\frac{a_2+b_2}{2}$，$b_3=b_2$。

继续这样做下去，或者在有限步求得x_0，或者得到闭区间序列$\{[a\ ,\ b\ ]\}$，后一区间是平分前一区间所得的两者之一的区间。我们有

$$b_n-a_n=2^{1-n}\ (b_1-a_1),$$

且对$\forall n$，有

$$f(a_n)<c,\ f(b_n)>c. \qquad (3\cdot1)$$

由闭区间套定理存在唯一x_0，对$\forall n$，$x_0\in[a_n,\ b_n]$且

$$\lim_{n\to\infty}a_n=x_0,\quad \lim_{n\to\infty}b_n=x_0$$

由定理2·20′及f的连续性

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=\lim_{n\to\infty}f(b_n)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

而由（3·1）及不等式的极限定理 $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \leqslant c$ 及 $\lim_{n\to\infty} f(b_n) \geqslant c$，得 $c \leqslant f(x_0) \leqslant c$，即 $f(x_0) = c$。

习　题

1．设函数 $f: x \to \begin{cases} 1, & x\text{为有理数;} \\ 0, & x\text{为无理数.} \end{cases}$

(a) 证明 f 在每一点 x_0 都不连续。

(b) 设 $g(x)$ 是 R_1 上连续函数，当 x 为有理数时 $g(x) = 1$。证明 $g(x) \equiv 1$ $(\forall x \in R_1)$。

2．设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，$a_m \neq 0$，$m$ 为奇自然数。

(a) 用介值定理证明方程 $f(x) = 0$ 至少有一个根。

(b) 证明 f 的值域是 R_1。

3．设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是偶次多项式。且 $a_m a_0 < 0$。证明方程 $f(x) = 0$ 至少有两个实根。

*4．函数称为递增的 $\Longleftrightarrow$ 若 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$。设 f 是 $[a, b]$ 上的递增函数，f 具有介值性即介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的 $\forall c$，有 $x_0 \in [a,b]$ 使 $f(x_0) = c$。证明 f 是 $[a, b]$ 上连续函数。

§3·2　最小上界，最大下界

本节证明有关实数系的一个与公理c相等价的基本原理。

定义　实数集 S 上界 $M \Longleftrightarrow \forall x \in S$，$x \leqslant M$；也称集 S 以

M为上界。集S有下界$m \Longleftrightarrow \forall x \in S$，$x \geqslant m$；也称集$S$以$m$为下界。集S是有界的$\Longleftrightarrow$S既有上界又有下界。

设D是函数f的定义域，$S \subset D$，我们用$f_{|S}$表示f限制于集S上的函数，即$f_{|S}$的定义域是S，对$x \in S$，$f_{|S}(x) = f(x)$。

由上述定义立即导出

定理3·3 集$S \subset R_1$是有界的$\Longleftrightarrow \exists$数$K$，$\forall x \in S$，$|x| \leqslant K$。函数$f$在$S$上有上界$M \Longleftrightarrow \forall x \in S$，$f(x) \leqslant M$；函数$f$在$S$上有下界$m \Longleftrightarrow \forall x \in S$，$f(x) \geqslant m$。函数$f$在$S$上有界$\Longleftrightarrow \exists K > 0$，$\forall x \in S$，$|f(x)| \leqslant K$。

例如，$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x}, & 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 在$S = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$上无界（图3·3）。

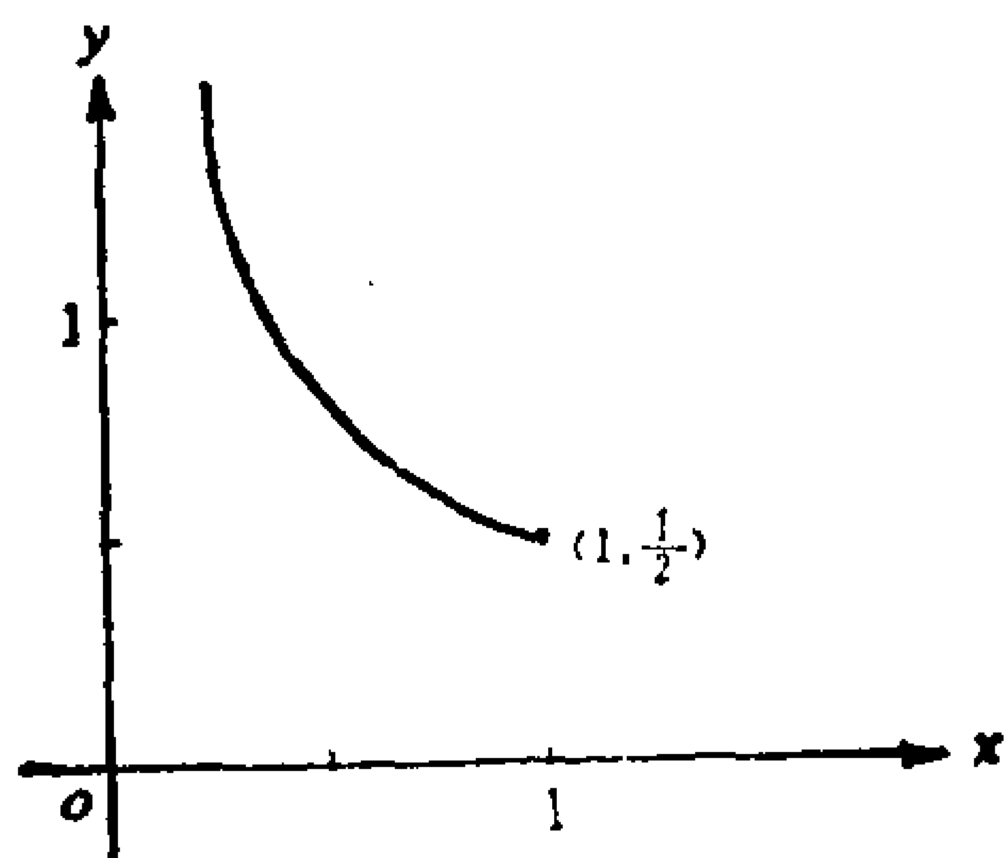


图 3·3

现在来证基本原理。

定理3·4 若R_1的子集S非空且有上界M，那么S有最小上界U（即U是S的这样一个上界：当$U' < U$时，U'不能是S的上界）。若集S非空且有下界m，那么S有最大下界L（即L

是S的这样的下界；当$L'>L$，L'不能是S的下界）。

证明　定理关于最大下界的论断可对集$\{x: -x\in S\}$应用最小上界的论断得到。因此，我们仅需证明有上界M的集S存在最小上界U。

如果上界$M\in S$，取$U=M$。这时，若$U'<U$，由$U\in S$，U'不能是S的上界。$U=M$便是S的最小上界。

如果$M\overline{\in}S$．设$b_1=M$，取$a_1\in S$．现在看$\frac{a_1+b_1}{2}$．（i）

若$\frac{a_1+b_1}{2}$是上界且$\frac{a_1+b_1}{2}\in S$，取$U=\frac{a_1+b_1}{2}$即可．（ii）

若$\frac{a_1+b_1}{2}$是上界不属于S，令$a_2=a_1$，$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$．（iii）若

$\frac{a_1+b_1}{2}$不是S的上界，令$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$，$b_2=b_1$．继续这一作法，或者在有限步（i）的情况出现，或者得到闭区间序列$\{[a_n, b_n]\}$，对$\forall n$，有

$$[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n]\text{及}$$

$$b_{n+1}-a_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(b_n-a_n) \tag{3·2}$$

因此对$\forall n$，$\forall x\in S$，

$$b_n-a_n\leqslant 2^{1-n}\ (b_1-a_1)\ ,\ a_n\in S,\ b_n>x. \tag{3·3}$$

由闭区间套定理3·1，$\exists$唯一的U属于这所有的区间，且

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}a_n=U\ .$$

由（3·3）对$\forall n$，$\forall x \in S$，$b_n > x$。由不等式极限定理，有$x \leqslant U$，即U为S的上界。若$U' < U$，令$\varepsilon = U - U' > 0$，那么因为$n \to \infty$，$a_n \to U$，$a_n \leqslant U$，$\exists N$，使$n > N \Longrightarrow U' = U - \varepsilon < a_n \leqslant U$。但$a_n \in S$，$U'$不能是$S$的上界。所以$U$是$S$的最小上界（图3·4）。

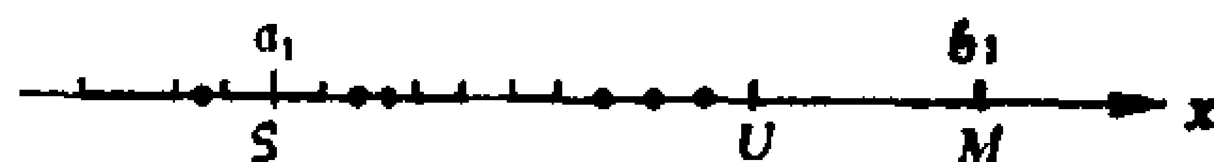


图 3.4

定义 定理3·4中S的最小上界U也称为S的上确界，表示为l·u·bS或sup$S$。

定理3·4中S的最大下界L也称为S的下确界，表示为g·l·b·S或inf$S$。

若用$D(f)$，$R(f)$分别表示R_1上函数f的定义域，值域，$S \subset D(f)$，我们定义f在S上的上、下确界分别为

$$\mathop{\mathrm{l\cdot u\cdot b}\cdot f}_{S} = \sup_{S} f = \sup R(f|_S).$$

$$\mathop{\mathrm{g\cdot l\cdot b}\cdot f}_{S} = \inf_{S} f = \inf R(f|_S).$$

推论 若S含有最大数，即$\exists x_0 \in S$，对$\forall x \in S$有$x_0 \geqslant x$，那么$x_0 = \sup S$。若S不空，$U = \sup S$，$U \overline{\in} S$。那么$\exists$序列$\{x_n\} \subset S$，$x_n \to U$ $(n \to \infty)$。也即$\forall \varepsilon > 0$，$\exists x \in S$，$x > U - \varepsilon$。相应的结果对inf$S$也成立。

推论从定义及定理3·4的证明中得出。

借助于这一推论可以证明连续性公理c。即在有序域公理系前提下，连续性公理c与定理3·4彼此等价。证明作为习题留给读者。

定义 以$D(f)$表示f的定义域，称函数f在区间$I \subset D(f)$

上递增$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
f在I上不减$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$。
f在I上递减$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
f在I上不增$\Longleftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
上述四种函数统称为单调函数。

单调函数不必是连续函数，例如阶梯函数

$$f: x \longrightarrow n, \quad n-1 \leqslant x < n$$
$$n = 1, 2, \cdots.$$

其图象如图3·5所示。单调函数可以是无界的。例如$f: x \to \dfrac{1}{1-x}$，在$I = \{x: 0 \leqslant x < 1\}$上单调且无界。

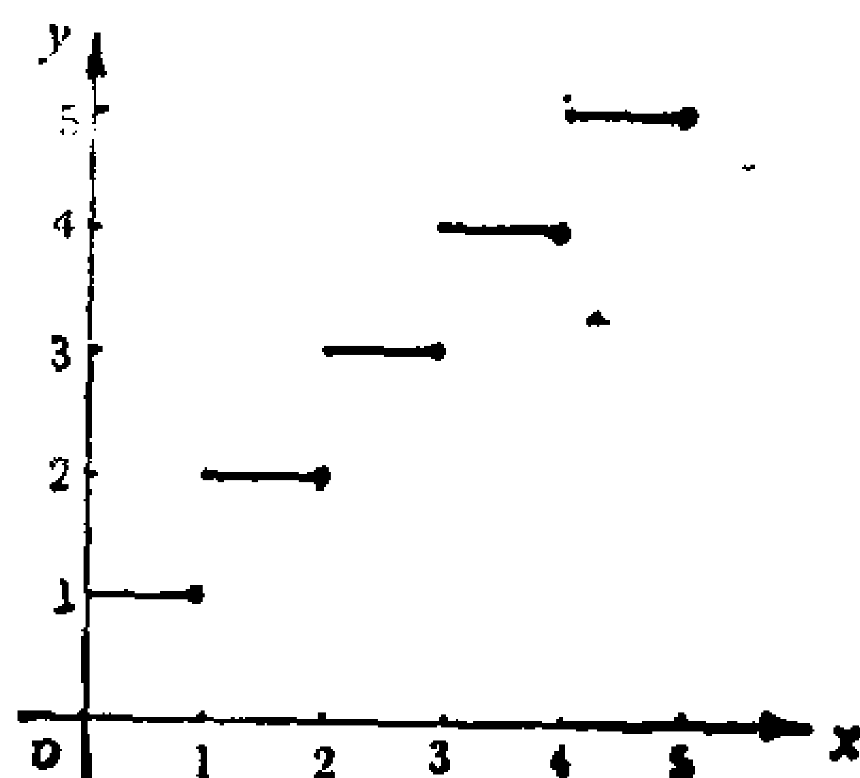


图 3·5

下面关于单调函数单边极限存在性定理容易从定义及定理3·4导出。它的证明留给读者。

定理3·5 设f是区间I上单调且有界的函数。那么f在I的每一点单边极限存在。如果I是无限区间，那么当x在相应方向趋向无穷时f的极限存在。

容易直观地想象到在区间上单增、连续函数f的值域$R(f)$是一个区间。其实不必单调，凡连续函数它的值域$R(f)$必是区间。为了证明这一定理3·7，先来证明关于区间特征的定理。

定理3·6 集$S \subset \mathrm{R}_1$是区间$\Longleftrightarrow$ (i) $\exists x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2$, (ii) 对$\forall x_1, x_2 \in S, x_1 < x_2 \Longrightarrow [x_1, x_2] \subset S$.

证明 若S是一区间，虽然S具有性质 (i) 与 (ii)。

其逆，可分几种情况研究。

情况1：S有界。令$a=\inf S$，$b=\sup S$。设$x\in(a,b)$证明$x\in S$。

因为$a=\inf S$及$a<x$，据定理3·4推论，断定$\exists x_1\in S$，$x_1<x$。而由$b=\sup S$及$x<b$，同理$\exists x_2\in S$，$x_2>x$。由(ii) $[x_1, x_2]\subset S$。而$x\in[x_1, x_2]$，所以$x\in S$。于是$(a, b)\subset S$。这样一来，S或为(a, b)或为以a，b为端点的闭区间、半开区间。

情况2：S无界。不妨设S有下界无上界，令$a=\inf S$，那么$S\subset[a, \infty)$。设$x>a$，我们来证明$x\in S$。按情况1的同样理由，$\exists x_1\in S$，$x_1<x$。因为S无上界，$\exists x_2\in S$，$x_2>x$。由(ii) $x\in(x_1, x_2)\subset S$。于是得到$S=[a, \infty)$或$S=(a, \infty)$。

当S无下界有上界或无下界也无上界时，类似可证S是$[-\infty, b]$或$(-\infty, b)$及$S=(-\infty, \infty)$。其证明请读者完成。

现在来证明改进了的介值定理。

定理3·7 设f是定义在区间I上的不恒等于常数的连续函数，那么$J=R(f)$是一区间。

证明 证明J具有区间的特征即定理3·6的(i)及(ii)的性质。

由f在I上不恒为常数，那么J至少含有两个点，性质(i)成立。现设$y_1<y_2$且y_1，$y_2\in J$，$\Longrightarrow\exists x_1$，$x_2\in I$，$f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$，不妨认为$x_1<x_2$。由$f$在$[x_1, x_2]$上连续，可以应用介值定理：对$\forall c\in[y_1, y_2]$，$\forall x_0\in[x_1, x_2]$使$f(x_0)=c$。于是$c\in J$，即$J$具有性质(ii)。

注 定理3·7中，当$I=[a,\ b]$，J不必是$f(a)$，$f(b)$所决定的区间．图3·6所示$[f(a),\ f(b)]$是J的真子区间，$[f(a),\ f(b)]$包含在J内但不等于J．注意I有界J无界，I无界J有界的情况都可能出现．例如$f: x\to \frac{1}{x}$，$I=\{x:\ 0<x<1\}$其$J=(1,+\infty)$．$f: x\to \frac{1}{1+x^2}$，$I=\{x:\ -\infty\leqslant x\leqslant+\infty\}$其$J=(0,\ 1]$．

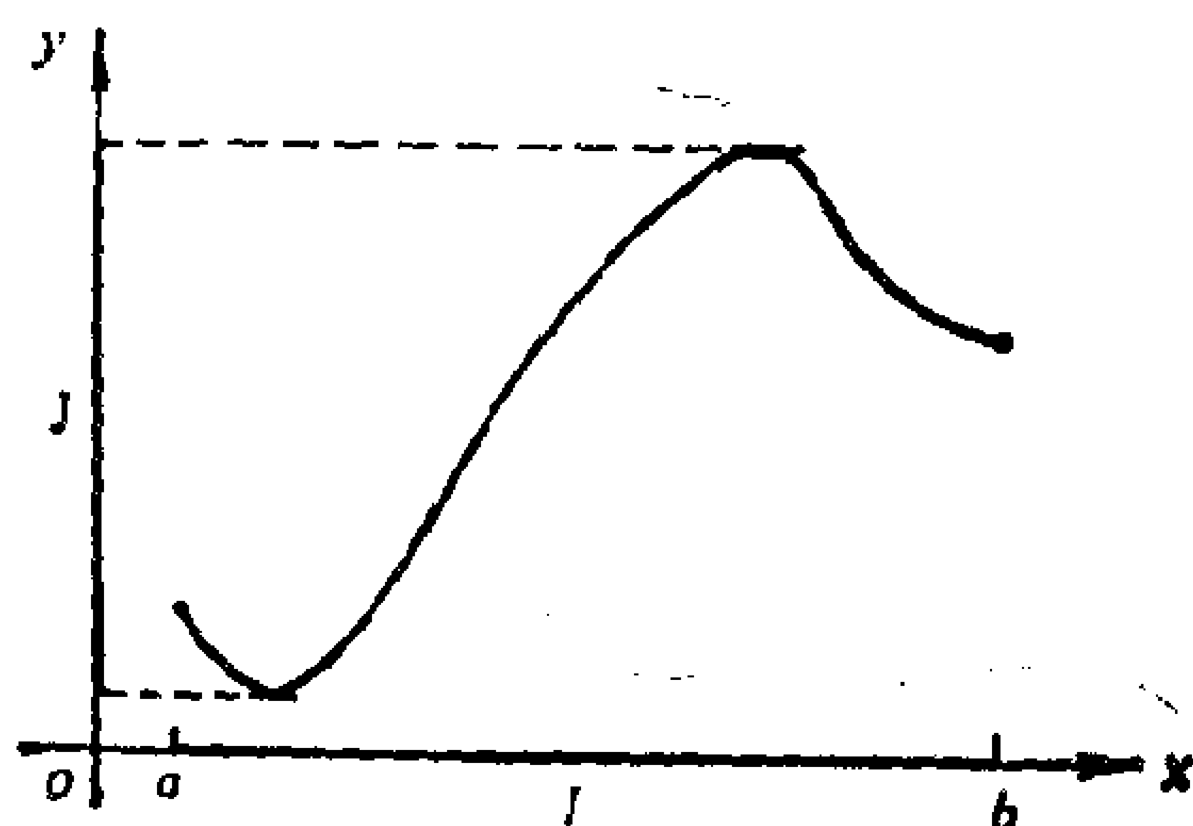


图 3·6

于$[0,\ \infty)$上研究函数$f: x\to x^n$（n为自然数）．因为$f(0)=0$，$f(x)$递增，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，由定理3.7，$f$的值域为$[0,\ \infty)$．因此$\forall x\geqslant 0$，$\exists$数$y\geqslant 0$使$y^n=x$．当$y'>y\Longrightarrow y'^n>y^n=x$；当$y'\geqslant 0$且$y'<y\Longrightarrow(y')^n<y^n=x$．因此$y^n=x$的解$y$是唯一的．把$y^n=x$的解$y$记为$x^{\frac{1}{n}}$，函数$x\longrightarrow x^{\frac{1}{n}}$，$x\in[0,\ \infty)$．按第二章的方法可以证明它是连续的（也可参看定理4·17）．

习　题

习题1—8求l·u·b·S与g·l·b·S，并指出它们是否属于S．

1．$S=\{x;\ 0<x\leqslant 3\}$　　　　2．$S=\{x:\ x^2-3<0\}$

3. $S=\{x: x^2-2x-3<0\}$　4. $S=\{y: y=\frac{x}{x+1}, x\geqslant 0\}$

5. $S=\{S_n: S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}, n=1, 2, \cdots\}$

6. $S=\{S_n: S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}, n=1, 2, \cdots\}$

7. $S=\{x: 0<x<5, \cos x=0\}$

8. $S=\{x: |x|<10, \sin x=\frac{1}{2}\}$

9. 设$S=\left\{S_n: S_n=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}, n=1, 2, \cdots\right\}$，证明 3 是$S$的一个上界数。

10. 设$S_1\subset S_2$，证明$\inf S_2\leqslant\inf S_1$，$\sup S_1\leqslant\sup S_2$。

*11. 设S_1，S_2，$\cdots S_n\cdots$为给定的集。定义$B_i=\sup S_i$，$b_i=\inf S_i$

(a) 证明若$S=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$，那么

$$\sup S=\max(B_1, B_2, \cdots B_n),$$
$$\inf S=\min(b_1, b_2, \cdots, b_n).$$

(b) 若S是无限个集S_i的并$S=\bigcup_{i=1}^{\infty}S_i$，确定$\sup S$与$\{B_i\}$，$\inf S$与$\{b_i\}$之间的关系。

(c) 若$S=S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_n$，且$S\neq\varphi$求以$\{b_i\}$，$\{B_i\}$表示$\sup S$，$\inf S$的公式。

12. 用定理3·4的推论证明连续性公理c〔提示：设 $B=\sup\{x_n\}$，证明当$n\to\infty$，$x_n\to B$.〕

13. 证明定理3·5。

14. 证明定理3·6中当S无上界也无下界时，$S=(-\infty,\infty)$。

15. 设给定集$S_1\subset R_1$，$S_2\subset R_1$.定义$S=\{x: x=x_1+x_2, x_1\in S_1, x_2\in S_2\}$，用$\sup S_i$，$\inf S_i$ $(i=1, 2)$表示$\sup S$及$\inf S$. 若$-S_1=\{x: -x\in S_1\}$，证明$\sup(-S_1)=\inf S_1$。

*16. 设S是两两最多有一公共点的有限个闭区间 I_1，I_2，$\cdots I_n$的并集.设f定义域是S且在每一I_j上是单调的.证明定理3·5对函数f成立.举例说明S为无限多个闭区间的并时，S无界或S有界，定理3·5的结果都可能不成立。

§3·3 波尔查诺—外尔斯特拉斯定理

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ (3·4)

是实数序列。$x_1, x_3, x_5, \cdots$及$x_2, x_5, x_8, x_{11}, \cdots$都是序列（3·4）的子序列。一般地，若$k_1, k_2, k_3, \cdots$是自然数的递增序列，称

$$x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_n}, \cdots$$

为（3·4）的子序列。记$y_1=x_{k_1}$，$y_2=x_{k_2}$，$\cdots$，$y_n=x_{k_n}$，$\cdots$，就可以避免双重下标，$y_1, y_2, \cdots, y_n\cdots$是（3·4）的子列。

当序列（3·4）有极限L,我们也说序列$\{x_n\}$收敛于L。很明显，序列（3·4）收敛，它的任何一个子序列收敛于同一极限。在分析中常常遇到从给定序列中挑收敛的子序列的

问题。例如序列

$$x_1 = 0, \ x_2 = \frac{1}{2}, \ x_3 = -\frac{2}{3}, \ \cdots, \ x_n = (-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right), \ \cdots\cdots \tag{3·5}$$

的子序列

$$0, \ -\frac{2}{3}, \ -\frac{4}{5}, \ -\frac{6}{7}, \ \cdots, \ -\frac{2k}{2k+1}, \ \cdots,$$

$$\frac{1}{2}, \ \frac{3}{4}, \ \frac{5}{6}, \ \frac{7}{8}, \ \cdots, \ \frac{2k-1}{2k}, \ \cdots$$

是分别取（3·5）的奇数项及偶数项得到的。它们分别收敛于-1，1，但原序列（3·5）不收敛。给出一序列存在收敛子序列的条件的一个基本定理是本节的波尔查诺—外尔斯特拉斯定理。这一定理是我们证明连续函数重要性质定理等许多定理的工具，并且从中发展出第六章距离空间中的列紧性概念。

定理3·8（波尔查诺—外尔斯特拉斯定理） 有界的实数序列 $\{x_n\}$ 包含有收敛子序列。

证明 用闭区间套定理从有界序列 $\{x_n\}$ 中挑出一收敛子序列。不妨认为 $\{x_n\}$ 含有无多个点。

$\{x_n\}$ 是有界的，$\exists$ 闭区间 $I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 包含 $\{x_n\}$ 的所有点。以 $\frac{a+b}{2}$ 分 I 为等长的两闭子区间。至少有其中之一含有 $\{x_n\}$ 的无限多个点。以 $I_1=\{x: a_1\leqslant x\leqslant b_1\}$ 表示这一子区间，并从 I_1 所含有的 $\{x_n\}$ 的无限多个点

中选取一个x_{n_1}，记为$y_1 = x_{n_1}$，再以I_1的中点$\frac{a_1+b_1}{2}$分I_1为等长的两闭子区间。与前同样，至少其中一个区间含有$\{x_n\}$的无限多个点，以$I_2 = \{x: a_2 \leqslant x \leqslant b_2\}$表示这一子区间，因$I_2$含有$\{x_n\}$的无限多个点，能从中选取一$x_{n_2}$，$n_2 > n_1$，记为$y_2 = x_{n_2}$．继续作下去得闭区间序列

$$I_k = \{x: a_k \leqslant x \leqslant b_k\}, \quad k = 2, 3, \cdots, n\cdots,$$

及$\{x_n\}$的子列$y_k = x_{n_k} \in I_k$，$n_{k-1} < n_k$

I_k具有性质：I_k包含$\{x_n\}$的无限多个点，且$I_{k-1} \subset I_k$，

$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b-a) \to 0 \ (k \to \infty)$．据闭区间套定理∃唯一的$x_0 \in I_k$，$k = 1, 2, \cdots, n\cdots$。

现在证明$\lim\limits_{k\to\infty} y_k = x_0$．事实上由

$$a_k \leqslant y_k \leqslant b_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n\cdots,$$

而$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = x_0$，由两边夹定理（定理2.10）得

$$\lim_{k\to\infty} y_k = x_0 \in I.$$

注　由定理的证明可知，当$\{x_n\}\subset$闭区间I，则收敛的子列的极限$x_0 \in I$.

习　题

习题1—7确定所给序列是否收敛。在序列不收敛的情况时，至少挑出它的一个收敛的子序列。

1．$x_n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n}\right)$．　　2．$x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$．

3. $x_n=(-1)^n(2-2^{-n})$.　　4. $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{2_i}$

5. $x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i!}$.　　6. $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}+\cos n\pi$.

7. $x_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{n\pi}{3}$.

8. 设 $\{x_n\}$ 收敛于L，证明 $\{x_n\}$ 的每个子序列 $\{y_n\}$ 都收敛于L。

9. (a) N是一自然数，写出一序列使它含有分别收敛于N个不同数的N个收敛子列。

* (b) 写出一个序列，它有分别收敛于无限多个不同的数的子序列。〔提示：例如序列 $1\frac{1}{2}$，$2\frac{1}{2}$，$3\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{4}$，$2\frac{1}{4}$，$3\frac{1}{4}$，… $1\frac{1}{2^n}$，$2\frac{1}{2^n}$，$3\frac{1}{2^n}$… 有分别收敛于1,2，3的子序列〕

§3·4　有界性及极值性定理

本节建立闭区间上连续函数的值域有界且包含它的上、下确界的定理。这两个定理不仅对证明微分学各基本定理是不可缺少的，其重要意义还在于它被推广为一般形式之后（见第六章），在很多分析分支当中被应用。

定理3·9（有界性定理） 设f的定义域是闭区间$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，$f$在$I$上连续，那么$f$的值域是有界的。

证明 若不然，f的值域无界将导致矛盾。当值域无界，对$\forall$自然数n，$\exists x_n\in I$，使$|f(x_n)|>n$。而$\{x_n\}$是有界序列。据波尔查诺—外尔斯特拉斯定理$\{x_n\}$有一收敛子序列y_1，y_2，…，y_n，…，（$y_n=x_{k_n}$）$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$．因为$I$是闭区间，$x_0\in I$。由$f$在$I$上连续当然在$x_0$点连续，由连续性及定理2·20。有

$$\lim_{n\to\infty}f(y_n)=f(x_0).$$

这与$|f(y_n)|=|f(x_{k_n})|>k_n\geqslant n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ 矛盾。

注 定理3·9中，假设f定义域为闭的是不可缺少的条件．例如函数$f:x\to\frac{1}{1-x}$在半开区间$I=\{x:0\leqslant x<1\}$上连续，但f在I上无界．

定理3·10（极值性定理） 设f的定义域为闭区间$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，$f$在$I$上连续，那么$\exists x_0,x_1\in I$，使对$\forall x\in I$，有$f(x_0)\leqslant f(x)\leqslant f(x_1)$．即$f$在$I$上取到它的最小值及最大值。

证明 由定理3·9，f的值域$R(f)$是有界集．定义

$$M=\sup_{x\in I}f(x),\quad m=\inf_{x\in I}f(x).$$

要证明$\exists x_0$，$x_1\in I$，使$f(x_0)=m$，$f(x_1)=M$。我们仅证明$\exists x_1$，x_0的存在性证明是类似的。

假定$M\overline{\in}R(f)$定义函数F

$$F:x\longrightarrow\frac{1}{M-f(x)}.$$

因为$M-f(x)>0$对$\forall x\in I$成立。所以F为在I上有定义的

正值连续函数。据定理3·9。$R(F)$有界。定义$\overline{M}\ \sup_{x\in I}F(x)$，那么$\overline{M}>0$且对$x\in I$，有

$$0<\frac{1}{M-f(x)}\leqslant\overline{M}\text{即}f(x)\leqslant M-\frac{1}{\overline{M}}.$$

但$f(x)\leqslant M-\frac{1}{\overline{M}}$与$M=\sup_{x\in I}f(x)$相矛盾。因此$M\in R(f)$。

注　定理3·10之I不设为闭区间，定理结论不真．例如f：$x\to x^2$在半开区间$I=\{x：0\leqslant x<1\}$上连续在I上不能取到最大值，其值域是〔0，1）不包含上确界1．此外，定理3·10肯定x_0，x_1分别至少存在一个，可能出现若干最大值或最小值点的情况．例如f：$x\to\sin4\pi x$在$I=\{x：0\leqslant x\leqslant1\}$上的$x_1=\frac{1}{8}$，$x'=\frac{5}{8}$都取到最大值1．

§3·5　一致连续性

函数于点x_0连续性的定义里，对每一预先给定的正数ε能找到相应的正数δ（§2·1）。这里δ当然依赖于ε，同时也依赖于x_0的选取。当对定义域的所有x点能有同一个δ的情况出现时，我们说f具有一致连续性。

定义　函数f在定义域S上一致连续$\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$相应的$\delta>0$，使当x_1，$x_2\in S$且$|x_1-x_2|<\delta$时$\Longrightarrow$ $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

一致连续性的重要条件是指出对S中所有x_1，x_2有同样的δ。

连续函数在闭区间上一致连续的性质在证明积分学的基

本定理中起重要作用。第六章中它的一般化定理在分析中同样也有很多应用。

在S上连续的函数可能不一致连续。例如

$$f: x \to \frac{1}{x},\quad x \in S = \{x: 0 < x \leqslant 1\}.$$

显然f在S上连续。对给定$\varepsilon > 0$。如取$\varepsilon = 1$。找不到使$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$，对一切$x_1$，$x_2$成立的$\delta$。如图3·7所示，当$x_1$，$x_2$越接近0点，函数变化越“陡”，要求$\delta$越小。以致没有一致适用的正数$\delta$。事实上，取

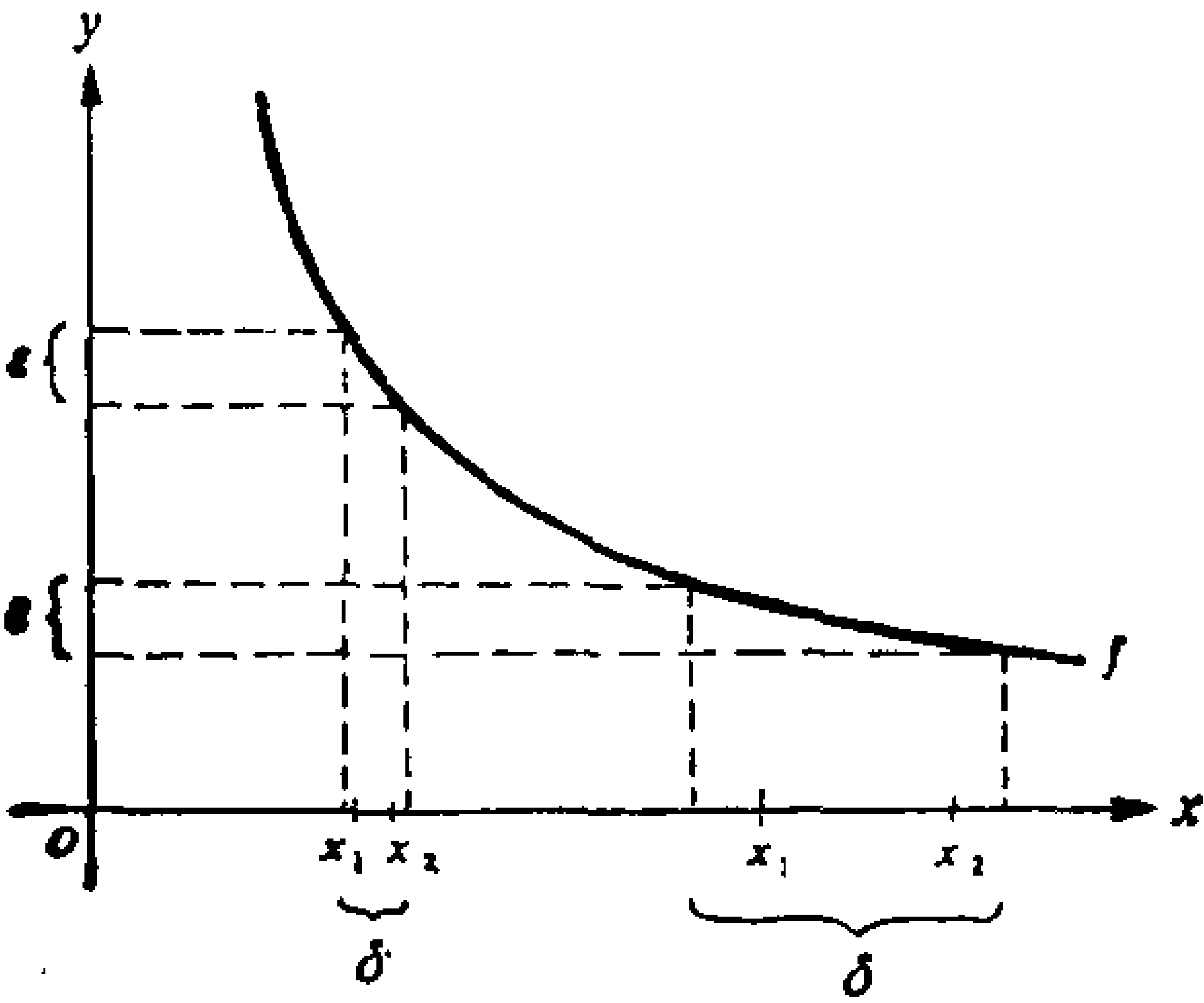


图 3·7

$x_1 = \dfrac{1}{n}$，$x_2 = \dfrac{1}{n+1}$，这时$|f(x_1) - f(x_2)| = 1$，而$|x_1 - x_2|$

$= \dfrac{1}{n(n+1)}$。不论取定$\delta > 0$如何小，当n足够大，可使

$|x_1 - x_2| = \dfrac{1}{n(n+1)} < \delta$，而$|f(x_1) - f(x_2)| = 1$并不小于1。

在集S上一致连续的例子如：

$$f: x \to x^2,\quad S = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}. \tag{3·6}$$

设$\varepsilon > 0$，要求一$\delta > 0$，使当$|x_1 - x_2| < \delta$有$|x_1^2 - x_2^2| < \varepsilon$，对$S$内一切这样的$x_1$，$x_2$成立。为此取$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$。注意到$x_1$，$x_2$是小于1的正数，那么

$$|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

这一不等式对〔0，1〕中一切满足$|x_1 - x_2| < \delta$的x_1，x_2成立。

定理3·11（一致连续性定理） 设函数f在闭区间$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上连续，那么$f$在$I$上一致连续。

证明 假定f在I上不一致连续将导致矛盾。设f在I上不一致连续。$\exists \varepsilon_0 > 0$，对它不存在$\delta > 0$，具有性质：当$|x_1 - x_2| < \delta$有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon_0$，对$I$内一切这样的$x_1$，$x_2$成立。也即不论$\delta$如何小，如取$\delta = \frac{1}{n}$，也能找到$x_n'$，$x_n'' \in I$，满足

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \text{且} |f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0 \tag{3·7}$$

按波尔查诺—外尔斯特拉斯定理，有界点列$\{x'_n\}$有收敛子列$\{x_{k_n}'\}$，$\{x_{k_n}'\}$收敛于某一x_0。由I是闭的，$x_0 \in I$。

那么，由$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}$，导出$|x_{k_n}' - x_{k_n}''| < \frac{1}{k_n} \leqslant \frac{1}{n}$，

也有 $\{x'_{k_i}\}$ 收敛于同一点 x_0。由 $f(x)$ 在 x_0 连续及定理 2.20，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{k_n}')=\lim\limits_{n\to\infty}f(x''_{k_n})=f(x_0)$。由此导出

$$f(x_{k_n}')-f(x_{k_n}'')\longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

但这与（3·7）式相矛盾。

注 $f: x\to\frac{1}{x}$，$x\in S=\{x: 0<x\leqslant 1\}$ 不一致连续，说明定理3·11区间 I 是闭的要求不能去掉．当然在开区间上甚至无穷区间上函数也可能是一致连续的．例如 $f: x\to\frac{1}{x}$，$x\in S_1=\{x: 1\leqslant x<\infty\}$ 在 S_1 上一致连续．对这些情况应当具体分析．

习 题

1. 设 f 是在闭区间 $I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 上连续且递增的函数，证明 f 的值域是区间 $[f(a), f(b)]$。

*2. 用波尔查诺－外尔斯特拉斯定理证明极值性定理。

3. 举出在 $S=\{x: 0\leqslant x<\infty\}$ 上连续且有界的函数 f，在 S 上极值性定理不成立。

4. 设 f 在闭区间 I_1 及 I_2 上连续，证明 f 在 $S=I_1\cup I_2$ 上一致连续。

5. 证明函数 $f: x\to\frac{1}{x}$ 在 $S=\{x: 1\leqslant x<+\infty\}$ 上一致连续。

6. 证明函数 $f: x\to\sin x$ 在 $S=\{x: -\infty<x<+\infty\}$ 上一致连续。

7. 设 f 在 $I=\{x: a<x<b\}$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$

存在。证明函数$f_0=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & 当x=a,\\ f(x) & a<x<b\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x) & x=b\end{cases}$

在$[a,b]$上一致连续。

8. 判断函数$f: x\to\sin\frac{1}{x}$, $x\in I=\{x: 0<x\leqslant1\}$在$I$上是否一致连续。

9. 按定义证明$f: x\to\sqrt{x}$在$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant1\}$上一致连续。

10. 设f在半开区间$I=\{x: 0<x\leqslant1\}$上一致连续，f在I上是否有界？

§3·6 哥西序列与哥西准则

序列$\{x_n\}$收敛于极限L的定义是对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数N，使当$n>N$，有

$$|x_n-L|<\varepsilon. \tag{3·8}$$

如果要判断给定的序列是否收敛，常常是数L并未给出，这样（3·8）的条件由于不知道L不能直接验证。由此可见，在L未给出的情况下找出判定序列收敛性的准则就是很重要的了。如下所述的准则首先由哥西给出。

定义 无限序列$\{x_n\}$称为哥西序列$\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$一自然数N，使对一切$m>N$，$n>N$的m，n，有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

定理3·12（哥西收敛准则） 序列$\{x_n\}$收敛的必要充分条件为$\{x_n\}$是哥西序列。

证明 先证必要性：设序列$\{x_n\}$收敛，那么它是哥西序列。以L表示$\{x_n\}$的极限，对$\forall\varepsilon>0$，由收敛的定义，$\exists N$使当$n>N$，有

$$|x_n-L|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设x_m是$\{x_n\}$的一个$m>n$的元素。有

$$|x_n-x_m|=|x_n-L+L-x_m|\leqslant|x_n-L|+|L-x_m|<\varepsilon.$$

于是$\{x_n\}$是哥西序列。

现证充分性：设序列$\{x_n\}$是哥西序列，那么$\{x_n\}$收敛。首先证明$\{x_n\}$有界。根据哥西序列的定义取$\varepsilon=1$，$\exists N_0$，使当$\forall m>N_0$及$\forall n>N_0$，有$|x_m-x_n|<1$。取定$m=N_0+1$，得到$|x_n-x_{N_0+1}|<1$对$\forall n>N_0$成立。于是，对$\forall n>N_0$

$$|x_n|=|x_n-x_{N_0+1}+x_{N_0+1}|\leqslant$$
$$|x_n-x_{N_0+1}|+|x_{N_0+1}|<1+|x_{N_0+1}|.$$

注意到N_0是固定的自然数。记$M=max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,(|x_{N_0+1}|+1)\}$，对$\forall n$有$|x_n|<M$，即$\{x_n\}$是有界序列。

对$\{x_n\}$应用波尔查诺—外尔斯特拉斯定理，$\exists\{x_n\}$的子序列$\{x_{k_n}\}$，$\{x_{k_n}\}$收敛于极限L，$\{x_n\}$也收敛于L。事实上，对$\forall\varepsilon>0$，$\{x_n\}$是哥西序列，$\exists N_1$，使对$\forall n>N_1$，$\forall m>N_1$有$|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}$。而又由$\{x_{k_n}\}$收敛于$L$，$\exists N_2$，当$n>N_2$有$|x_{k_n}-L|<\frac{\varepsilon}{2}$。记$N=max\{N_1,$

$N_2\}$，对$\forall n>N$，注意$k_n\geqslant n$，便有

$$|x_n-L|=|x_n-x_{k_n}+x_{k_n}-L|$$

$$\leqslant|x_n-x_{k_n}|+|x_{k_n}-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

于是$\{x_n\}$收敛于L。

例 证明$x_n=\dfrac{\cos n\pi}{n}$, $n=1,2,\cdots$是哥西序列。对$\forall\varepsilon>0$，

选一大于$\dfrac{2}{\varepsilon}$的整数N，对$\forall n,m$

$$|x_n-x_m|=\left|\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\cos m\pi}{m}\right|\leqslant\frac{m|\cos n\pi|+n|\cos m\pi|}{mn}$$

$$=\frac{m+n}{mn}.$$

当$m>n>N$, $\dfrac{m+n}{mn}<\dfrac{2m}{mn}=\dfrac{2}{n}<2\Big/\dfrac{2}{\varepsilon}=\varepsilon$,

即$|x_m-x_n|<\varepsilon$。因此$\{x_n\}$是哥西序列。

§3·7 汉茵—波赖尔与勒贝格定理

本节将证明今后发展微积分很有用的互相等价的两个定理。它们在证明一致连续性时特别方便。在第六章还将给出它的一般化结果。

通常以$\mathscr{F}$表示集族，例如研究区间族

$$I_n=\left\{x:\frac{1}{n}<x<1\right\},\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots.\tag{3·9}$$

(3·9) 的区间族$\mathscr{F}$是以区间为元素的集。区间本身又是实数的集为了不发生混淆，把$\mathscr{F}$叫作族。必须小心地区别$\mathscr{F}$中的区间的点与区间本身。区间$J=\left\{x: \frac{1}{3}<x<\frac{2}{3}\right\}$不是$\mathscr{F}$的元素，可是$J$的每一点含于$n>2$的每一$I_n$内。

定义 区间族$\mathscr{F}$称为集$S(S\subset R_1)$的覆盖$\Longleftrightarrow \forall x \in S$，$x$至少属于$\mathscr{F}$的一个区间内。

例如区间族 (3·9) 覆盖了集$S=\{x: 0<x<1\}$，因为$\forall x \in S$，当$n>\frac{1}{x}$时$x \in I_n$。

我们感兴趣的是：当$\mathscr{F}$是无限多个区间的族，$\mathscr{F}$覆盖了集S，能否从$\mathscr{F}$中挑出有限多个区间组成$\mathscr{F}$的一个有限的子族还能覆盖集S。例如族$\mathscr{F}=\left\{k_n: k_n=\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right),\right.$ $\left.n=1, 2, \cdots\right\}$覆盖了$S=\left\{x: 0<x<\frac{1}{2}\right\}$，$\mathscr{F}$不存在能够覆盖$S$的有限的子族（习题13）。可是对任一$\varepsilon>0$，$\varepsilon<\frac{1}{2}$，$S_1=\left\{x: \varepsilon<x<\frac{1}{2}\right\}$ $\mathscr{F}$存在有限子族$\{k_1, k_2, \cdots k_n\}$覆盖了S_1，此处$n+2>\frac{1}{\varepsilon}$。

常常间接地定义区间族。例如，设$f: x \to \frac{1}{x}$其定义域

$D = \{x: 0 < x \leqslant 1\}$。对$a \in D$满足$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{3}$的

解x的集为

$$L_a = \left\{x: \frac{3a}{3+a} < x < \frac{3a}{3-a}\right\}.$$

L_a组成的族$\mathscr{F} = \{L_a: a \in D\}$覆盖了集$D$，但$\mathscr{F}$不存在能覆盖$D$的有限子族（习题16）。

D之所以不能被$\mathscr{F}$的有限子族所覆盖，其原因在于D是半开区间。

定理3·13（汉茵—波赖尔定理） 设开区间族$\mathscr{F}$覆盖了闭区间$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$，那么存在$\mathscr{F}$的有限子族仍能覆盖$I$。

证明 用反证法。若I不能被$\mathscr{F}$的有限子族所覆盖。以I的中点分I为两个等长的闭区间，则至少有一子闭区间不能被$\mathscr{F}$的有限的子族所覆盖，以I_1表示这一子区间，$I_1 = [a_1, b_1]$。继续分I_1为两个等长的闭子区间，以$I_2 = [a_2, b_2]$表示其中不能被$\mathscr{F}$的有限子族所覆盖的一个子区间。继续这一步骤，得到闭区间序列

$$I_n = \{x: a_n \leqslant x \leqslant b_n\}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

每一I_n都不能被$\mathscr{F}$的有限子族所覆盖。但由于$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$

$(b-a)\to 0$ $(n\to\infty)$，据闭区间套定理，存在属于所有I_n中的唯一点x_0。既然$\mathscr{F}$覆盖了I，$x_0\in I$，存在$\mathscr{F}$的元素$J=\{x: \alpha<x<\beta\}$含有x_0。即

$$\alpha< x_0<\beta$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=x_0$，当$N$足够大时，有

$$\alpha<a_N\leqslant x_0\leqslant b_N<\beta. \quad \text{即} I_N\subset J.$$

这样I_N竟被$\mathscr{F}$的一个元素J的有限族所覆盖。这与I_N不能被有限多个$\mathscr{F}$的元素的子族所覆盖的性质相矛盾。于是定理被证明。

注　定理3.13中I为闭区间的"闭"字是不可少的，我们已举出了反例、现在举例说明区间改为无穷区间结果也不成立.例如区间$k=\{x: 0\leqslant x<\infty\}$被$\mathscr{G}_1=\{k_n: k_n=(n-1, n+1, n=0, 1, 2, \cdots\}$所覆盖，但$k$不能被$\mathscr{F}$的有限子族所覆盖.

汉茵一波赖尔定理通常称为有限覆盖定理。和它等价的另一种有用的形式称为勒贝格引理。

定理3·14（勒贝格引理）　设一开区间族$\mathscr{F}$覆盖了闭区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$，那么存在一正数$\rho$，对每一$c\in I$，能使区间$J_c=(c-\rho, c+\rho)$包含于$\mathscr{F}$的某个元素内。

证明　由$\mathscr{F}$覆盖了I。$\forall c\in I$，$\exists\mathscr{F}$的元素$I_c=\{x: \alpha_c<x<\beta_c\}$，$c\in I_c$。记$2\delta_c=\min\{(c-\alpha_c), (\beta_c-c)\}$（图3·8），区间$(c-2\delta_c, c+2\delta_c)\subset I_c$。记$K_c=(c-\delta_c, c+\delta_c)$图3·8（图3·9），设$\mathscr{G}$是所有$K_c$组成的族。注意对$\forall c\in I$

$$K_c\subset I_c, \quad I_c\in\mathscr{F}.$$

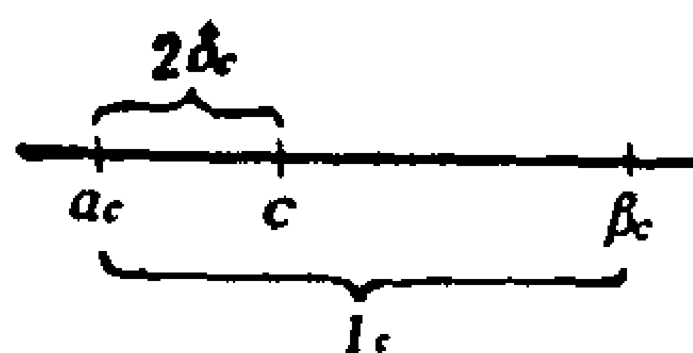


图 3·8

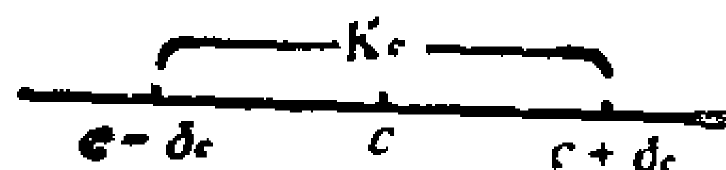


图 3·9

$\mathscr{G}$覆盖了I，由有限覆盖定理，存在$\mathscr{G}$的有限子族$\mathscr{G}_1$覆盖了I。$\mathscr{G}_1$的元素表示如下：

$$K_{c_1},\ K_{c_2},\ \cdots\ K_{c_n},$$

记$\delta_{c\rho}=\min\{\delta_{c_1},\ \delta_{c_2},\ \cdots,\ \delta_{c_n}\}$。以下证明$\rho=\delta_{c\rho}$便满足定理的要求。即证明：对$\forall c\in I$，$J_c=(c-\rho,\ c+\rho)$包含于$\mathscr{F}$的某一元素内。事实上，对$\forall c\in I$，$\exists\mathscr{G}_1$的某一元素$K_{c_i}=(c_i-\delta_{c_i},\ c_i+\delta_{c_i})$，$c\in K_{c_i}$。很明显

$J_c=(c-\rho,\ c+\rho)\subset(c_i-\delta_{c_i}-\rho,\ c_i+\delta_{c_i}+\rho)=I'$。

由$\rho\leqslant\delta_{c_i}$，$I'\subset I''=(c_i-2\delta_c,\ c_i+2\delta_{c_i})$。据$2\delta_{c_i}$定义$I''\subset I_{c_i}$，$I_{c_i}\in\mathscr{F}$，于是，$J_c\subset I_{c_i}$，$I_{c_i}\in\mathscr{F}$（图3·10）。

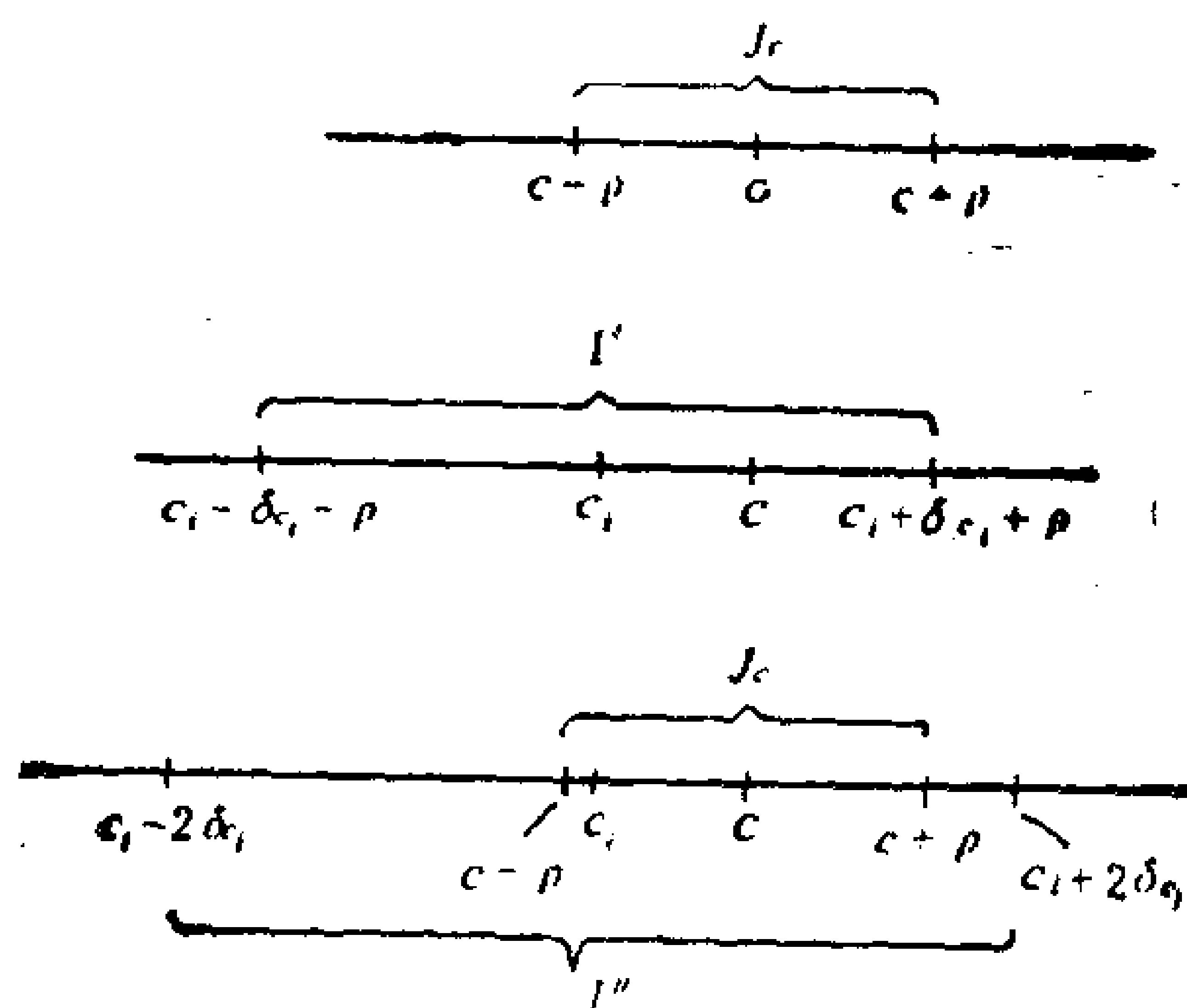


图 3·10

习　　题

习题1—6，判断给定序列是否是哥西序列。若不是哥西序列时，至少找出它的一个子序列为哥西序列。

1. $x_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2^j}$,

2. $x_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j!}$,

3. $x_n=\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$,

4. $x_n=1+(-1)^n+\frac{1}{n}$,

5. $x_n=\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)+\frac{1}{n}$,

6. $x_n=(1+(-1^n)n+\frac{1}{n}$

7. 设$S_n=\sum_{j=1}^{n}u_j$, $\overline{S}_n=\sum_{j=1}^{n}|u_j|$, $n=1,2,\cdots$. 如果$\lim_{n\to\infty}\overline{S}_n=S$，证明$S_n$收敛。

8. 用哥西准则证明闭区间套定理（定理3·1）。〔提示：证明闭区间端点a_n，b_n都组成哥西序列。〕

9. 设f的定义域包含$I=\{x: a<x<b\}$且$\lim_{x\to b^-}f(x)=L$.

   证明对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使得满足$b-\delta<x<b$，$b-\delta<y<b$的任何x，y，都有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

10. 证明习题9的逆命题成立。即设$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使满足$b-\delta<x<b$, $b-\delta<y<b$的x,y，有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. 那么$\exists$某个L使$\lim_{x\to b^-}f(x)=L$.

    综合9·10。可得$f(x)$在$x\to b^-$时极限存在的准则。通常称之为关于函数极限的哥西准则。

11. 把习题 9 中I换为$J=\{x: a<x<\infty\}$，设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$，证明：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists M>0$，使一切$x>M$，$y>M$有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

这一命题的逆命题成立不成立？

12. 设f在$I=\{x: a<x<b\}$上一致连续，证明$f(x)$在a，b的单边极限$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$都存在。若以这极限值作为函数$f$在$a$，$b$点的值，那么所得函数在$[a, b]$上一致连续。

13. (a) 证明所有形如$I_n=\left\{x: \dfrac{1}{n+2}<x<\dfrac{1}{n}\right\}$的族$\mathscr{F}$覆盖了区间$J=\left\{x: 0<x<\dfrac{1}{2}\right\}$.

(b) 证明$\mathscr{F}$不存在能够覆盖J的有限子族。

14. 设$\mathscr{G}$是习题13中$\mathscr{F}$添上区间$\left\{x: \dfrac{-1}{6}<x<\dfrac{1}{6}\right\}$的族，找出$\mathscr{G}$的覆盖$K=\left\{x: 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$一个有限子族。

15. 设$\mathscr{F}_1=\{I_n, I_n=\left(\dfrac{1}{2^n}, n\right) n=1, 2, \cdots\}$证明$\mathscr{F}_1$覆盖了区间$J=\{x: 0<x<1.\}$是否存在$\mathscr{F}_1$的有限子族能覆盖了$J$？证明你的结论。

16．设$f(x)=\dfrac{1}{x}$，$x\in D=\{x:0<x\leqslant 1\}$．对$a\in D$定义$La$为$\{x:|f(x)-f(a)|<\dfrac{1}{3},\ x\in D\}$，证明族$\mathscr{F}=\{La\}$覆盖了$D$。$\mathscr{F}$的有限子族能否覆盖$D$？证明你的结论。

17．设$f=\dfrac{1}{x}$，$x\in E=\{x:1\leqslant x<\infty\}$．$a\in E$，$I_a=\left\{x:|f(x)-f(a)|<\dfrac{1}{3}\right\}$证明$\mathscr{F}=\{I_a\}$覆盖$E$。

$\mathscr{F}$的有限子族能否覆盖E？证明你的结论。

18．用有限覆盖定理3·13证明有界性定理3·9。

*19．用勒贝格引理（定理3·14）证明一致连续性定理3·11。〔提示：对$\forall\varepsilon>0$，因f在x_0点连续，$\exists I_{x_0}=(x_0-\delta_{x_0},x_0+\delta_0)$，当$x_1$，$x_2\in I_{x_0}$，有$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。族$\mathscr{F}=\{I_{x_0}\}$覆盖了$I$，用勒贝格引理得到数$\rho$，这一$\rho$可作为一致连续性的$\delta$。〕

*20．区间$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$中的有理数可以排成下面的序列：0，$\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{5}{6}$，$\dfrac{1}{7}$，…（先分母为1者再排分母为2者，再分母为3者往下排）对于$0<\varepsilon<1$，I_n是以上面序列第n

项的数为中心长为$\frac{\varepsilon}{2^n}$的开区间。族$\mathscr{F}=\{I_n, n=1, 2, \cdots\}$覆盖了$I$内的一切有理数的集。所有$I_n$的长的和等于$\varepsilon$。证明$\mathscr{F}$不能覆盖区间$I$。

第四章 微分学的基本理论

§4·1 R_1上函数的微分

定义 设f是R_1到R_1的函数。导数f'由公式

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{4·1}$$

所定义。f'的定义域由（4·1）右端极限存在的一切x点所组成。当f'存在称f可微，求导运算也叫微分。

下面关于导数的定理是第二章中有关极限定理的直接推论。它们的证明作为习题留给读者。以下定理中所说的函数都是$R_1\to R_1$的函数。

定理4·1 若f是一常量函数，那么对$\forall x$，

$$f'(x)=0。$$

定理4·2 设f定义在开区间I上，C是一实数，g由$g(x)=Cf(x)$定义。若$f'(x)$存在，那么$g'(x)$存在，并且

$$g'(x)=Cf'(x)。$$

定理4·3 设f与g定义在开区间I上，F由$F(x)=f(x)+g(x)$定义。若$f'(x)$，$g'(x)$存在，那么$F'(x)$存在并且$F'(x)=f'(x)+g'(x)$。

定理4·4 设f在a点$f'(a)$存在，那么f在a点连续。

证明 $f(a+h)-f(a)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot h$，由$f'(a)$存在，等式右端在$h\to 0$时极限$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\lim\limits_{h\to 0}h$ $=f'(a)\cdot 0=0$。因此 $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$即$f$在$a$点连续。

定理4·5 设u，v定义在开区间I上，f由$f(x)=u(x)\cdot v(x)$定义。若$u'(x)$，$v'(x)$存在，那么$f'(x)$存在并且$f'(x)=u(x)\cdot v'(x)+u'(x)\cdot v(x)$。

定理4·6 设u，v定义在开区间I上，且$x\in I, v(x)\neq 0$，f由$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$定义。若$u'(x)$，$v'(x)$存在那么$f'(x)$存在并且 $f'(x)=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$。

定理4·7 设$f(x)=x^n$，n是整数（当$n\leqslant 0$，$x\neq 0$），那么 $f'(x)=nx^{n-1}$。

定理4·1到定理4·7再加上复合函数求导的链法则，就能计算大多数初等函数的导数。链法则可由下面微分基本引理导出。基本引理指出在一点可微（指导数存在）的函数在a点邻域里可以直线函数来逼近，直线的斜率是函数的导数。

定理4·8（微分基本引理） 设f在a点导数存在，那么存在一函数η，η在包含0的某个开区间内有定义，并且$\eta(0)=0$，η在0点连续且满足

$$f(a+h)-f(a)=[f'(a)+\eta(h)]h. \qquad (4\cdot 2)$$

证明 定义η为

$$\eta(h)=\begin{cases}\frac{1}{h}[f(a+h)-f(a)]-f'(a), & h\neq 0,\\ 0, & h=0.\end{cases}$$

因为f在a点可导，$\lim\limits_{h\to 0}\eta(h)=0$，所以$\eta(h)$在$h=0$点连续，$\eta(0)=0$且（4·2）式成立（图4·1）。

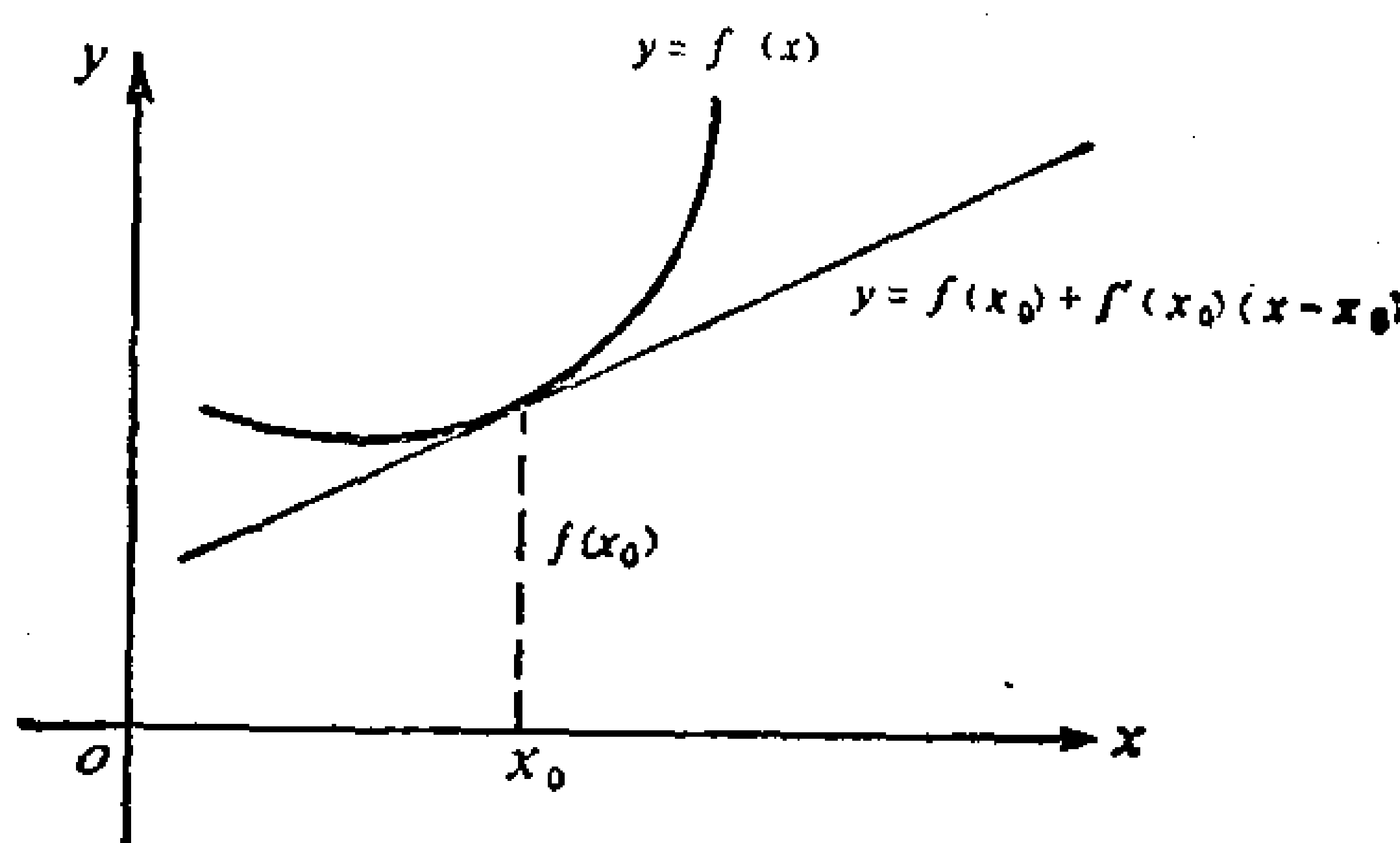


图 4·1

定理4·9（链法则） 设g，u是R_1上的函数，$f(x)=g[u(x)]$。若u在x_0点有导数，g在$u(x_0)$点有导数。那么$f=g\circ u$在x_0点有导数，并且

$$f'(x_0)=g'[u(x_0)]\cdot u'(x_0)\ .$$

证明 用Δf表示$f(x_0+h)-f(x_0)$，Δu表示$u(x_0+h)-u(x_0)$，那么

$$\Delta f=g[u(x_0+h)]-g[u(x_0)]=g(u+\Delta u)-g(u). \quad (4·3)$$

对（4·3）式右端应用定理4·8，得到

$$\Delta f=[g'(u)+\eta(\Delta u)]\Delta u,$$

注意到$h\to 0\Rightarrow\Delta u\to 0$，将上式除以$h$，极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}=f'(x_0)=\lim_{h\to 0}[g'(u)+\eta(\Delta u)]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\Delta u}{h}$$

$$=g'[u(x_0)]\cdot u'(x_0).$$

极值性定理指出：闭区间上连续的函数在这闭区间上的点达到最小值及最大值。下面的定理给出求函数的最小值、最大值点的方法。

定理4·10 设f在区间I上连续，f在I的内点x_0取到它的最大值。若$f'(x_0)$存在，那么

$$f'(x_0)=0$$

定理4·10能直接由导数定义导出，把证明留给读者。当最小值出现在内点x_0时，同样有$f'(x_0)=0$.因此当函数可导时应从$f'(x)=0$的解集及I的端点中去确定最大值或最小值点（4·2）。

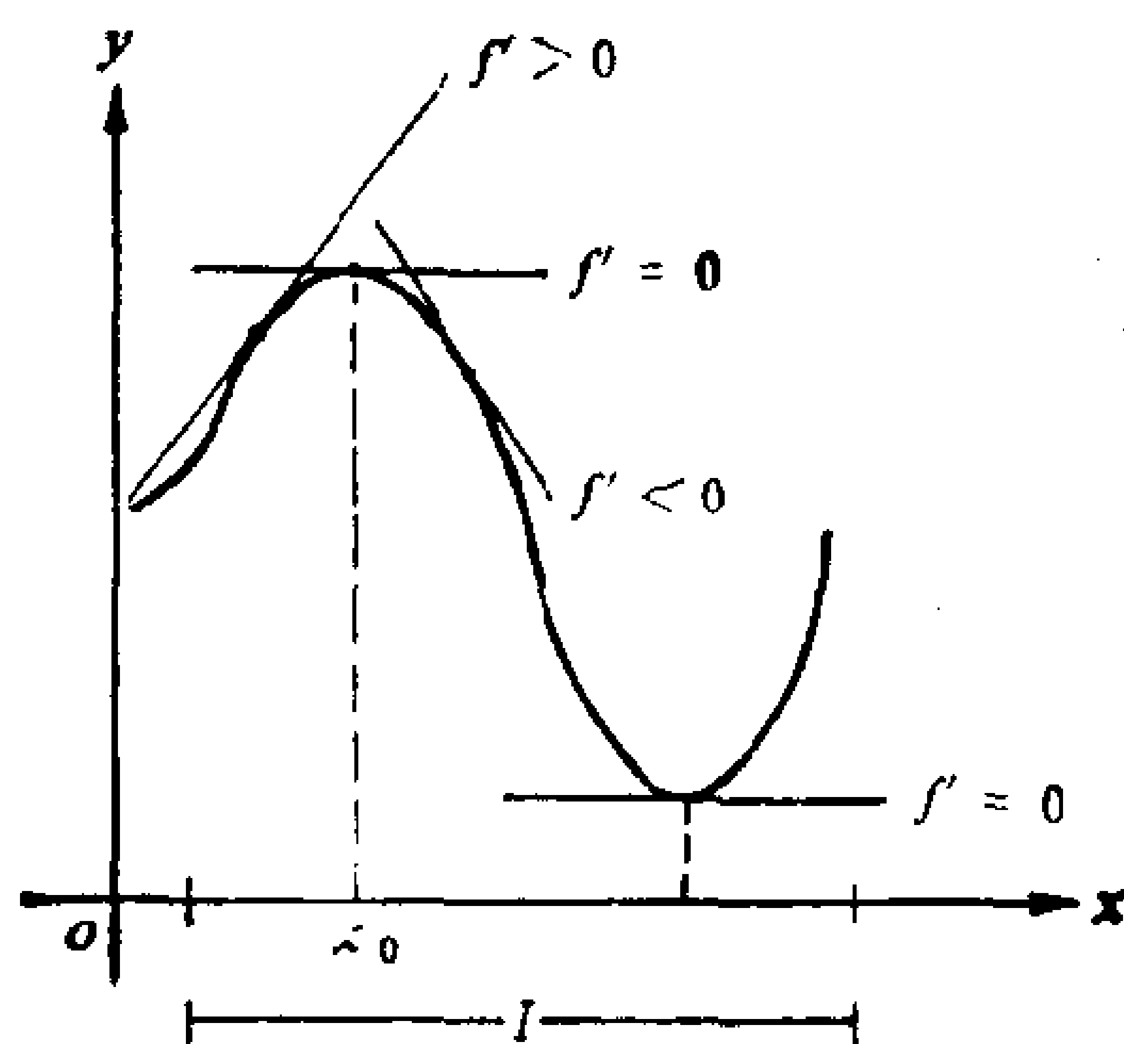


图 4·2

罗尔定理与微分中值定理是微分学理论进一步发展的基础。

定理4·11（罗尔定理） 设f在闭区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续且在开区间$I_1=\{x: a<x<b\}$内有导数．若$f(a)=f(b)=0$，那么 $\exists x_0\in I_1$，$f'(x_0)=0$（图4·3）。

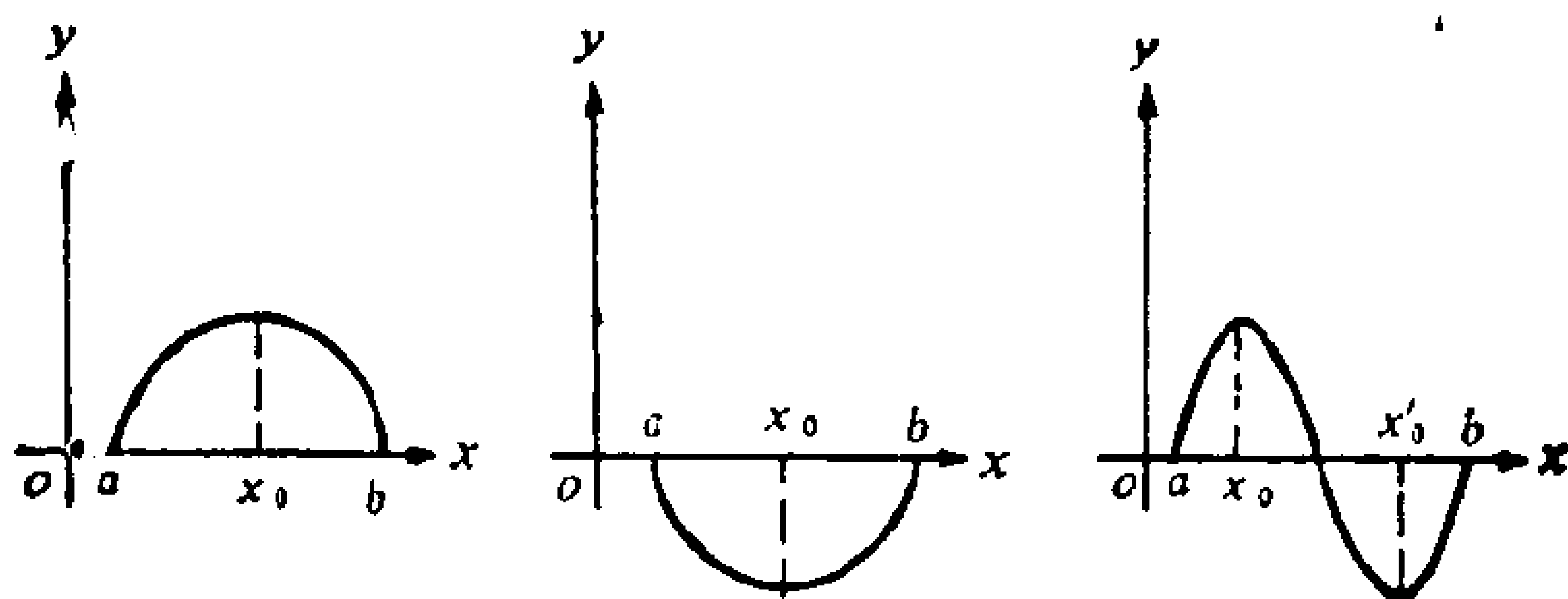


图 4·3

证明 若$f\equiv 0$，定理显然成立。当$f\not\equiv 0$，f有正值或负值．设它有正值，那么据极值性定理，f在某一内点x_0达到其最大值．由定理4·10断定$f'(x_0)=0$．设f有负值，应用定理4·10，f在最小值的x_0点处，$f'(x_0)=0$．

定理4·12（微分中值定理） 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续且在开区间$I_1=\{x: a<x<b\}$内有导数，那么

$$\exists\xi\in I_1,\quad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad（图4·4）。$$

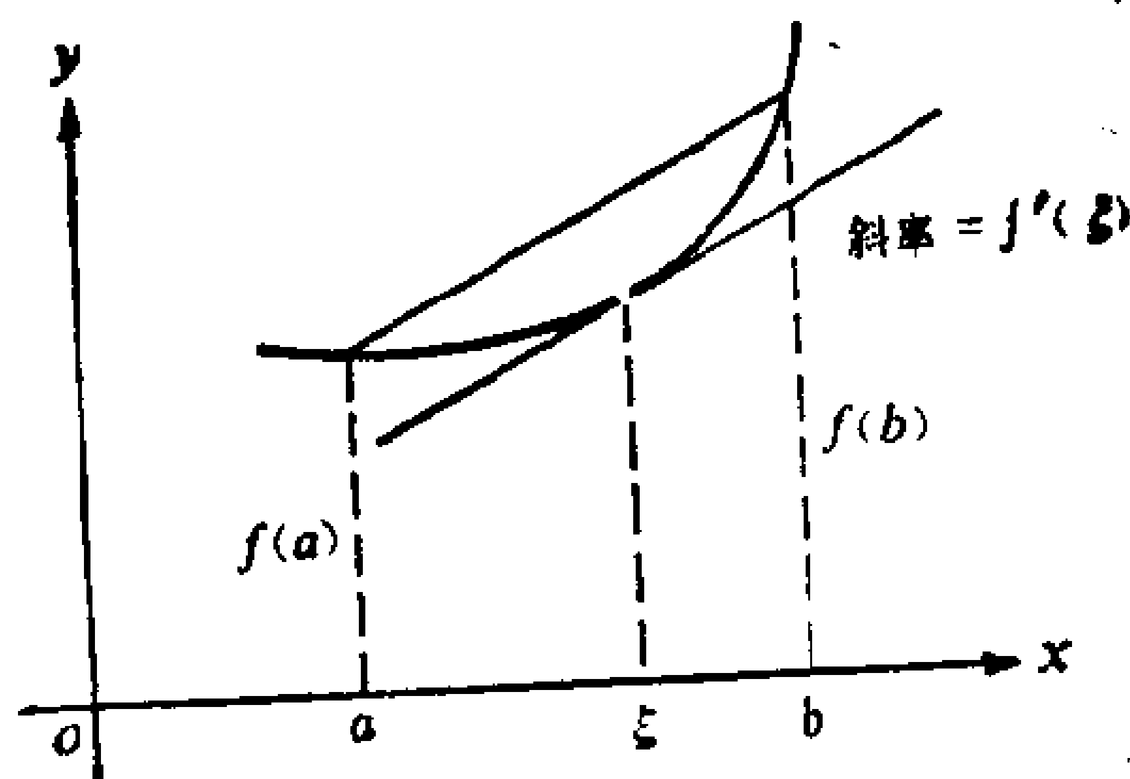


图 4·4

证明 定义函数

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a).$$

将a，b代入x，$F(a)=F(b)=0$，F满足罗尔定理条件。于是$\exists\xi\in I_1$，$F'(\xi)=0$。对$F(x)$求导得

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0,$$

即 $$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

下一定理是中值定理的直接推论，在函数作图中有用。其证明留给读者。

定理4·13 设f在闭区间I上连续且在I的内点可导。

(a) 若f'在I内恒为正(非负)，那么f在I上递增(不减)。

(b) 若f'在I内恒为负（非正），那么f在I上递减（不增）。

下列定理给出计算未定型的洛比达法则。

定理4·14(广义中值定理) 设f与F在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$f'$与$F'$在$I_1=\{x: a<x<b\}$内存在，$F'(x)\neq 0$。那么 $F(b)-F(a)\neq 0$且$\exists\xi\in I_1$，有

$$\frac{f(b-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)} \tag{4·4}$$

证明 F满足中值定理条件，$\exists\eta\in I_1$，使$F(b)-F(a)=F'(\eta)(b-a)$，据$F'(\eta)\neq 0$，所以$F(b)-F(a)\neq 0$。

定义函数 φ：

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}[F(x)-F(a)].$$

容易算得 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ 。φ满足罗尔定理条件，$\exists\xi\in I_1$，$\varphi'(\xi)=0$便导出（4·4）式。

定理4·15（关于$\frac{0}{0}$的洛比达法则） 设f与F在 $I=\{x: a<x<b\}$ 内可导，F'在I上不等于零。若

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}F(x)=0,\quad \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{F'(x)}=L,\text{ 那么}$$

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{F(x)}=L.$$

证明 定义$f(a)=F(a)=0$。由$F'(x)$在 I 上不等于零且 $F(a)=0$，由中值定理$F(x)$在I上不等于零。

现由广义中值定理 $\exists\xi\in(a,x)$ 使

$$\frac{f(x)-f(a)}{F(x)-F(a)}=\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}.$$

对$\forall\varepsilon>0$，由$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{F'(x)}=L$，$\exists\delta>0$，使$a<x<a+\delta$有

$$\left|\frac{f'(x)}{F'(x)}-L\right|<\varepsilon.$$

当然对$a<\xi<x<a+\delta$的ξ，$\left|\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}-L\right|<\varepsilon$.因此对满足

$a<x<a+\delta$的一切x均有

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)}-L\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}-L\right|<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{F(x)}=L.$$

推论 1 洛比达法则对于左极限，双边极限也成立。只要把 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=L$的假设换成左极限或双边极限。

推论 2 定理对$x\to+\infty$，$x\to-\infty$或$x\to\infty$的情况也成立。

证明 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=L$，

且在(a,∞)内$F'(x)\neq0$。 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}=L$。

事实上，设 $Z=\dfrac{1}{x}$且定义$g(z)=f(\dfrac{1}{z})$，$G(z)=f(\dfrac{1}{z})$，

那么

$$g'(z)=-\frac{1}{z^2}f'(\frac{1}{z}),\quad G'(z)=-\frac{1}{z^2}F'(\frac{1}{z}).$$

因此，当$z\to0^+$时

$$g(z)\to0,\qquad G(z)\to0,\qquad \frac{g'(z)}{G'(z)}\to L.$$

应用定理4·15于$\frac{g}{G}$，便得$\lim\limits_{z\to 0^+}\frac{g(z)}{G(z)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=L$。

定理4·16（关于$\frac{\infty}{\infty}$的洛比达法则） 设f'与F'在$I=\{x:a<x<b\}$内存在.若

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}F(x)=\infty,\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{F'(x)}=L,$$

且在I内$F'(x)\neq 0$，那么

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{F(x)}=L.$$

证明 由定理条件可知f及F在I上连续，且$F(x)$在某一区间$I_h=\{x:a<x<a+h\}$上不等于零。由$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{F'(x)}=L$，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$x\in I_\delta=\{x:a<x<a+\delta\}$

$$\left|\frac{f'(x)}{F'(x)}-L\right|<\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{4·5}$$

选取δ比h小，并研究I_δ内的x及c，$x<c$。那么由广义中值定理，导出$\exists\xi$，$x<\xi<c$ 使

$$\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}. \tag{4·6}$$

把(4·6)式代入不等式(4·5)得出

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}-L\right|<\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{4·7}$$

不妨认为$\varepsilon<1$，于是

$$\left|\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right|<|L|+\frac{1}{2}\varepsilon<|L|+\frac{1}{2}. \qquad (4\cdot 8)$$

用恒等式

$$\frac{f(x)}{F(x)}-\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}$$

$$=\frac{f(c)}{F(x)}-\frac{F(c)}{F(x)}\left[\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right].$$

取绝对值并用不等式(4·8)，有

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)}-\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{f(c)}{F(x)}\right|+\frac{|F(c)|}{|F(x)|}\left(|L|+\frac{1}{2}\right). \qquad (4\cdot 9)$$

固定c，让$x\to a^+$，那么由$F(x)\to\infty$（4·9）右端趋向于零。因此，存在比δ小的$\delta_1>0$，使当

$a<x<\delta_1$，有

$$\left|\frac{f(c)}{F(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4}\text{及}\left|\frac{F(c)}{F(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{4(|L|+\frac{1}{2})} \qquad (4\cdot 10)$$

最终，由（4·7），（4·9）及（4·10）得

$$\left|\frac{f(x)}{F(x)}-L\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{f(x)}{F(x)}-\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}\right|+\left|\frac{f(x)-f(c)}{F(x)-F(c)}-L\right|$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

注 (i) 定理4·15，4·16的区间I的大小并不重要.仅要求在a右边充分小邻域内$F'(x)$不为零.

(ii) 形如$0\cdot\infty$，1^{∞}，及$(\infty-\infty)$的不定型总能通过代数变形或取对数化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型.

(iii) 当$\frac{f'(x)}{F'(x)}$也是不定型，可应用法则于$\frac{f'(x)}{F'(x)}$，看$\frac{f''(x)}{F''(x)}$是否有极限.这种步骤在定理条件满足的前提下可进行多次.

例 计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+x-e^x}{2x^2}$.

解 设 $f: x\to1+x-e^x$，$F: x\to2x^2$.所求极限为$\frac{0}{0}$型.

应用定理4·15求$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x-e^x)'}{(2x^2)'}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-e^x}{4x}$.

这里$\frac{f'(x)}{F(x)}=\frac{1-e^x}{4x}$还是$\frac{0}{0}$型，并且满足定理4·15条件.

再次应用定理得

$$\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{4}=\frac{-1}{4}.$$

因此 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f''(x)}{F''(x)}=-\frac{1}{4}.$

习　题

1. 用和的极限定理证明两个函数之和的导数的定理4·3。

2. 用恒等式

$$u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)=(u(x+h)v(x+h)$$
$$-u(x+h)\ v(x))\ +(u(x+h)v(x)-u(x)v(x))$$

及和、积的极限定理证明积的求导公式（定理4·5）。

3. 用数学归纳法证明关于积的n阶导数的莱布尼兹公式：

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x))$$

$$=f^{(n)}(x)g(x)+\frac{n}{1!}f^{(n-1)}(x)g'(x)+$$

$$\frac{n(n-1)}{2!}f^{(n-2)}(x)g''(x)+\cdots+f(x)g^{(n)}(x).$$

4. 运用极限的定理证明商的导数公式（定理4·6）。

5. $F(x)\ =f\{u[v(x)]\}$叙述$F'(x_0)=f'\{u[v(x_0)]\}$ $u'[v(x_0)]v'(x_0)$公式成立的条件并证明这一公式。

6. 分别以 $D^+f(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，

$$D^-f(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

定义右、左单边导数。证明f在x_0可导$\Longleftrightarrow$ $D^+f(x_0)$，$D^-f(x_0)$存在且相等。

7．（链法则的部分逆）设f，g，u的关系为$f(x)=g[u(x)]$，u在x_0连续，$f'(x_0)$存在，$g'[u(x_0)]$存在且不为零．证明$u'(x_0)$由$f'(x_0)=g'[u(x_0)]u'(x_0)$所确定〔提示：用定理4·9同样的证明过程．〕

8．证明定理4·10．

*9．设f在包含x_0的一开区间I内连续，f'在x_0之外的I的点处有定义且$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=L$．证明

$f'(x_0)=L$．〔提示：用$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(\xi)$．〕

10．研究函数在$x=0$的可微性：

$$(a)\quad f: x\to\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

$$(b)\quad f: x\to\begin{cases}x^n\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0,\quad n\text{为大于1的整数。}\\ 0 & x=0,\end{cases}$$

对于K的什么值在$x=0$点f的k阶导数存在？〔参考习题9．〕

11．证明定理4·13．

12．若f在x_0点可微，证明$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}$

$=(\alpha+\beta)f'(x_0)$．

13．证明定理4·15的推论1．

14. 设$f(x)\to\infty$，$F(x)\to\infty$，$\dfrac{f'(x)}{F'(x)}\to+\infty$（当$x\to+\infty$）。

证明 $\dfrac{f(x)}{F(x)}\to+\infty(x\to+\infty)$。

15. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}$

16. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$。

17. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$. 〔提示：取对数。〕

18. 设f''在x_0存在，证明

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}=f''(x_0)。$$

19. 设 $f:x\to\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当}x>0,\\ 0 & \text{当}x\leqslant 0,\end{cases}$

(a)对每一自然数n，$f^{(n)}(0)$存在且等于0。〔参看习题6。〕

*(b)证明函数 $g:x\to\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{当}x\neq 0.\\ 0, & \text{当}x=0.\end{cases}$

对一切自然数n，$g^{(n)}(0)=0$。〔参考习题9〕。

§4·2 反函数

在§2·1中定义R_1到R_1的关系是指R_2中的序偶（x,y）的集S。函数是关系的特例。

定义 设S是从R_1到R_1的关系。S的逆关系是满足（y,x）$\in S$的序偶（x,y）的集。

若S是方程$f(x,y)=0$在R_2内的解集，S的逆是方程$f(y,x)=0$的解集。设f是一函数，f是方程$y=f(x)$在R_2内的图象，那么f的逆则是方程$x=f(y)$的图象。数函的逆关系不一定是函数。例如函数$f: x\to x^2$其图象是$y=x^2$，其逆关系由$y^2=x$的图象给出，这逆关系不是函数。

定理4·17（反函数定理） 设f是连续递增(或递减）函数，其定义域是区间I，值域是J（图4·5），那么

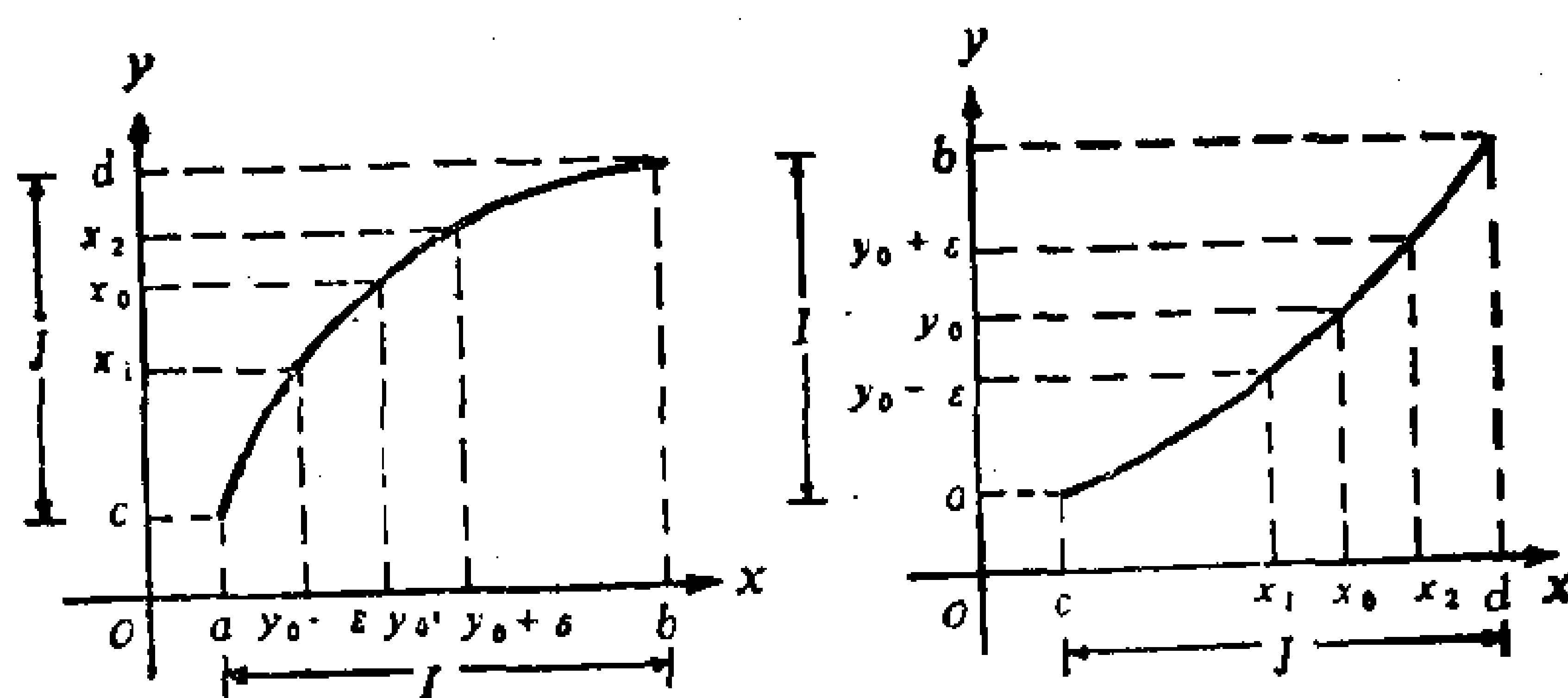


图 4·5

（a）J是一个区间。

（b）f的逆关系是一函数g，g以J为定义域且g在J上是连续递增的（或递减的）。

(c) 对$x\in I$，$g[f(x)]=x$，

对$x\in J$，$f[g(x)]=x$。 (4·11)

证明 (a) 由介值性定理（定理3·2）易知J是区间。设$x_0\in J$，$\exists y_0\in I$使$x_0=f(y_0)$。由f递增，y_0是唯一的。因此g是以J为定义域的函数，且$g(x_0)=y_0$，即$x_0\in J$，$f[g(x_0)]=x_0$。设$y_0\in I$，$f(y_0)\in J$是唯一的，$g[f(y_0)]=y_0$，因此(c)成立。据(c) g是递增的。事实上，当J中$x_1<x_2$，必有$g(x_1)<g(x_2)$。否则将有$f[g(x_1)]\geqslant f[g(x_2)]$，即$x_1\geqslant x_2$。

现在只剩下(b)中g的连续性未证。设x_0是J的点，当x_0不是J的右端点，证明g在x_0右边连续。设$x_2'\in J$，$x_2'>x_0$。记$y_0=g(x_0)$ $y_2'=g(x_2')$ 由g递增$y_2'>y_0$。因此y_0不是I的右端点。对于给定$\varepsilon>0$，且选取ε小到使$y_0+\varepsilon\in I$。记$x_2=f(y_0+\varepsilon)$（参看图4·5）因g递增。对$x_0\leqslant x\leqslant x_2$中的$x$有

$$g(x_0)\leqslant g(x)\leqslant g(x_2)=y_0+\varepsilon \tag{4·12}$$

取比x_2-x_0小的正数δ，对满足$x_0\leqslant x<\delta$的一切x，有

$$|g(x)-g(x_0)|=g(x)-g(x_0)<\varepsilon$$

即$\lim\limits_{x\to x_0^+}g(x)=g(x_0)$。$g(x)$在$x_0$右边连续。同理当$x_0$不是$J$的左端点时，$g(x)$在$x_0$左边连续。于是当$x_0$是$J$的内点时$g$在$x_0$连续；当$x_0$是左(右)端点时$g$在$x_0$右(左)连续，即$g$在$J$上连续。

f为递减函数时，g也是递减的。这种情况的证明与递增情况的证明完全雷同。

通常习惯地称g为f的反函数。

关于反函数可微性如下所述。

定理4·18（反函数可微性定理） 设 f 满足定理 4·17 的条件。若 $x_0\in J$，$f'[g(x)]$ 存在且 $f'[g(x_0)]\neq 0$，那么$g'(x_0)$存在，且

$$g'(x_0)=\frac{1}{f'[g(x_0)]}. \tag{4·13}$$

证明 由定理4·17有$f[g(x_0)]=x$.利用§4·1习题7的结果，$g'(x_0)$存在并且$f'[g(x_0)]g'(x_0)=1$.因为$f'[g(x_0)]$不为零，所以$g'(x_0)=\dfrac{1}{f'[g(x_0)]}$.

注 函数f不单调时，它的逆关系不一定是函数．有时f的逆关系可作如下分解：首先求f的单调性区间I_1，I_2…等，使在区间I_i上f递增或递减，以f_i记$f|_{I_i}$，f_i的反函数记为g_i．对g_i分别地由$f_i[g_i(x)]=x$，$i=1,2,\cdots$，求导．

例如，设$f:x\to x^2$定义在$I=\{x:-\infty<x<\infty\}$，f在$I_1=\{x:0\leqslant x<\infty\}$上递增，在$I_2=\{x:-\infty<x\leqslant 0\}$上递减．$f|_{I_1}$记为$f_1$，$f|_{I_2}$记为$f_2$．$f_1$的反函数$g_1:x\to\sqrt{x}$其定义域$J_1=\{x:0\leqslant x<\infty\}$．$f_2$的反函数$g_2:x\to-\sqrt{x}$其定义域也是$J_1$．等式（4·11）成为如下的两种情况：

$$(\sqrt{x})^2=x,\quad x\in J_1,\quad \sqrt{x^2}=x,\quad x\in I_1;$$

$$(-\sqrt{x})^2=x,\quad x\in J_1,\quad -\sqrt{x^2}=x, x\in I_2.$$

f的逆关系是$g_1\cup g_2$（图4·6）

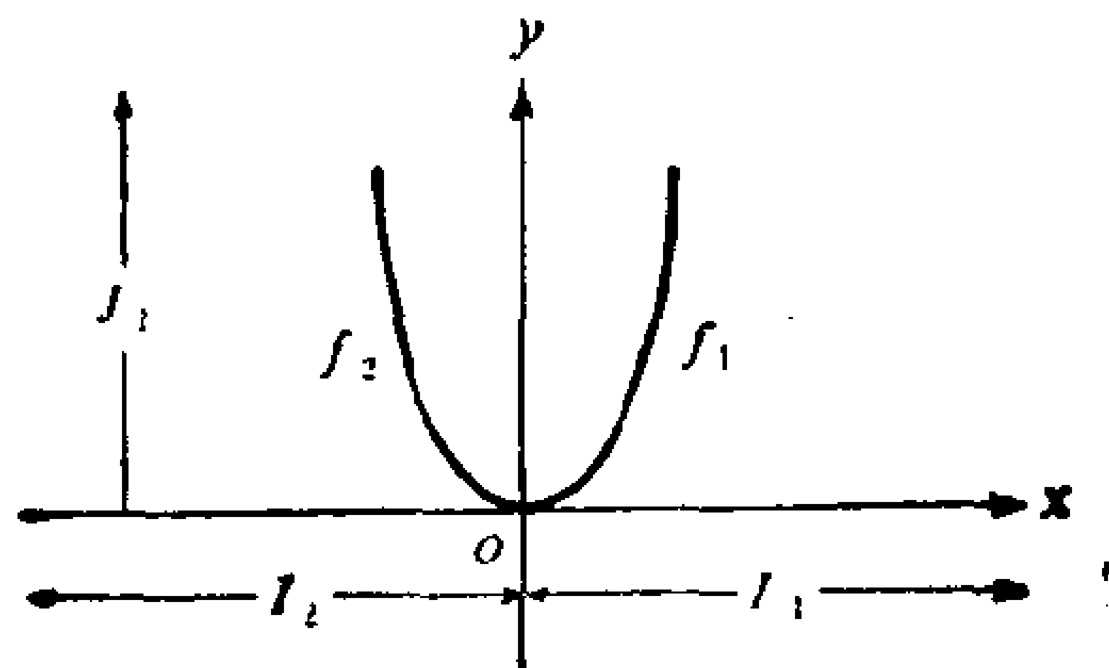


图 4·6

习　　题

习题1—12，求给定函数f的单调区间$I_1, I_2\cdots$及相应的反函数的定义域$J_1, J_2\cdots$。画出对应于$J_1, J_2\cdots$，上的反函数$g_1, g_2, \cdots$的图象。尽可能地求得g_i的表示式。

1．$f: x \to x^2+2x+2$，　　2．$f: x \to \frac{1}{2}x^2+3x-4$，

3．$f: x \to 4x-x^2$，　　4．$f: x \to 2-x-\frac{1}{2}x^2$，

5．$f: x \to \frac{2x}{x+2}$，　　6．$f: x \to \frac{1+x}{1-x}$，

7．$f: x \to \frac{4x}{x^2+1}$，　　8．$f: x \to (x-1)^3$，

9．$f: x \to x^3+3x$，　　10．$f: x \to \frac{2}{3}x^3+x^2-4x+1$，

11．$f: x \to x^3+3x^2-9x+4$，

12．$f: x \to \frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2+\frac{2}{3}$。

13．设f，g都是定义于I上的递增函数且对所有$x\in I$有$f(x)>g(x)$。以F，G分别表示f，g的反函数，它们的定义域分别是J_1，J_2。证明对$x\in J_1\cap J_2$有$F(x)<G(x)$。

习题14—18求给定单调函数的反函数。计算f'与g'并验证公式（4·13）。

14．$f: x \to \frac{4x}{x^2+1}$，$I=\{x: \frac{1}{2}<x<\infty\}$。

15. $f: x \to (x-1)^3$, $I=\{x: 1<x<\infty\}$.

16. $f: x \to (x^3+3x)$, $I\{x: -\infty<x<\infty\}$.

17. $f: x \to \sin x$, $\quad I=\{x: \frac{\pi}{2}<x<\pi\}$.

18. $f: x \to e^{3x}$, $\quad I=\{x: -\infty<x<\infty\}$.

第五章　积分学的基本理论

§5·1　达布积分

本章不再重述初等微积分讲过的积分方法，集中论述积分理论：积分概念、性质及积分方法所依据的基本定理。

设f是定义在闭区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的有界函数。以$I$的内点$t_1$，$t_2$，…，$t_{n-1}$划分$I$。令$t_0=a$，$t_n=b$，其大小次序为$t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n$，以$I_1$，$I_2$，…$I_n$表示区间$I_i=\{x: t_{i-1}\leqslant x\leqslant t_i\}$（图5·1）。把$I$分成这样有限

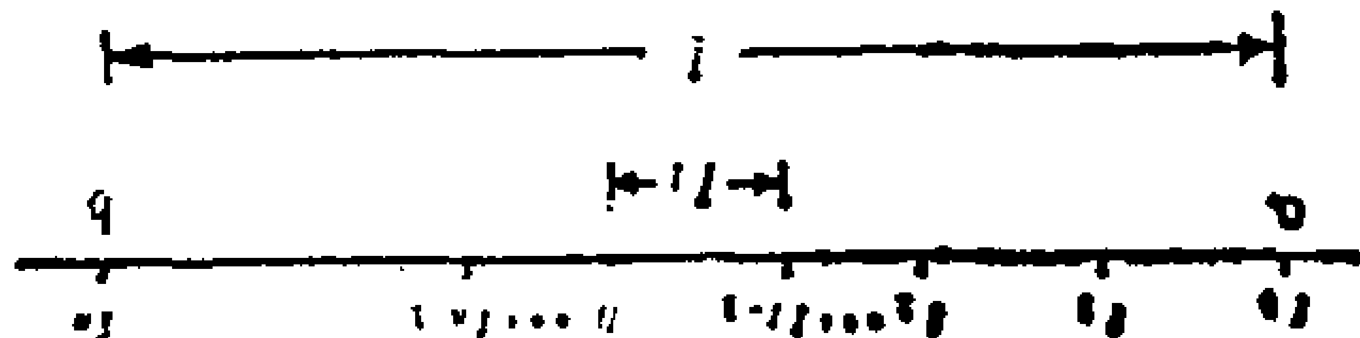


图　5·1

个子区间的分解，称为I的一个划分，用Δ来记之。

f在I上有界，以m，M分别表示$\inf\limits_{x\in I} f(x)$，$\sup\limits_{x\in I} f(x)$。$m_i$，$M_i$分别表示$\inf\limits_{x\in I_i} f(x)$，$\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$。区间$I_i$的长$t_i-t_{i-1}$表示为$l(I_i)$。

定义　f关于I的划分Δ的达布上和$S^+(f,\Delta)$定义为

$$S^+(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot l(I_i) \tag{5·1}$$

达布下和$S_-(f,\Delta)$定义为

$$S_-(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot l(I_i) \qquad (5\cdot2)$$

图5·2表示的是$f(x)>0$，$x\in I$，S^+，S_-和中诸加项各取一项画出的图形。

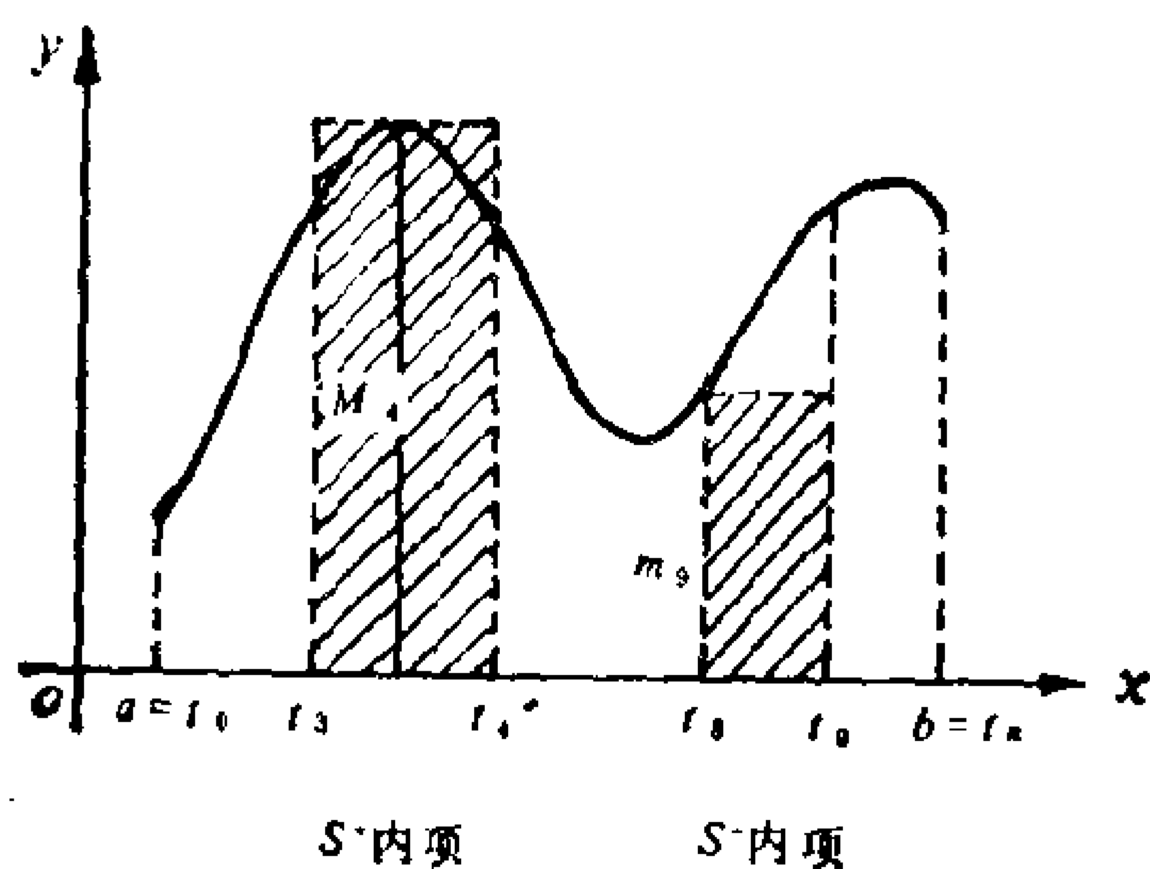


图 5·2

设Δ是划分$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，其子区间是$I_1$，$I_2$，…，$I_n$。引进新分点加到$\{t_i\}$之间得到新的划分$\Delta'$，$\Delta'$的子区间为$I_1'$，$I_2'$，…，$I_m'$，其中每个$I_j'$是$\Delta$的子区间或是一子区间的部分，称$\Delta'$为$\Delta$的细分。

设区间I被划分Δ_1分解为I_1，I_2，…，I_n，被划分Δ_2分解为J_1，J_2，…，J_m等子区间。以Δ_1及Δ_2，的所有子区间的端点为分点得到I新划分Δ称为Δ_1与Δ_2的共同细分。Δ的每个子区间是形如$I_i\cap J_k$的区间（$i=1, 2,\cdots, n$，$K=1, 2, \cdots, m$）。每一不空的$I_i\cap J_k$含于Δ_1的唯一子区间I_i也含于Δ_2的唯一子区间J_k之中（图5·3）

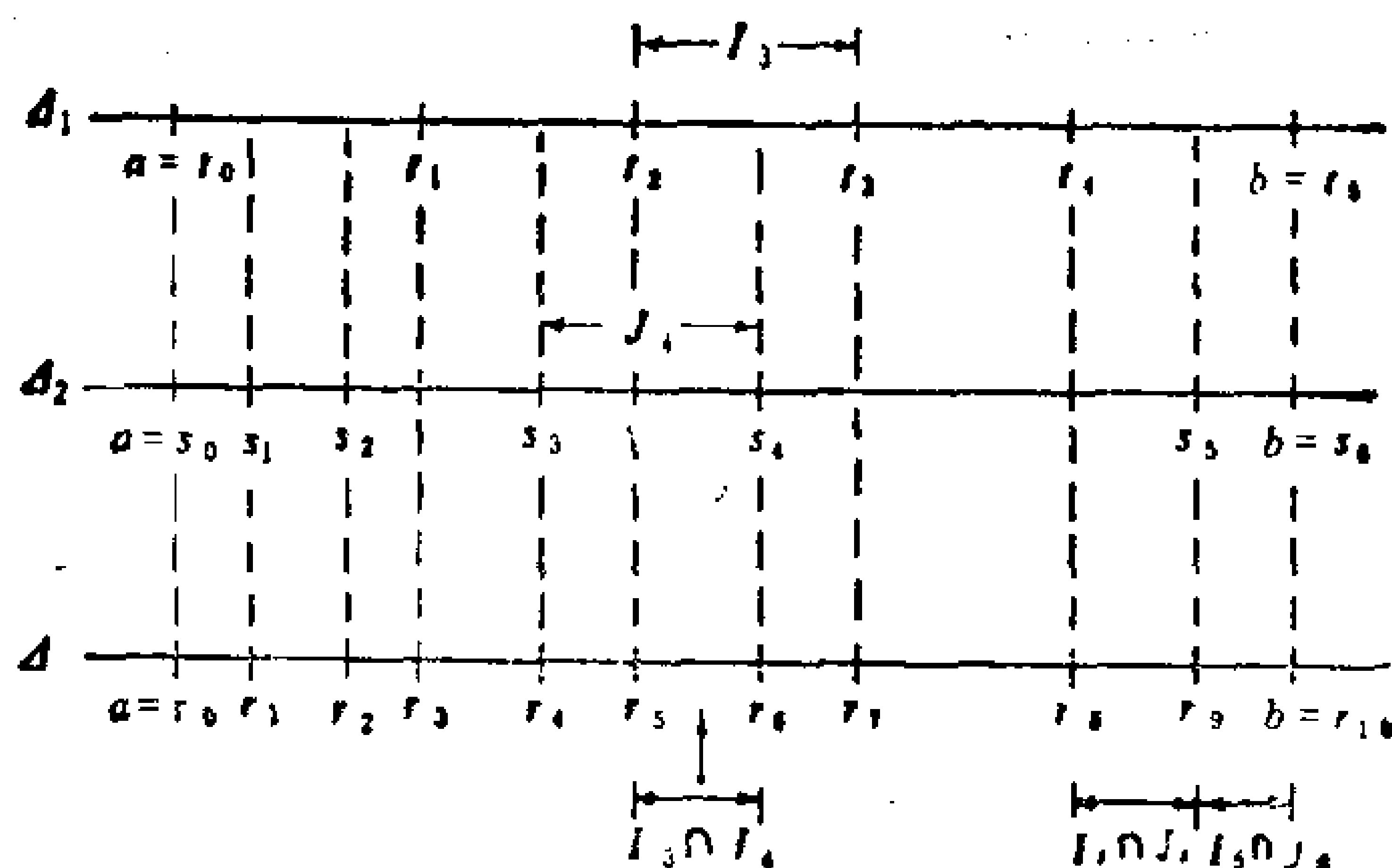


图 5·3

定理5·1 $S^+(f,\Delta)$及$S_-(f,\Delta)$的基本性质：

(a) $m(b-a)\leqslant S_-(f,\Delta)\leqslant S^+(f,\Delta)\leqslant M(b-a)$

(b) 若Δ'是Δ的细分，那么

$$S_-(f,\Delta)\leqslant S_-(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta).$$

(c) 若Δ_1，Δ_2是I的两个划分，那么

$$S_-(f,\Delta_1)\leqslant S^+(f,\Delta_2)$$

证明 (a) 由上、下确界定义

$$m\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M \qquad i=1, 2, \cdots n.$$

同时$\sum_{i=1}^{n} l(I_i)=b-a$. 于是由 (5·1) 及 (5·2)

$$m(b-a)=\sum_{i=1}^{n} m\cdot l(I_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n} m_i l(I_i)=S_-(f,\Delta)$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n} M_i l(I_i)=S^+(f,\Delta)\leqslant\sum_{i=1}^{n} M l(I_i)=M(b-a).$$

(b) 设Δ_i是I的子区间I_i的以Δ'位于I_i内的子区 间 端

点为分点的划分．应用（a）于每一I_i及Δ_i便有

$$S_-(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i l(I_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}S_-(f,\Delta_i)=S_-(f,\Delta')$$

$$\leqslant S^+(f,\Delta')=\sum_{i=1}^{n}S^+(f,\Delta_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i l(I_i)=S^+(f,\Delta).$$

（c）设Δ是Δ_1与Δ_2的共同细分．由（b）有

$$S_-(f,\Delta_1)<S_-(f,\Delta)\leqslant S^+(f,\Delta)\leqslant S^+(f,\Delta_2).$$

定理5·1关于$S_-(f,\Delta)$，$S^+(f,\Delta)$的三条基本性质用几何图形容易直观地表示（图5·2）．基于定理5·1．可以定义f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的达布积分．

定义 定义f的达布上积分为

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf_{\Delta}\{S^+(f,\Delta): I\text{的任一划分}\Delta\}$$

达布下积分为

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup_{\Delta}\{S_-(f,\Delta): I\text{的任一划分}\Delta\}$$

由定理5·1之（c）及上、下确界定义

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx\geqslant\underline{\int_a^b} f(x)dx$$

恒成立．当等号出现时，称f在I上达布可积或简称可积，上、下积分的共同值叫作积分，记为$\int_a^b f(x)dx$．

定理5·2 若对$x\in I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，那么

$$m(b-a)\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

证明 设Δ_1，Δ_2是I的两个划分。由定理5·1的（b）、（c）导出

$$m(b-a)\leqslant S_-(f,\Delta_1)\leqslant S^+(f,\Delta_2)\leqslant M(b-a).$$

固定Δ_1让Δ_2变，据上述不等式对一切可能的Δ_2成立，$\{S^+(f,\Delta_2)\}$的下确界 即$\overline{\int_a^b} f(x)dx\geqslant S_-(f,\Delta)$，于是

$$m(b-a)\leqslant S_-(f,\Delta_1)\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

现让Δ_1变，由$S_-(f,\Delta_1)$对一切可能划分都不超过$\overline{\int_a^b} f(x)dx$，所以

$$m(b-a)\leqslant\underline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

推论 若$\forall x\in I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，且$f$在$I$上达布可积，那么

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a).$$

为了建立达布上、下积分的简单性质，要用到关于函数

上、下确界的基本事实：

引理5·1 设f是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的有界函数，$k$为实数，定义$g(x)=kf(x)$，那么

（i）当$k>0$有 $\inf\limits_{x\in I}g(x)=k\inf\limits_{x\in I}f(x)$，

$$\sup_{x\in I}g(x)=k\sup_{x\in I}f(x).$$

（ii）当$k<0$有 $\inf\limits_{x\in I}g(x)=k\sup\limits_{x\in I}(x)$，

$$\sup_{x\in I}g(x)=k\inf_{x\in I}f(x).$$

证明 仅证（ii）中后一等式。其余类似。设$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$，由下确界定义对$x\in I$有$f(x)\geqslant m$，而$k<0$，所以对$\forall x\in I$，$g(x)=kf(x)\leqslant km$.因此

$$\sup_{x\in I}g(x)\leqslant km. \tag{5·3}$$

现证（5·3）式的等号成立。事实上由m的定义及$k<0$，对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_0\in I$使

$$f(x_0)<m+\left(\frac{\varepsilon}{-k}\right),\ \text{即}g(x_0)=kf(x_0)>km-\varepsilon.$$

根据上确界定义可得

$$\sup_{x\in I}g(x)\geqslant km. \tag{5·4}$$

综合（5·3），（5·4）便有$\sup\limits_{x\in I}g(x)=k\inf\limits_{x\in I}f(x)$.

定理5·3 以下各函数都是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的有

界函数

(a) 若 $g(x)=kf(x)$，$x\in I$。

(i) 当$k>0$，那么 $\underline{\int}_a^b g(x)dx=k\underline{\int}_a^b f(x)dx$

及 $\overline{\int}_a^b g(x)dx=k\overline{\int}_a^b f(x)dx$；

(ii) 当$k<0$，那么 $\underline{\int}_a^b g(x)dx=k\overline{\int}_a^b f(x)dx$

及 $\overline{\int}_a^b g(x)dx=k\underline{\int}_a^b f(x)dx$。

(b) 设$h(x)=f_1(x)+f_2(x)$，$x\in I$，那么

(i) $\underline{\int}_a^b h(x)dx\geqslant\underline{\int}_a^b f_1(x)dx+\underline{\int}_a^b f_2(x)dx$；

(ii) $\overline{\int}_a^b h(x)dx\leqslant\overline{\int}_a^b f_1(x)dx+\overline{\int}_a^b f_2(x)dx$。

(c) 若$f_1(x)\leqslant f_2(x)$，$x\in I$，那么

(i) $\underline{\int}_a^b f_1(x)dx\leqslant\underline{\int}_a^b f_2(x)dx$；

(ii) $\overline{\int}_a^b f_1(x)dx\leqslant\overline{\int}_a^b f_2(x)dx$。

(d) 若$a<c<b$，那么

(i) $\underline{\int}_a^b f(x)dx = \underline{\int}_a^c f(x)dx + \underline{\int}_c^b f(x)dx$;

(ii) $\overline{\int}_a^b f(x)dx = \overline{\int}_a^c f(x)dx + \overline{\int}_c^b f(x)dx$.

证明 仅证明(a)的(i)及(d)的(ii)，其余类似。

(a) 的(i)。设Δ是I的划分，分解I为$I_1, I_2, \cdots, I_n$。分别记$m_i = \inf\limits_{x \in I_i} f(x)$，$M_i = \sup\limits_{x \in I_i} f(x)$ 及 $\widetilde{m}_i = \inf\limits_{x \in I} g(x)$，$\widetilde{M}_i = \sup\limits_{x \in I_i} g(x)$。由$k > 0$据引理5·1 $\widetilde{m}_i = km_i$，$\widetilde{M}_i = kM_i$。因此。

$$S_-(g, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{m}_i l(I_i) = k\sum_{i=1}^{n} m_i l(I_2) = kS_-(f, \Delta)$$

$$\leqslant k\underline{\int}_{-a}^{b} f(x)dx.$$

于是
$$\underline{\int}_{-a}^{b} g(x)dx \leqslant k\underline{\int}_{-a}^{b} f(x)dx. \tag{5·5}$$

现在建立相反的不等式。由确界性质，对$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ \Delta$使

$$S_-(f, \Delta) > \underline{\int}_{-a}^{b} f(x)dx - \frac{1}{k}\varepsilon.$$

对这怎的划分Δ，我们有

$$\underline{\int}_{-a}^{b} g(x)dx \geqslant S_-(g, \Delta) = kS_-(f, \Delta) > k\underline{\int}_{-a}^{b} f(x)dx - \varepsilon.$$

由ε的任意性，导出

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx \geqslant k \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \tag{5·6}$$

综合（5•5）及（5•6），得（a）的（i）.

（d）的(ii)。对$\forall\ \varepsilon > 0$，由上积分定义，$\exists\, I' = \{x : a \leqslant x \leqslant c\}$的划分$\Delta_1$，使

$$S^+(f,\Delta_1) < \overline{\int_a^c} f(x)dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

也$\exists I'' = \{x : c \leqslant x \leqslant b\}$的划分$\Delta_2$使

$$S^+(f,\Delta_2) < \overline{\int_c^b} f(x)dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

令Δ是由I'的划分Δ_1及I''的划分Δ_2所有的子区间所组成的I的划分，那么

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant S^+(f,\Delta) = S^+(f,\Delta_1) + S^+(f,\Delta_2) <$$

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

由ε的任意性，因此有

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx. \tag{5·7}$$

现证相反不等式。对$\forall \varepsilon > 0, \exists I$的划分$\Delta$，使

$$S^+(f,\Delta) > \overline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon.$$

于划分Δ加入分点C得Δ的细分Δ'. 由定理5·1. $S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta)$. 若以$\Delta_1$, Δ_2分别表示由Δ'带来的I'及I''的划分（图5·4），这样便有

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx+\overline{\int_c^b} f(x)dx\leqslant S^+(f,\Delta_1)+S^+(f,\Delta_2)=$$

$$S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta)<\overline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon.$$

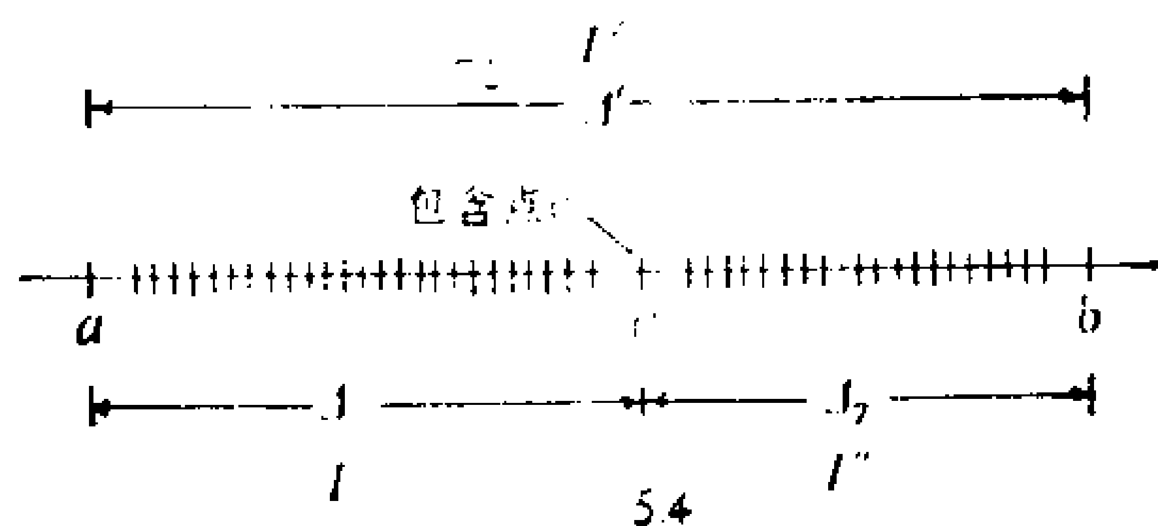


图 5·4

由ε的任意性，所以有

$$\overline{\int_a^c} f(x)dx+\overline{\int_c^b} f(x)dx\leqslant\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

综合这一不等式与（5·7）得(d)的(ii)成立。

推论 当f于I上达布可积，那么

(a) 若$g(x)=kf(x)$，k为常数，有

$$\int_a^b g(x)dx=k\int_a^b f(x)dx.$$

(b) 若 $h(x)=f_1(x)+f_2(x)$，有

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx.$$

(c) 若 $f_1(x)\leqslant f_2(x)$，$x\in I$，有

$$\int_a^b f_1(x)dx\leqslant\int_a^b f_2(x)dx.$$

(d) 若f在$I_1=\{x: a\leqslant x\leqslant c\}$及$I_2=\{x: c\leqslant x\leqslant b\}$上达布可积，$f$在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上达布可积且

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx. \tag{5·8}$$

定义$\int_a^a f(x)dx=0$及$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$是有益的。

作了这样的规定之后，上面的（5·8）式在所论积分存在的条件下，不论c是否在a，b之间（5·8）式都成立。

定理5·4 若f在区间I上可积，那么它在I的子区间I'上是可积的。

定理5·4的证明留给读者。

重要的问题是如何确定函数的可积性。下面定理给出可积的必要与充分条件以及适用的可积性充分条件的推论。

定理5·5 设f是区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上定义的有界函数。$f$在$I$上可积$\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists I$的划分$\Delta$使

$$S^+(f,\Delta)-S_-(f,\Delta)<\varepsilon. \tag{5·9}$$

证明 先证条件是充分的。假定条件（5·9）成立。由上、下积分定义，有

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx-\underline{\int_a^b} f(x)dx\leqslant S^+(f,\Delta)-S_-(f,\Delta)<\varepsilon.$$

不等式左端与ε无关，由ε的任意性，因而

$$\int_{a}^{-b} f(x)dx - \int_{-a}^{b} f(x)dx = 0,$$

即f是可积的。

现证条件（5·9）的必要性。假定f是可积的。由定义对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$划分Δ_1及Δ_2使

$$S^+(f,\Delta_1) < \int_{a}^{-b} f(x)dx + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$\text{及} S_-(f,\Delta_2) > \int_{-a}^{b} f(x)dx - \frac{1}{2}\varepsilon. \qquad (5·10)$$

把Δ_1与Δ_2的共同细分记为Δ，据定理5·1

$$S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta_1) \leqslant S^+(f,\Delta_1) - S_-(f,\Delta_2).$$

将（5·10）代入并据f可积即$\int_{a}^{-b} f(x)dx = \int_{-a}^{b} f(x)dx$，得

$$S^+(f,\Delta) - S_-(f,\Delta) < \varepsilon ,$$

于是条件（5·9）成立。

推论1 若f在闭区间$I = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$上连续，那么$f$是可积的。

证明（纲要） I是闭的，所以f一致连续。对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使I中满足$|x - y| < \delta$的x，y，都有

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a} .$$

取I的划分Δ使每一子区间之长小于δ，便有不等式（5·9）成立。由定理5·5f是可积的。

推论2 若f在闭区间I上单调，那么f可积。

推论 2 的证明留作习题。

注 推论1与2中假设I为闭区间的条件是不能去的.例如函数$f: x\to\frac{1}{x}$在半开区间$I=\{x: 0<x\leqslant 1\}$上既连续又单调，f在I上无界，对每一划分Δ，$S^+(f,\Delta)$不是有限数，f在I上不可积.

定理5·6（积分中值定理） 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续。那么存在数$\xi\in I$ 满足

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)\cdot(b-a).$$

证明 以m，M分别表示$f(x)$在I上的最小值与最大值。由连续函数的极值性定理（定理3·10），$\exists x_0,x_1\in I$，$f(x_0)=m$，$f(x_1)=M$。而据定理5·2推论有

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)\ . \qquad (5\cdot 11)$$

由此导出$\int_a^b f(x)dx=A(b-a)$ 中的A是满足$f(x_0)\leqslant A\leqslant f(x_1)$的数。由介值性定理（定理3·2），$\exists\xi\in I$，$f(\xi)=A$。

下面给出反映微分与积分互为逆运算的微积分基本定理。

定理5·7（微积分基本定理的第一形式） 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，且定义$F$为

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,$$

那么F在I上连续，且对$x\in I_1=\{x: a<x<b\}$，有

$$F'(x)=f(x).$$

证明 f在I的每一子区间上可积，因而

$$\int_a^{x+h} f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+h} f(t)dt ,$$

也即

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

对$\int_x^{x+h} f(x)dx$ 应用定理5·6，∃ 介于x，$x+h$之间的ξ使

$\int_x^{x+h} f(x)dx=f(\xi)\cdot h$.这样便有

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(\xi),$$

据$f(x)$的连续性，等式左端在$x+h\to x$即$h\to 0$时有极限$f(x)$，

因此 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$存在且等于$f(x)$，即

$$f'(x)=f(x),\quad x\in I_1=\{x: a<x<b\}.$$

定理5·8（微积分基本定理的第二形式） 设f及F在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，且对$x\in I_1=\{x: a<x<b\}$有$F'(x)=f(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) .$$

定理5·8的证明留给读者。

设f是定义在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的非负可积函数。积分

$$\int_a^b f(x)dx \tag{5·12}$$

给出图5·5所示的曲线之下的面积。在初等几何中，面积依直观定义，给出了矩形、多边形、圆等的面积计算公式。积分（5·12）可以作为图5·5所示的区域面积定义。关于面积的严格定义放在§5·4中详细讨论。

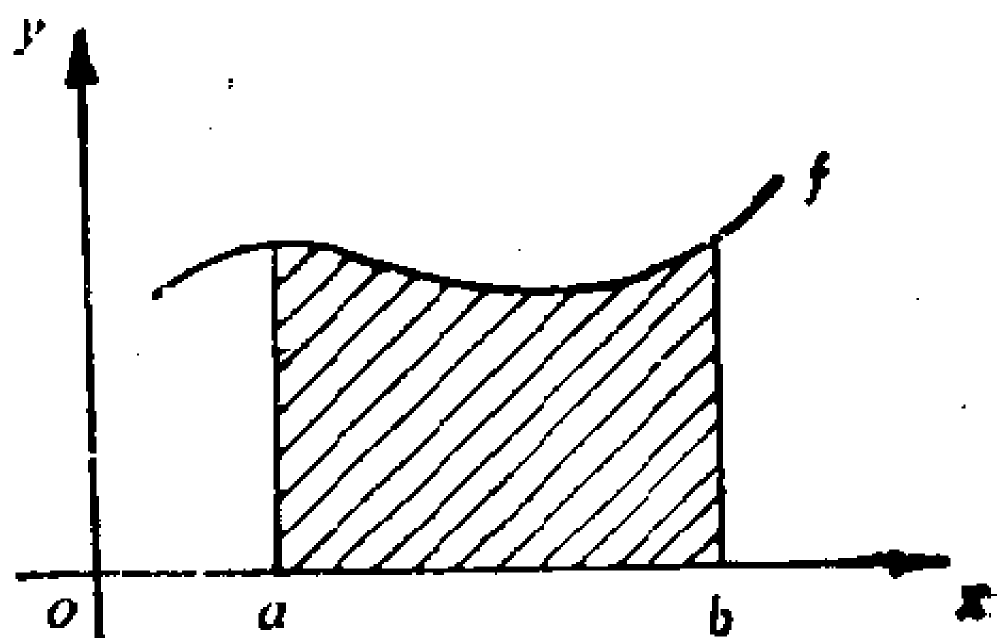


图 5·5

习　　题

1. 设$f=x^2$，$x\in I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$，$\Delta$为将$I$分成5个等长的子区间的划分，计算$S^+(f,\Delta)$，$S^-(f',\Delta)$.

2. (a) 设$f: x\to x^3$，$x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$. Δ是一划分，Δ'是Δ又添加上一个分点的Δ的细分。证明$S^+(f,\Delta')<S^+(f,\Delta)$及$S_-(f',\Delta')>S_-(f,\Delta)$.

   (b) I，Δ与Δ'同(a)，给出一个I上的函数使它满足：$S^+(f,\Delta')=S^+(f,\Delta)$，$S_-(f,\Delta')=S_-(f,\Delta)$.

   (c) 设f在I上是严格递增连续函数，证明对Δ的任一细分Δ'，有$S^+(f,\Delta')<S^+(f,\Delta)$。

3. 若$g(x)=kf(x)$，$x\in I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$证明（定理5·3(a)）：

当$k<0$，$\underline{\int_a^b} g(x)dx = k\overline{\int_a^b} f(x)dx$成立。

4．(a) 若$h(x)=f_1(x)+f_2(x)$，$x\in I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$证明（定理5·3(b)）：

$$\underline{\int_a^b} h(x)dx \geqslant \underline{\int_a^b} f_1(x)dx + \underline{\int_a^b} f_2(x)dx,$$

$$\overline{\int_a^b} h(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f_1(x)dx + \overline{\int_a^b} f_2(x)dx.$$

(b) 若f_1，f_2是达布可积的，证明

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

5．若$f_1(x)\leqslant f_2(x)$，$x\in I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$证明（定理5·3(c)）：

$$\underline{\int_a^b} f_1(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f_2(x)dx,\quad \overline{\int_a^b} f_1(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f_2(x)dx.$$

当f_1，f_2达布可积，有$\int_a^b f_1(x)dx \leqslant \int_a^b f_2(x)dx$。

6．证明：在各积分存在时，不论c是否在a，b之间，都有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7．设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上可积。$I'=\{x: \alpha\leqslant x\leqslant \beta\}$是$I$的子区间。证明$f$在$I'$上可积（定理5·4）。

〔提示：推广定理5·3(d)于$a<\alpha<\beta<b$三区间。而后在各区间上以上积分减下积分。〕

8. 完成定理5·5推论1的证明。

9. 证明单调函数可积性的定理5·5推论2。

〔提示：用$S^+(f,\Delta)-S_-(f,\Delta)\leqslant|f(b)-f(a)|\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}l(\bar{I}_i)$。〕

10. 称定义在区间I上的函数为阶梯函数$\Longleftrightarrow\exists$ I的划分Δ，使当x为子区间I_i内点时，$f(x)=c_i$，$i=1,2,\cdots n$。证明阶梯函数是可积的，并找出其积分值公式。

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{为有理数，}\\ 0 & \text{当}x\text{为无理数。}\end{cases}$ 证明

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx=0, \qquad \overline{\int_0^1} f(x)dx=1.$$

12. (a)设f是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的有界函数，$M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$，

$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$，$M^*=\sup\limits_{x\in I}|f(x)|$，$m^*=\inf\limits_{x\in I}|f(x)|$。证明$M^*-m^*\leqslant M-m$。

(b)设f在I上可积证明$|f(x)|$在I上可积。且$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx$。

13. (a)设f与g是I上非负有界函数，$M=\sup\limits_{x\in I}f(x)$，$m=\inf\limits_{x\in I}f(x)$，$N=\sup\limits_{x\in I}g(x)$，$n=\inf\limits_{x\in I}g(x)$ 证明

$$\sup_{x\in I} f(x)g(x)-\inf_{x\in I} f(x)g(x)\leqslant MN-mn.$$

(b) 设f，g可积，证明$f\cdot g$在I上可积。

14. 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$I$上函数$f$如下定义

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^n} & \text{当}x=\dfrac{j}{2^n}, j\text{是奇数}, 0<j<2^n, n=1,2,\cdots,\\ 0 & \text{当}x\text{在别处。}\end{cases}$$

研究f的可积性

*15. 设f，g是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上正值连续函数，证明

$\exists\xi\in I$，$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx$。〔提示：用定理5·6〕

16. 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上除去内点$c$之外连续，若$f$是有界的，证明$f$在$I$上可积。且$f$于$c$点的值不影响$f$的积分值。进而证明在$I$内仅有有限个不连续点的有界函数是可积的；改变可积函数的有限个点的值，函数仍可积，而且积分值不变。

17. 设f是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上非负连续不恒等于零的函数。证明$\int_a^b f(x)dx>0$。若$f$只是非负可积的，结果如何？

18. 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，且对每一连续函数$g(x)$，都有$\int_a^b f(x)g(x)=0$，证明$f(x)=0$，$\forall x\in I$。

19. 证明定理5·8，〔提示：用$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})]$对每一项应用中值定理。〕

§5·2 黎曼积分

黎曼提出另一种直接用和的极限定义积分的方法。

定义 设Δ是把$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$分解为子区间$I_1$，$I_2,\cdots,I_n$的划分。称$I_i$的长度$l(I_i)(i=1,2,\cdots n)$的最大值为$\Delta$的网孔，记为$\|\Delta\|$。设$f$定义在$I$上，于划分$\Delta$的每一子区间$I_i$中选取一点$x_i\in I_i$，作成的和$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)l(I_i)$，称为黎曼和。

对于非负函数如图5·6所示，当$\|\Delta\|$很小时黎曼和的几何意义是曲线下方图形面积的近似值。

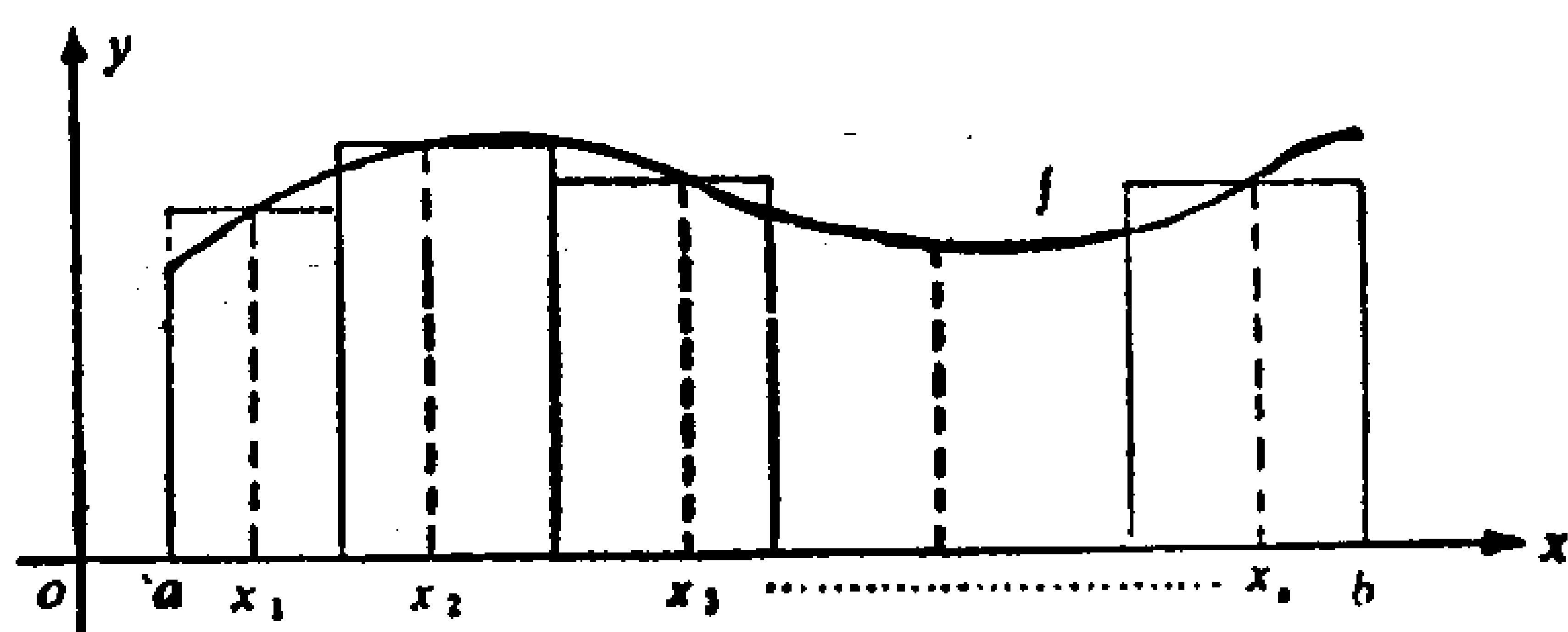


图 5·6

定义 I上定义的函数f称为黎曼可积的$\Longleftrightarrow\exists$一数$A$，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$相应的$\delta>0$，使当$\|\Delta\|<\delta$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-A\right|<\varepsilon. \tag{5·13}$$

对任意这样的划分Δ及$x_i\in I_i$的可能选取都成立。数A称为f的黎曼积分，表示成$A=\lim\limits_{|\Delta|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)$。

定理5·9 一个函数的黎曼积分是唯一的。

定理5·9由极限唯一性导出，留作习题。

定理5·10 若f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上黎曼可积，那么$f$在$I$上有界。

证明 于黎曼积分定义里取$\varepsilon=1$，Δ为使(5·13)成立的划分。即对选自I_i中的点x_i, x_i'，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-A\right|<1\text{及}\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i')l(I_i)-A\right|<1.$$

从而

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-\sum_{i=1}^{n} f(x_i')l(I_i)\right|<2.$$

现在对$i=2,3,\cdots,n$取$x_i=x_i'$，上面不等式成为

$$|f(x_1)-f(x_1')|l(I_1)<2 \Longleftrightarrow |f(x_1)-f(x_1')|<\frac{2}{l(I_1)}.$$

利用$|\alpha|-|\beta|\leqslant|\alpha-\beta|$的不等式，由$|f(x_1)-f(x_1')|<\frac{2}{l(I_1)}$，得

$$|f(x_1)|<\frac{2}{l(I_1)}+|f(x_1')|.$$

固定x_1'，让x_1取遍I_1，便得于I_1上$f(x)$有界。同理f在$I_2,I_3,\cdots I_n$上有界。所以f在I上有界。

定理5·11 若f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上黎曼可积，那么$f$在$I$上达布可积。以$A$表示黎曼积分，

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

证明 对$\forall\varepsilon>0$，由黎曼可积，$\exists$网孔充分小的划分Δ，对$\forall x_i\in I_i$有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)l(I_i)-A\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{5·14}$$

分别记 $M_i=\sup\limits_{x\in I_i} f(x)$，$m_i=\inf\limits_{x\in I_i} f(x)$。按$M_i$、$m_i$的定义，$I_i$中$\exists x_i'$、$x_i''$使

$$f(x_i')>M_i-\frac{\varepsilon}{4(b-a)},\quad f(x_i'')<m_i+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

于是可得

$$S^+(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}M_i\cdot l(I_i)<\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i')+\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right]l(I_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(x_i')l(I_i)+\frac{1}{4}\varepsilon.$$

再用(5·14)式，得

$$S^+(f,\ \Delta)<A+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=A+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5\cdot15)$$

同理，可得

$$S_-(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}m_i l(I_i)>\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i'')-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}\right]l(I_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}f(x_i')l(I_i)-\frac{\varepsilon}{4}.$$

以及

$$S_-(f,\Delta)>A-\frac{\varepsilon}{2} \qquad (5\cdot16)$$

由(5·15)减(5·16)式，得

$$S^+(f,\Delta)-S_-(f,\Delta)<\varepsilon,$$

于是f是达布可积的。并由(5·15)，(5·16)

$$A=\int_a^b f(x)dx.$$

为了证明达布可积函数是黎曼可积的，需要如下技术性的引理.

引理5·2 设f是定义在$[a,b]$上的有界函数，那么对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当划分Δ的$\|\Delta\|<\delta$有

$$S^+(f,\Delta)<\overline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon,$$

$$S_-(f,\Delta)>\underline{\int_a^b} f(x)dx-\varepsilon. \qquad (5\cdot17)$$

证明 仅需证明对$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1$，使当$\|\Delta\|<\delta_1$有(5•17)的第一个不等式成立。另一个其证明类似。

为此，由$\overline{\int_a^b} f(x)dx$定义，存在$I$的划分$\Delta_0$，$\Delta_0=\{I_1, I_2, \cdots, I_k\}$（$K\geqslant 2$），$I_i=[t_{i-1}, t_i]$，$a=t_0<t_1<\cdots<t_K=b$，使

$$S^+(f,\Delta_0)<\overline{\int_a^b} f(x)dx+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5•18}$$

现在取一比$\min\limits_{1\leqslant i\leqslant K}\left\{(t_i-t_{i-1}), \dfrac{\varepsilon}{2(K-1)(M-m)}\right\}$小的$\eta$，

并设Δ为$\|\Delta\|<\eta$的划分。由$\|\Delta\|<\eta$，至多可能有$K-1$个Δ的子区间J_1，$J_2,\cdots$，J_p（$p\leqslant K-1$）包含某一t_i为其内点，且设Δ的其余子区间是K_1，K_2，$\cdots$，K_q。现记Δ与Δ_0的共同细分为Δ'。Δ'由子区间$K_1,K_2,\cdots,K_q$，以及J'_j与J''_j（$j=1,2,\cdots p$）$2p$个子区间，共$2p+q$个子区间组成，J'_j与J''_j是J_j由t_i点分成的两子区间。对Δ与Δ'分别写出相应的达布上和

$$\begin{aligned} S^+(f,\Delta)&=\sum_{j=1}^{p} M_j l(J_j)+\sum_{K=1}^{q} M_K^* l(K_K) \\ S^+(f,\Delta')&=\sum_{j=1}^{p}[M'_j l(J'_j)+M''_j l(J''_j)]+\sum_{K=1}^{q} M_K^* l(K_K) \end{aligned} \tag{5•19}$$

其中M_j，M'_j,M''_j及M_k^*是f在相应的J_j,J'_j,J''_j,K_k上的上确

界。因为对每一j

$$l(J_j)=l(J_j')+l(J_j''),\quad m\leqslant M_j,\ M_j',\ M_j''\leqslant M,$$

因此

$$S^+(f,\Delta)-S^+(f,\Delta')\leqslant(M-m)\sum_{j=1}^{p}l(J_j)$$

$$\leqslant(K-1)(M-m)\eta<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5\cdot20)$$

综合（5·18），（5·19）及（5·20）式导出

$$S^+(f,\Delta)<S^+(f,\Delta_0)+\frac{\varepsilon}{2}<\overline{\int_a^b}f(x)dx+\varepsilon.$$

定理5·12 函数f是黎曼可积的$\Longleftrightarrow f$是达布可积的并且两种积分相等。

证明 仅需证明定理5·11的逆命题成立，即当f达布可积它是黎曼可积的。对$\forall\ \varepsilon>0$，δ是按引理5·2所选，使当划分Δ的网孔$\|\Delta\|<\delta$，有

$$\int_a^b f(x)dx-\varepsilon<S_-(f,\Delta)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(x_i)l(I_i)\leqslant S^+(f,\Delta)$$

$$<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon.$$

既然ε是任意的，得到

$$\lim_{\|\Delta\|\to0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)l(I_i)=A=\int_a^b f(x)dx.$$

即f黎曼积分A存在且等于达布积分。

根据定理5·12，可以去掉可积性叙述中的“达布”或“黎曼”而只说函数可积、不可积。

最后给出初等微积分中往往未予证明的积分的变量替换公式。

定理5·13 设f在开区间I内连续，u及u'是开区间J上的连续函数，u的值域包含在I内．若a，$b\in J$，那么

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du. \qquad (5·21)$$

证明 设$c\in I$并定义

$$F(u)=\int_c^u f(t)dt . \qquad (5·22)$$

由微积分基本定理（定理5·7），有

$$F'(u)=f(u),\ u\in I .$$

定义$G(x)=F[u(x)]$，应用链法则

$$G'(x)=F'[u(x)]u'(x)=f[u(x)]\cdot u'(x) .$$

因为所研究的函数都是连续的，因此

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx=\int_a^b G'(x)dx=G(b)-G(a)$$

$$=F[u(b)]-F[u(a)]$$

由（5·22）式，得出

$$F[u(b)]-F[u(a)]=\int_c^{u(b)} f(t)dt-\int_c^{u(a)} f(t)dt$$

$$=\int_{\bar{u}(a)}^{\bar{u}(b)} f(t)dt=\int_{\bar{u}(a)}^{\bar{u}(b)} f(u)du.$$

习　　题

1. (a) 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，证明达布上和、下和都是黎曼和。

   (b) 设f在I上递增，证明达布上和、下和都是黎曼和。

   (c) 给出一有界函数，它的达布和不是黎曼和。

2. 若f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上可积，且$0<m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in I$。证明$\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx$存在。

3. 设u，u'，v及v'是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续函数。证明部分积分法公式：

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(b)v(b)-u(a)v(a)-\int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

4. 举出一函数f，$|f|$在I上可积，f不可积。

5. 根据定义证明黎曼积分的唯一性（定理5·9）。

   〔提示：若有$A\neq A'$都适合（5·13）式会导致矛盾〕

6. 证明定理5·13可作如下推广。设u在$a\leqslant x\leqslant b$上连续，$u'(x)$在$a<x<b$连续，且$x\to a^+$及$x\to b^-$，u'存在极限。不妨认为$u(a)<u(b)$，定义

$$f_0(u)=\begin{cases} f(u) & \text{当} u(a)\leqslant u\leqslant u(b) \\ f[u(a)] & \text{当} u\leqslant u(a) \\ f[u(b)] & \text{当} u\geqslant u(b) \end{cases}$$

$$u_0(x)=\begin{cases}u(x) & 当a\leqslant x\leqslant b\\ u(a)+u'(a)(x-a) & 当x\leqslant a\\ u(b)+u'(b)(x-b) & 当x\leqslant b.\end{cases}$$

这里$u'(a)$及$u'(b)$是$u'(x)$的极限值。公式（5·21）仍成立。

7. 叙述u，v，f满足什么条件能使下面公式成立：

$$\int_a^b f[u(v(x))]u'[v(x)]v'(x)dx=\int_{u[v(a)]}^{u[v(b)]}f(u)du.$$

*8. 设f与g在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上可积。那么$f^2$，$g^2$与$fg$是可积的。并证明哥西—许瓦兹不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\cdot\left[\int_a^b g^2(x)dx\right].$$

〔提示：注意对所有Z有$\alpha Z^2+2\beta Z+r\geqslant 0$并令

$$\alpha=\int_a^b f^2(x)dx,\ \beta=\int_a^b f(x)g(x)dx,\ \gamma=\int_a^b g^2(x)dx.〕$$

§5·3 对数函数与指数函数

中学数学是基于幂的概念来定义指数、对数概念的。现在基于微积分理论给出对数函数、指数函数的解析定义。

定义 自然对数函数表示为$\log x$，其定义为

$$\log x=\int_1^x\frac{1}{t}dt,\ x>0\ .$$

定理5·14 设$f: x\to\log x$，$x>0$，a,b是正数。

那么（i）$\log(ab)=\log a+\log b$ 。

（ii）$\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$ 。

（iii）$\log 1=0$ 。

（iv）$\log(a^r)=r\log a$，r为有理数。

（v）$f'(x)=\frac{1}{x}$ 。

（vi）f在$I=\{x: 0<x<+\infty\}$上递增连续。

（vii）$\frac{1}{2}\leqslant\log 2\leqslant 1$ 。

（viii）$\log x\to+\infty$，当$x\to+\infty$。

（ix）$\log x\to-\infty$，当$x\to 0^+$。

（x） f的值域是R_1。

证明 为证明（i），记

$$\log(a\cdot b)=\int_1^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^a\frac{1}{t}dt+\int_a^{ab}\frac{1}{t}dt.$$

于 $\int_a^{ab}\frac{1}{t}dt$中换变量，令$u=\frac{t}{a}$，有

$$\int_a^{ab}\frac{1}{t}dt=\int_1^b\frac{1}{u}du.$$

因此 $$\log a\cdot b=\log a+\log b.$$

为证(ii)，应用(i)于$a=b\cdot\frac{a}{b}$得到

$$\log a=\log b+\log\frac{a}{b},$$

即（ii）成立。

于（ii）中令$a=b$便得（iii）。

我们分几步证明（iv）．若r是正整数，由（i）在$a=b$时的结果，并应用数学归纳法可得（iv）．对于负整数由$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$并应用（ii）可得（iv）．最后若$r=\frac{p}{q}$，p，q是整数，令$u=a^{\frac{1}{q}}$，$u^q=a$.因此$q\log u=\log a$.因为

$$a^r=a^{\frac{p}{q}}=u^p,$$

有 $\log(a^r)=\log(u^p)=p\log u=\frac{p}{q}\log a=r\log a.$

（v）由微积分基本定理即得。

对于（vi），因为$f'(x)=\frac{1}{x}>0$，$x\in[1,\infty)$，所以f递增，可微函数必定是连续的。

为证明(vii)的不等式，用达布上和、下和便得，细节留给读者。(vii)的几何意义如图5·7所示。

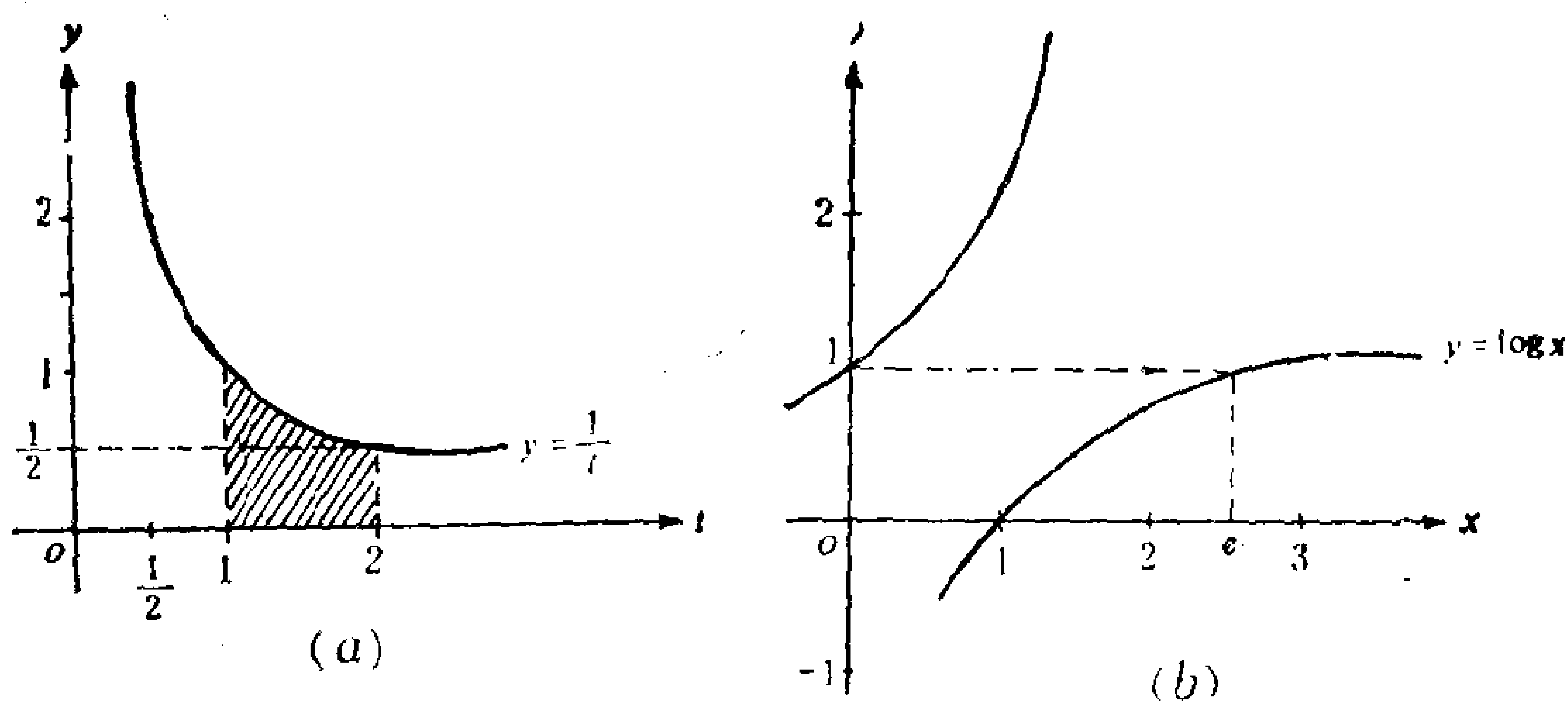


图 5·7

为证(viii)，设n为正整数，当$x>2^n$，由(vi)

$$\log x>\log(2^n)=n\log 2>\frac{n}{2}.$$

设M是正数，取$n>2M$，当$x>2^n$时，$\log x>M$。于是(viii)成立。当取$x<2^{-n}$，(ix)便得证。

由(viii)，(ix)及介值定理导出(X)。

由以上定理之(vi)，对数函数是递增的，其反函数存在，所以下面的定义是合理的。

定义 对数函数的反函数称为指数函数，表示为$\exp x$。

定理5·15 若$f: x\longrightarrow \exp x$是指数函数，那么

(i) f在$\mathbf{R}_1$上递增连续，其值域为$\{x: 0<x<+\infty\}$。

(ii) $f'(x)=\exp x$，$x\in \mathbf{R}_1$。

(iii) $\exp(x+y)=(\exp x)\cdot(\exp y)$。

(iv) $\exp(x-y)=(\exp x)/(\exp y)$。

(v) $\exp(rx)=(\exp x)^r$，r为有理数。

（vi）当$x\to+\infty$，$f(x)\to+\infty$。

（vii）当$x\to-\infty$，$f(x)\to0$。

（viii）$\log(\exp x)=x$，$x\in R_1$。

（ix）若$a>0$且r是有理数，那么$\exp(r\log a)=a^r$。

证明 （i），（viii）是反函数定理（定理4·17）的直接推论。

为证明（ii），首先令$y=\exp x$。由反函数可微性的定理4·18，exp是可微的。应用链法则于$\log y=x$，导出$\frac{1}{y}\cdot y'=1$，即$y'=y=\exp x$。

为了证明（iii），令$y_1=\exp x_1$，$y_2=\exp x_2$，那么$x_1=\log y_1$，$x_2=\log y_2$，以及$x_1+x_2=\log y_1+\log y_2=\log y_1\cdot y_2$因而

$$\exp(x_1+x_2)=y_1y_2=(\exp x_1)\cdot(\exp x_2).$$

类似于（iii）的证明可证得(iv)，

（v）的证明能按定理5·14之（iv）那样归纳地证明。(vi)及(vii)由对数的相应结果导出（参看图5·7），图中$\exp x$的图象与$\log x$的图象关于直线$y=x$对称。

（ix）由$\exp(r\log a)=\exp[\log(a^r)]=a^r$根据定理5·14的(iv)及(viii)可得。

当x为有理数，$a>0$，分数指数的幂a^x能用初等方法定义：$x=\frac{p}{q}$（p,q为整数），a^x是a的p次幂的q次方根。但形如$3^{\sqrt{2}}$，$(\sqrt{7})^{\pi}$这样的量不能用初等方法定义。采用如下方法来把a^x的定义域由有理数域扩充为实数域。

定义 设$a>0$，$x\in R_1$，定义

$$a^x=\exp(x\log a).$$

注意到x取有理数时，$a^x=\exp(x\log a)$即定理5·15中的(ix)。可见这里的定义是“乘幂”概念的推广。

定理5·16 设$f:x\to a^x$，$a>0$，那么

(i) f是R_1上定义的正值连续函数。

(ii) $a\neq 1$时，f的值域为$I=\{x:0<x<+\infty\}$。

(iii) 当$a>1$，f递增；当$a<1$，f递减。

定理5·16直接由a^x的定义及定理5·14与定理5·15导出，请读者给出它的证明。

由定理5·16的(iii)，对$b>0$，$b\neq 1$；$x\to b^x$是单调函数，存在反函数，引入

定义 函数$f:x\to b^x$ ($b>0$，$b\neq 1$)的反函数称为以b为底的对数函数，记为$\log_b x$。当$b=10$，称$\log_{10}x$为常用对数。

定理5·17 设$a>0$，$b>0$，$f:x\to a^x$，那么

(i) $a^x\cdot a^y=a^{x+y}$；$a^x/a^y=a^{x-y}$；

$(a^x)^y=a^{xy}$；$(ab)^x=a^x\cdot b^x$；$(a/b)^x=a^x/b^x$。

(ii) $f'(x)=a^x\cdot\log a$。

(iii) $b\neq 1$，$\log_b x=\log x/\log b$。

(iv) $b\neq 1$，函数$g:x\to\log_b x$在$I=\{x:0<x<\infty\}$上连续。

(v) $a\neq 1$，$b\neq 1$，$\log_b x=(\log_a x)\cdot(\log_b a)$。

(vi) $b\neq 1$，$x>0$，$y>0$，$\log_b(x\cdot y)=\log_b x+\log_b y$；$\log_b(x/y)=\log_b x-\log_b y$；$\log_b(x^y)=y\log_b x$；$\log_b 1=0$。

定义 $e=\exp 1$.

定理5·18 关于e有

(i) $\log_e x=\log x$, $x>0$,

(ii) $\exp x=e^x$, $x\in\mathbf{R}_1$.

(iii) 设$f: x\to x^n$, n为任意实数，那么

$$f'(x)=nx^{n-1}.$$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

注 (i)与(ii)是定义的直接推论. (iii)可由 $x^n=\exp(n\log x)$ 按链法则求导得出. 在初等微积分中仅对n是自然数或有理数证过，现在得到了n为实数的一般结果. (iv)由$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\exp\left[\frac{1}{x}\log(1+x)\right]$, 及由exp连续，并且$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}\log(1+x)\right]=1$得出. (iv)表明$x$很小时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}$可作为$e$的近似值. 证明的细节留给读者.

习　题

1. 证明定理5·16中$f: x\to a^x$的三条性质.
2. 证明定理5·17之(i)所述$f: x\to a^x$指数律.
3. 证明定理5·17之(ii)$f'(x)=a^x\log a$.
4. 证明定理5·18之(iii), n为实数，$f: x\to x^n$, 有$f'(x)=nx^{n-1}$.
5. 证明　$2<e<4$.
6. 证明　$\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ (定理5·18(iv)).

7. 若$x>-1$，证明 $\log(1+x)\leqslant x$。

8. 证明 $x\in \mathrm{R}_1$，$e^x\geqslant 1+x$。

9. 证明 $F: x\to\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$是递增函数。

10. 设$f: x\to\log x$，由导数定义，可知$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\frac{1}{x}$，由此导出 $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$。

§5·4 约当测度

现在介绍R_2中有界点集的“面积”理论。有界点集S是指可以被某一矩形包含的集，可以设想S如图5·8所示，S是由曲线围成的区域。但以下的讨论对任意的有界集都适用。

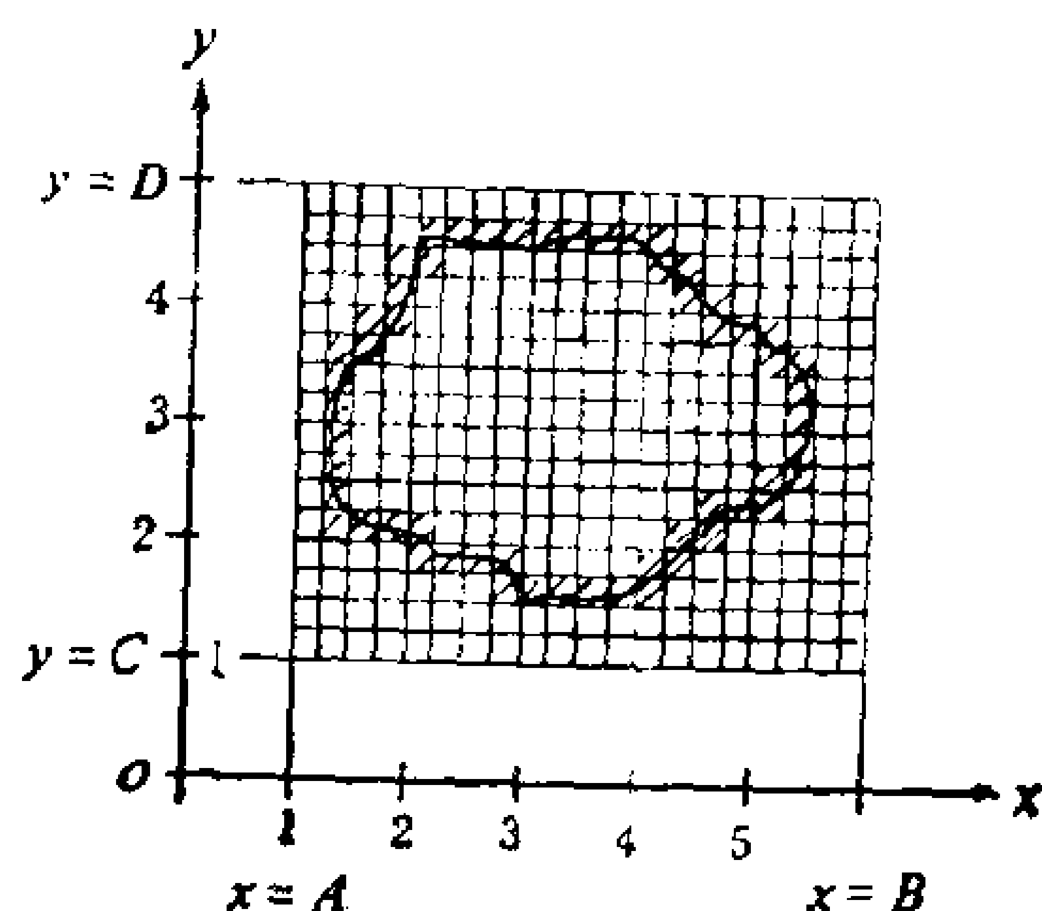


图 5·8

基于正方形的面积，用正方形度量S，逐次地提高度量的精度，以极限的方法得到S的可测性及其面积。在平面直角坐标系中，取内部包含S的矩形R，设R由$x=A$，$x=B$，$y=C$，$y=D$四条直线所围成，这里A、B、C、D都取整数。这样，当$(x,y)\in S$时，有

$$A<x<B,\qquad C<y<D.$$

对每个自然数n，画出所有的直线$x=\frac{i}{2^n}$，$y=\frac{j}{2^n}$（i，j为整数），这两组直线把平面划分成无穷多个边长为$\left(\frac{1}{2}\right)^n$的正方形，每个正方形的点（$x,y$）满足：

$$\frac{i-1}{2^n}\leqslant x\leqslant\frac{i}{2^n},\quad \frac{j-1}{2^n}\leqslant y\leqslant\frac{j}{2^n}. \qquad (5\cdot23)$$

定义 称（5·23）表示的正方形为第n阶格的方形。包含在S内的方形称为S的内方形。至少含有S的一个点的方形称之为S的覆盖方形。

对于每一n，显然每个单位方形（边长为1）含有4^n个n阶格的方形。由A、B、C、D是整数，包含S的矩形$R=\{(x,y):A\leqslant x\leqslant B,\ C\leqslant y\leqslant D\}$含有$4^n(B-A)(D-C)$个$n$阶格的方形。很自然，考察量

$$A_n^-(S)=\frac{1}{4^n}\text{乘}S\text{的内方形个数},$$

$$A_n^+(S)=\frac{1}{4^n}\text{乘}S\text{的覆盖方形个数}.$$

$A_n^-(S)$表示S的所有n阶格内方形并的面积。$A_n^+(S)$表示S的所有n阶格覆盖方形并的面积。

引理5·2 S的每个覆盖方形r含于R之内。

证明 设$(x,y)\in S\cap r$，因此x,y满足不等式：

$$A<x<B,\qquad C<y<D,$$

$$\frac{i-1}{2^n}\leqslant x\leqslant\frac{i}{2^n},\quad \frac{j-1}{2^n}\leqslant y\leqslant\frac{j}{2^n}\ （i,j\text{为整数}）.$$

于是 $\frac{i}{2^n}>A$，即$i>2^nA$，由A是整数，便有$i-1\geqslant 2^nA$，即$\frac{i-1}{2^n}\geqslant A$.同理，由$\frac{i-1}{2^n}\leqslant x<B$得$(j-1)<2^n\cdot B$，进而$j\leqslant 2^nB$。于是

$$A\leqslant\frac{i-1}{2^n}<\frac{i}{2^n}\leqslant B.$$

同样应有

$$C\leqslant\frac{j-1}{2^n}<\frac{j}{2^n}\leqslant D,$$

所以$r\subset R$。

量$A_n^-(S)$及$A_n^+(S)$类似于$S_-(f,\Delta)$及$S^+(f,\Delta)$，它们的基本性质如下：

定理5·19 设$S\subset R$，$R=\{(x,y):A<x<B,\ C<y<D\}$.那么

(a) $0\leqslant A_n^-(S)\leqslant A_n^+(S)\leqslant(B-A)(D-C)$，对$\forall n$成立。

(b) $A_{n+1}^-(S)\geqslant A_n^-(S)$.

(c) $A_{n+1}^+(S)\leqslant A_n^+(S)$.

(d) 序列$A_n^+(S)$，$A_n^-(S)$收敛，分别以$A^+(S)$，$A^-(S)$表示它的极限，且有
$0\leqslant A^-(S)\leqslant A^+(S)\leqslant(B-A)(D-C)$.

(e) $A_n^-(S)$，$A_n^+(S)$，$A^-(S)$，$A^+(S)$与包含S的矩形

R的选取无关。

证明 (a) 由引理5·3以及$A_n^-(S)$，$A_n^+(S)$的定义，且R内恰有$4^n(B-A)(D-C)$个n阶格的方形导出。(b) 若r是n阶格的一方形，当r是S的内方形，那么在$n+1$阶格中r被分成的四个方形都是S的$n+1$阶格的内方形。(c) 若r'是($n+1$)阶格中S的一覆盖方形。r'包含S的点(x,y)，那么包含r'的n次格中的方形r也包含(x,y)点，即r是S的一覆盖方形。由(a)，(b)及(c)可知$A_n^-(S)$递增有上界，$A_n^+(S)$递减有下界，便得(d)。(e)是明显的。

定义 数$A^-(S)$，$A^+(S)$分别称为S的内面积，外面积。如果$A^-(S)=A^+(S)$，称点集S是约当可测图形简称图形。定义其面积为$A^-(S)=A^+(S)$的值。

当$A^-(S)<A^+(S)$时，点集S在约当意义下没有面积。例如，$S\{(x,y): x, y$表示0，1之间的有理数$\}$ S不含有内方形，$A_n^-(S)=0$，$A^-(S)=0$；很明显矩形$R=\{(x, y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$的每一$n$阶格的方形都是$S$的覆盖方形，即$A_n^+(S)=1$，$A^+(S)=1$。

既然不是每一有界集都是图形，因此找出判定点集为图形的定理就是很重要的了。为了叙述这样的定理，先补充介绍一些有关R_2点集的概念。

若S_1，S_2是集，定义S_1-S_2(或$S_1\sim S_2$)为不属于S_2的S_1的点组成的集。点P_0称为S的内点$\Longleftrightarrow$它是含于S内的某个圆的中心点。S的全体内点的集表示为$S^{(0)}$。以$|P_1, P_2|$表示点$p_1(x_1, y_1)$与点$p_2(x_2, y_2)$之间的距离$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。点$p_0(x_0, y_0)$是$S$的极限点$\Longleftrightarrow$ $\exists$序列$\{p_n(x_n, y_n)\}$，$p_n\in S$，$p_n\neq p_0$，且有$|p_0, p_n|\to$

$\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}\to 0$。$S$与它的极限点的集的并集称为$S$的闭包，记为$\overline{S}$.若$S=\overline{S}$，$S$称为闭集.集$\overline{S}-S^{(0)}$称为$S$的边界.

引理5·4 设$R=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$是$R_2$内的矩形,那么(i)$R$是闭集.(ii)$R^{(0)}=\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$.

证明 (i)的证明留给读者.现证(ii),显然集$\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}\subset R$.设$(x_0,y_0)$是$R$的一个内点，那么$\exists$某一$\rho>0$，使所有满足$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant\rho^2$的点$(x,y)\in R$.其中的点$(x,y_0)$，$x_0-\rho\leqslant x\leqslant x_0+\rho$与点$(x_0,y)$，$y_0-\rho\leqslant y\leqslant y_0+\rho$都属于$R$（图5·9）.这就表明$a\leqslant x_0-\rho<x_0<x_0+\rho\leqslant b, c\leqslant y_0-\rho<y_0<y_0+\rho\leqslant d$成立.于是$(x_0,y_0)\in\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$.由$(x_0,y_0)$是$R$的任意的内点，所以$R^{(0)}\subset\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$.相反的关系$R^{(0)}\subset\{(x,y): a<x<b,\ c<y<d\}$留作习题.

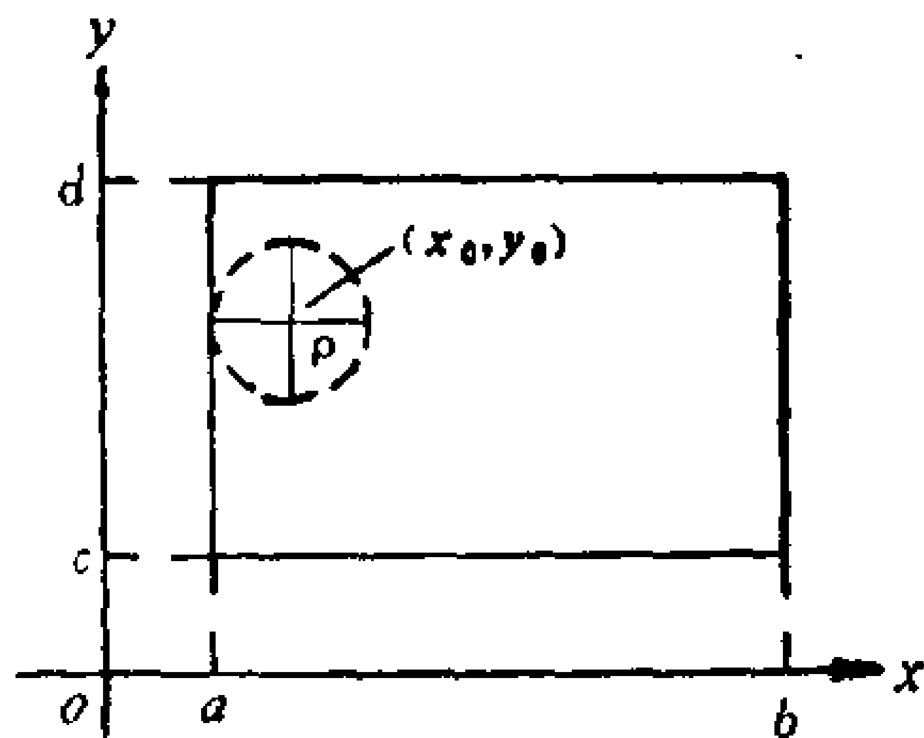


图 5·9

下面证明一些直观上很明显的关于面积性质的定理.

定理5·20 设S_1，S_2，…，S_p都是有界集.

(a) 若$S_1\subset S_2$，那么$A^-(S_1)\leqslant A^-(S_2)$，$A^+(S_1)\leqslant A^+(S_2)$.

(b) $A^+(S_2\cup S_2\cup\cdots\cup S_p)\leqslant A^+(S_1)+\cdots+A^+(S_p)$.

(c) 若任两集都没有共同内点，那么

$$A^-(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_p)\geqslant A^-(S_1)+\cdots+A^-(S_p).$$

(*d*) 若每一S_i都是图形，那么$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_p$是图形。若任两集都没有共同内点，那么

$$A(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_p)=A(S_1)+A(S_2)+\cdots+A(S_p).$$

(*e*) 若$R=\{(x,y);\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$是矩形，那么$R$与$R^{(0)}$都是图形，且

$$A(R^{(0)})=A(R)=(b-a)(d-c).$$

证明 (*a*) S_1的内方形、覆盖方形必定分别是S_2的内方形、覆盖方形。因此对$\forall n$,

$$A_n^-(S_1)\leqslant A_n^-(S_2),\quad A_n^+(S_1)\leqslant A_n^+(S_2),$$

据定理5·19及极限不等性定理得：

$$A^-(S_1)\leqslant A^-(S_2),\quad A^+(S_1)\leqslant A^+(S_2).$$

(*b*) 的证明留给读者。

为证(*e*)，设r是诸S_i中某个S_{i_0}集的内方形，当然r是S_i的并的一内方形，当$i_0\neq j$时S_{i_0}与S_j不含有共同内点，那么r不能是S_j的内方形（否则，$S_j\cap S_{i_0}$含有共同内点）。因此，

$$A_n^-(S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_p)\geqslant A_n^-(S_1)+\cdots+A_n^-(S_p). \tag{5·24}$$

如图5·10所示，（5·24）式之不等号可能出现。

(*d*) 的证明也留给读者。

(*e*) 只证明R的结论，$R^{(0)}$的结论类似可证。对每一n，设i_n是满足$i_n-1<a\cdot 2^n\leqslant i_n$的唯一整数且定义$a_n=\frac{i_n-1}{2^n}$，$a_n'=\frac{i_n}{2^n}$（图5·11）。同样定义$b_n$，$b_n'$，$c_n$，$c_n'$，$d_n$，$d_n'$，使

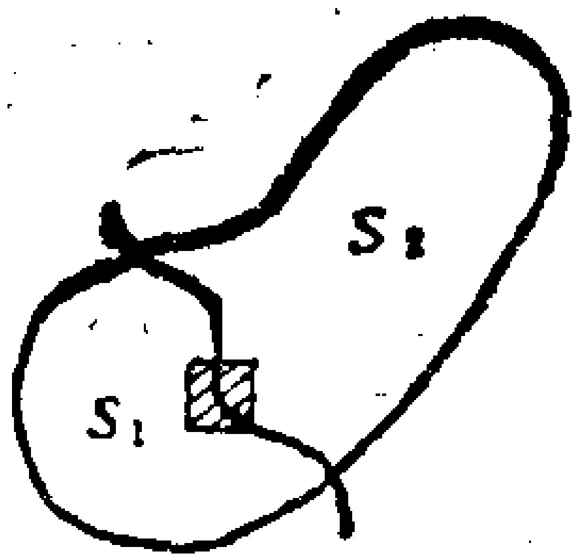


图 5·10

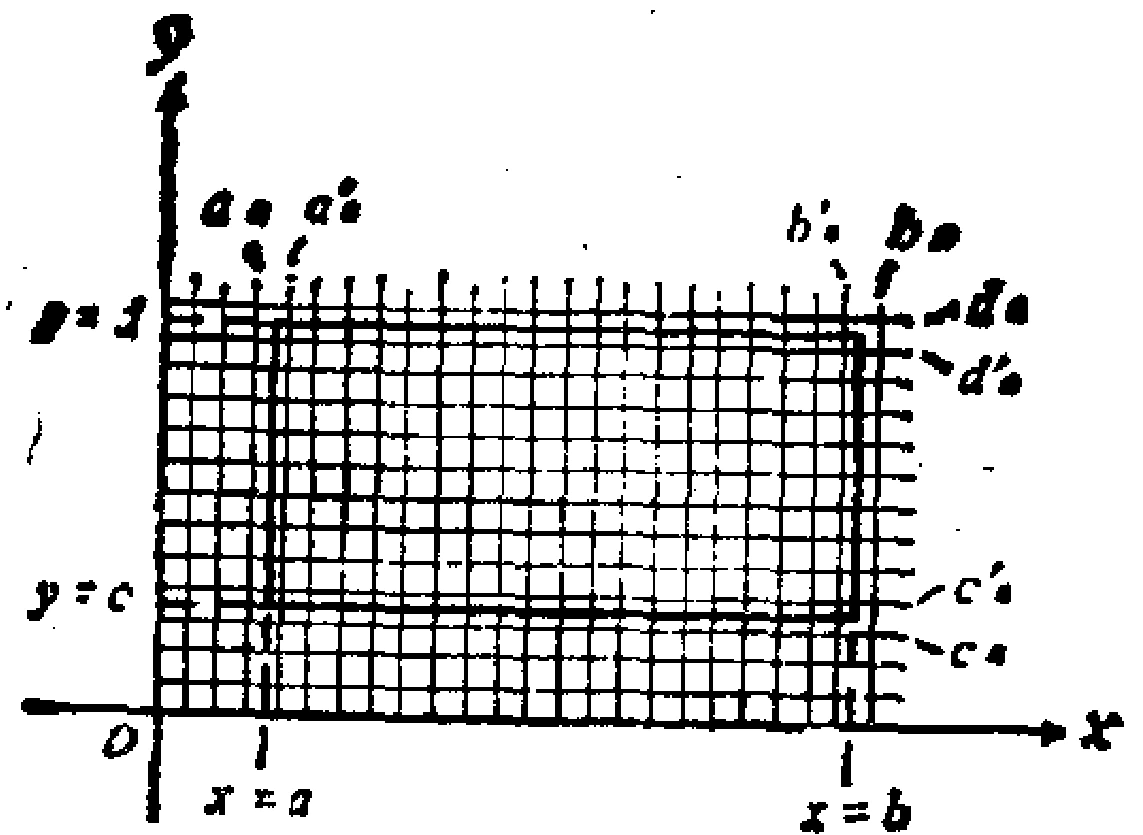


图 5·11

$$a_n < a \leqslant a_n', \qquad b_n' \leqslant b < b_n,$$

$$a_n' - a_n = b_n - b_n' = \frac{1}{2^n}\cdots\cdots \tag{5·25}$$

R的相应的

$$A_n^-(R) = (b_n' - a_n')(d_n' - c_n'),$$
$$A_n^+(R) = (b_n - a_n)(d_n - c_n). \tag{5·26}$$

由（5·25）可知 $a - \frac{1}{2^n} \leqslant a_n < a$，因此$a_n \to a$，$a_n' \to a$。同理 $b_n \to b$，$b_n' \to b$，$C_n \to C$，$C_n' \to C$，$d_n \to d$，$d_n' \to d$。对（5·26）式取极限，便得$A^-(R) = A^+(R) = (b-a)(d-c)$。

点集S的边界方形定义为n阶格中S的非内方形的覆盖方形。图5·8中划暗线的方形表示S的边界方形。S为图形的明显、直观的特征是图形边界的面积等于零，S边界的面积定义为$A^+(S) - A^-(S)$。

引理5·5 （a）n阶格的方形r是S的边界方形$\Longleftrightarrow r$既包含S的点又包含不属于S的点。

（b）集S是一图形$\Longleftrightarrow n$阶格的S的边界方形并的面积随$n\longrightarrow\infty$趋向于零。

引理是边界方形定义及图形定义的直接推论。它的证明留给读者。

下一定理说明有限个图形的并、交还是图形。

定理5·21 设S_1，S_2，…，S_p（$p\geqslant 2$）都是图形，那么$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_p$，$S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_p$及差$S_1-S_2$都是图形。图形边界的面积等于零。

证明 对$p=2$证明$S_1\cup S_2$是图形，一般情况由数学归纳法得到。设r是$S_1\cup S_2$的n阶格的一边界方形。r含有$S_1\cup S_2$的点p也含有不属于$S_1\cup S_2$的点q。q不属于S_1，也不属于S_2，p至少属于S_1，S_2两者之一。这表明r至少是S_1，S_2两者之一的边界方形。于是

$$0\leqslant A_n^+(S_1\cup S_2)-A_n^-(S_1\cup S_2)\leqslant(A_n^+(S_1)-A_n^-(S_1))+(A_n^+(S_2)-A_n^-(S_2))$$

由引理5·5（b）及两边夹极限定理、和的极限定理有$A^+(S_1\cup S_2)-A^-(S_1\cup S_2)=0$，即$S_1\cup S_2$是图形。

关于图形的交。差仍是图形的证明留给读者。

习　题

1. 证明引理5·4（i）。
2. 证明引理5·4（ii）中$\{(x,y):a<x<b,\ c<y<d\}\subset R^{(0)}$。
3. 证明定理5·20的（b）。
4. 证明定理5·20的（d）。

5. 证明引理5·5。

6. 证明定理5·21中$S_1 \cap S_2$，$S_1 \setminus S_2$是图形。

·7. 设f是$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上有界函数，$\forall x \in I$，$c < f(x)$，$F_1 = \{(x,y): a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y < f(x)\}$，$F_2 = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant f(x)\}$（图5·12），那么

$$\int_{-a}^{b} [f(x) - c] dx \leqslant A^-(F_1) \leqslant A^-(F_2),$$

$$\int_{a}^{-b} [f(x) - c] dx \geqslant A^+(F_2) \geqslant A^+(F_1).$$

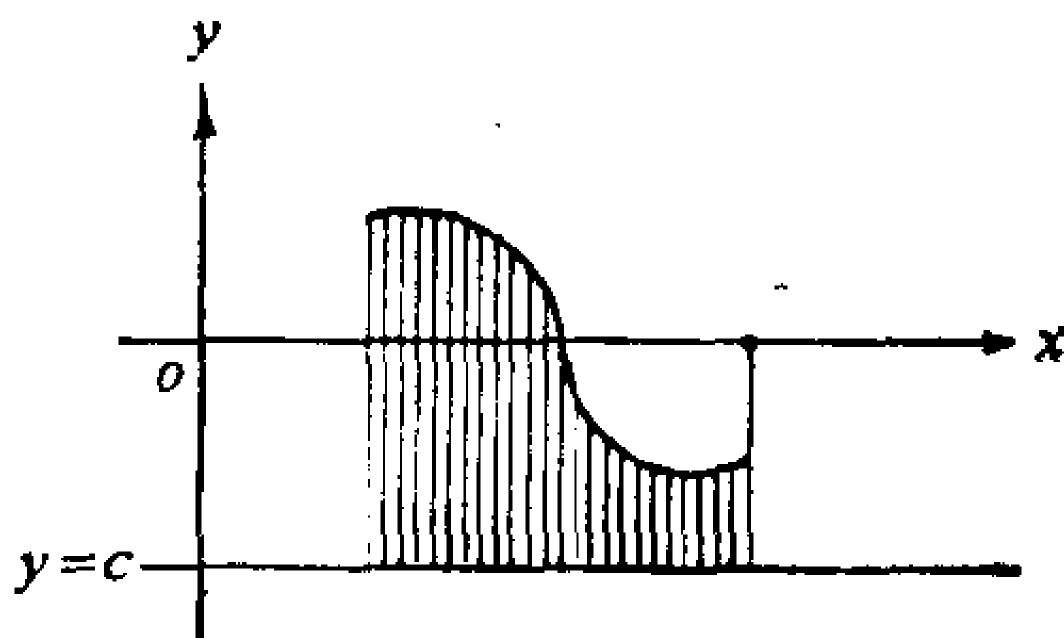


图 5·12

〔提示：定义$g(x) = f(x) - c$，$S_-(g, \Delta) \leqslant A^-(F_1)$。〕

8. 证明定理：设f与g在$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上可积，$\forall x \in [a, b]$，$f(x) \leqslant g(x)$，$S = \{(x, y): a \leqslant x \leqslant b,\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x)\}$，那么$S$是图形并且

$$A(S) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx.$$

第六章　距离空间和映象

§6·1　许瓦兹不等式与三角形不等式，距离空间的概念

通常，数学分析下一步的任务是把$R_1 \to R_1$的函数的微积分理论一步步地推广为$R_2 \to R_1$、$R_3 \to R_1$等多元函数的微积分理论。简捷的办法是通过引入距离空间并研究距离空间之间的映象，把$R_2 \to R_1$、$R_3 \to R_1$等多元函数理论作为距离空间的映象理论的特例而得到。这种处理办法既便于透彻地理解基本概念的实质，又能较早地接触到近代分析的理论，有助于弄清近代分析发展的来龙去脉。

先介绍分析中很有用的许瓦兹不等式，下面是它的一种简单形式。

定理6·1（许瓦兹不等式）　设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$是$R_N$的元素，那么

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{N} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (6\cdot1)$$

（6·1）中等号成立$\Longleftrightarrow$所有$x_i=0$或$\exists\lambda$，使$y_i=\lambda x_i$，$i=1,2,\cdots N$。

证明　当每一$x_i=0$，（6·1）式等号成立。现设至少有一$x_i \neq 0$。由函数

$$f(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}(y_i-\lambda x_i)^2\geqslant 0$$

对一切λ值成立。令

$$A=\sum_{i=1}^{N}x_i^2,\quad B=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i,\quad C=\sum_{i=1}^{N}y_i^2,$$

那么$A>0$且$f(\lambda)=A\lambda^2-2B\lambda+C\geqslant 0$。显然关于$\lambda$的二次函数$f(\lambda)$的最小值是$\dfrac{AC-B^2}{A}\geqslant 0$，因此$AC-B^2\geqslant 0$，即（6·1）式成立。

若$\exists\lambda=\lambda_1$，使$f(\lambda_1)=0$，（6·1）式等号成立$\Longleftrightarrow$对所有i，$y_i-\lambda_1x_i=0$即$y_i=\lambda_1x_i$。

大家都知道，在欧几里得平面上三角形一边之长小于另两边之长的和。这一事实的一般化就是著名的三角形不等式。用许瓦兹不等式可得：

定理6·2（三角形不等式） 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$ 是R_N的元素，那么

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{N}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(6\cdot2)$$

（6·2）式中等号成立$\Longleftrightarrow$所有$x_i=0$或$\exists$非负数λ_1，使$y_i=\lambda_1x_i$，$i=1,2,\cdots,N$。

证明 对恒等式

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^2=\sum_{i=1}^{N}(x_i^2+2x_iy_i+y_i^2)=\sum_{i=1}^{N}x_i^2+$$

$+2\sum_{i=1}^{N}x_iy_i+\sum_{i=1}^{N}y_i^2$ 左端的$\sum_{i=1}^{N}x_iy_i$应用许瓦兹不等式，便得

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^2\leqslant\sum_{i=1}^{N}x_i^2+2\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{N}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{i=1}^{N}y_i^2,$$

即

$$\sum_{i=1}^{N}(x_i+y_i)^2\leqslant\left[\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{N}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2.$$

将上一不等式开平方，便得（6·2）式。

若所有$x_i=0$，（6·2）中等号成立。若有某$x_i\neq0$，等号成立$\Longleftrightarrow$应用定理6·1时，式（6·1）的等号成立，即$\exists\lambda_1$，$y_i=\lambda_1x_i$，为保证x_iy_i非负，λ_1非负

推论 设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，$y=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$，$z=(z_1, z_2, \cdots z_N)$是$R_N$的元素，那么

$$\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{N}(y_i-z_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(6\cdot3)$$

（6·3）式中等号成立$\Longleftrightarrow\exists$数$r$，$0\leqslant r\leqslant1$，使

$$y_i=rx_i+(1-r)z_i,\quad i=1, 2, \cdots, N.$$

证明 令$a_i=x_i-y_i$，$b_i=y_i-z_i$，$i=1, 2, \cdots, N$。不等式（6·3）化成关于$a=(a_1, a_2, \cdots, a_N)$，$b=(b_1,$

b_2, …, b_N)的（6·2）式。$r=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1}$，$\lambda_1$为定理6·2中的$\lambda_1$。

注　推论中（6·3）式是N维欧几里得空间中三角形的边长关系，（6·3）式中等号成立的含意是x，y，z在同一直线上，且y在x，z之间．

从现在起本章所讨论的集，不限于$\mathbf{R}_N$中的点集。凡能确定元素是否属于该集合的集都可作为研究对象。

定义　设S，T都是集。S与T的笛卡尔乘积记为$S\times T$是所有序偶（p，q）的集，$p\in S$，$q\in T$。有限个集$S_1, S_2, \cdots$，S_N的笛卡尔乘积是N元序组$(P_1, P_2, \cdots, P_N)$的集，$P_i\in S_i$，$i=1,2$，…，N，记为$S_1\times S_2\times\cdots\times S_N$。

例

（1）空间$\mathbf{R}_N$是N个$\mathbf{R}_1$的笛卡尔乘积$\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_1\times\cdots\times\mathbf{R}_1$。

（2）$I_1=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$，$I_2=\{y: c\leqslant y\leqslant d\}$的笛卡尔乘积$I_1\times I_2$是矩形$T=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$，即$T=I_1\times I_2$。

（3）圆周$C=\{(x, y): x^2+y^2=1\}$与$\mathbf{R}_1$的笛卡尔乘积是$\mathbf{R}_3$中的正圆柱面U：

$$U=\{(x, y, z): x^2+y^2=1, -\infty<z<\infty\}=C\times\mathbf{R}_1.$$

定义　设S是非空集，d是由$S\times S$到$\mathbf{R}_1$的函数。S与d构成一个距离空间，如果函数d满足下列条件：

（i）$(x,y)\in S\times S$，$d(x,y)\geqslant 0$；

$d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$。

（ii）$d(y,x)=d(x,y)$，$(x,y)\in S\times S$。

（iii）$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$，$x,y,z$是$S$的元素。

函数d称为S内的距离函数。距离空间由偶(S,d)组成。

距离空间的例子：

（1）在空间R_N内选取$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$x$，$y\in R_N$．函数$d$是距离．事实上条件（i），（ii）显然，（iii）即定理6·2的推论．因此偶（R_N，d）是距离空间，d是欧几里得距离．

（2）在空间R_N中选取d_1

$d_1(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}|x_i-y_i|$，$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)$，

$y=(y_1, y_2, \cdots, y_N)$

可以验证d_1是距离函数，（R_N，d_1）是一距离空间．要注意（R_N，d_1）与例（1）之（R_N，d）是不同的．

（3）设S是非空集．定义

$$\overline{d}(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

显然$\overline{d}$满足距离的三条，（S，$\overline{d}$）是距离空间．这一例子说明任意的集总可以定义一距离，使之成为距离空间．当一个集或说一个空间，伴之一个距离使它成为距离空间，就说这个集或空间被距离化．象伴之$\overline{d}$这样的距离．仅能反映集中两个点是否重合，它几乎没有实际用处．

（4）设$C_{[0;1]}$是定义在$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$上的实值连续函数的集，对于$f$，$g\in C_{[0;1]}$，定义

$$d(f,g)=\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|f(x)-g(x)|,$$

不难验证d是距离．因此（$C_{[0;1]}$，d）是距离空间．

上述例子（1），（2），（3）说明对给定的集可能

有多种方法使之距离化。设S是集，(S, d_1)与(S, d_2)都是距离空间，称d_1与d_2等价$\Longleftrightarrow \exists$正数$c_1$，$c_2$使

$$c_1 d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y) \leqslant c_2 d_1(x,y) \quad (x,y) \in S \times S.$$

不难证明例（1）与（2）中d与d_1等价。若于R_N中取例(3)的$\overline{d}$使R_N距离化，$\overline{d}$与d或d_1不等价。

习　题

1. 证明例（2）中d_1是R_N上的距离。

*2. 设(S,d)是距离空间。$x,y \in S$定义$d_1(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$，证明$(S,d_1)$是距离空间。〔提示：研究$x \to \dfrac{x}{1+x}$，$0 \leqslant x$。〕

3. 判定R_N上距离$d(x,y)=\left(\sum\limits_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$与$d'(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$是否等价？

4. 证明例（1），（2）中距离d与d_1是等价的。

5. 证明(R_N, d_2)是一距离空间，这里$d_2(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{N}|x_i-y_i|$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$。$d_2$与习题1之$d_1$等价否？

6. 证明于$C_{[0;1]}$中选取的$d(f,g)=\max\limits_{0<x<1}|f(x)-g(x)|$是距离。

7. 证明于$C_{[0;1]}$中选取的$\overline{d}(f,g)=\int_0^1|f(x)-g(x)|dx$是

距离。

*8. 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n\cdots)$ 且

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\text{与}\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\text{都收敛。}$$

证明级数$\sum_{i=1}^{\infty}|x_iy_i|$收敛且有许瓦兹不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}x_iy_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(6\cdot4)$$

9. 设x, y如习题8所设。证明$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2$收敛并有三角形不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\qquad(6\cdot5)$$

(6·5) 式中等号成立$\Longleftrightarrow x=0$或$\exists\lambda\geqslant0$, 使$y_i=\lambda x_i$, $i=1,2,\cdots$。

10. 设$l_2=\{x: x=(x_1, x_2, \cdots), \sum_{i=1}^{\infty}x_i^2\text{收敛}\}$。定义

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}},\ x,\ y\in l_2.$$

证明 (l_2, d) 是距离空间。〔提示：用习题9的结果。〕

11. 设$M=\{x: x=(x_1,x_2,\cdots), x\text{为有界序列}\}$, 定义

$$d(x,y)=\sup_i|x_i-y_i|,\ x=(x_1,x_2\cdots),\quad y=(y_1,y_2,\cdots)$$

证明 (M, d) 是距离空间。

12. 设 $B=\{x: x=(x_1, x_2, \cdots), \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|$ 收敛 $\}$。定义

$$d(x, y)=\sum_{i=1}^{\infty}|x_i-y_i|, \quad x, y\in B.$$

证明 (B, d) 是距离空间。

13. 设 $C=\{(\cos\theta, \sin\theta: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\}$ 定义

$d^*(p_1,p_2)=|\theta_1-\theta_2|$, $p_1=(\cos\theta_1,\sin\theta_1)$,

$p_2=(\cos\theta_2,\sin\theta_2)$.

证明 (c, d^*) 是距离空间；若 d_1 如例 (1) 中定义的距离，(c, d_1) 是距离空间，d^* 与 d_1 是否等价？

*14. 设 S 是非空集，d 是 $S\times S\to \mathbf{R}_1$ 的非负实函数且具有性质：

(i) $d(x,y)=0\Longleftrightarrow x=y$

(ii) $d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(z,y) \qquad x,y,z\in S.$

证明 d 是距离函数。

§6·2 点集拓扑基础

直观上自然地想象距离空间如同欧几里得的平面或三维空间一样。这样的几何直观对于启发思路是很有益的，但是重要的是要识别哪些欧几里得几何的定义、定理。能够推广到一般距离空间，哪些对一般的距离空间不适用。本节研究距离空间的一些基本性质。

为了方便起见，仅用字母S表示距离空间，认为S有一相伴的距离d。

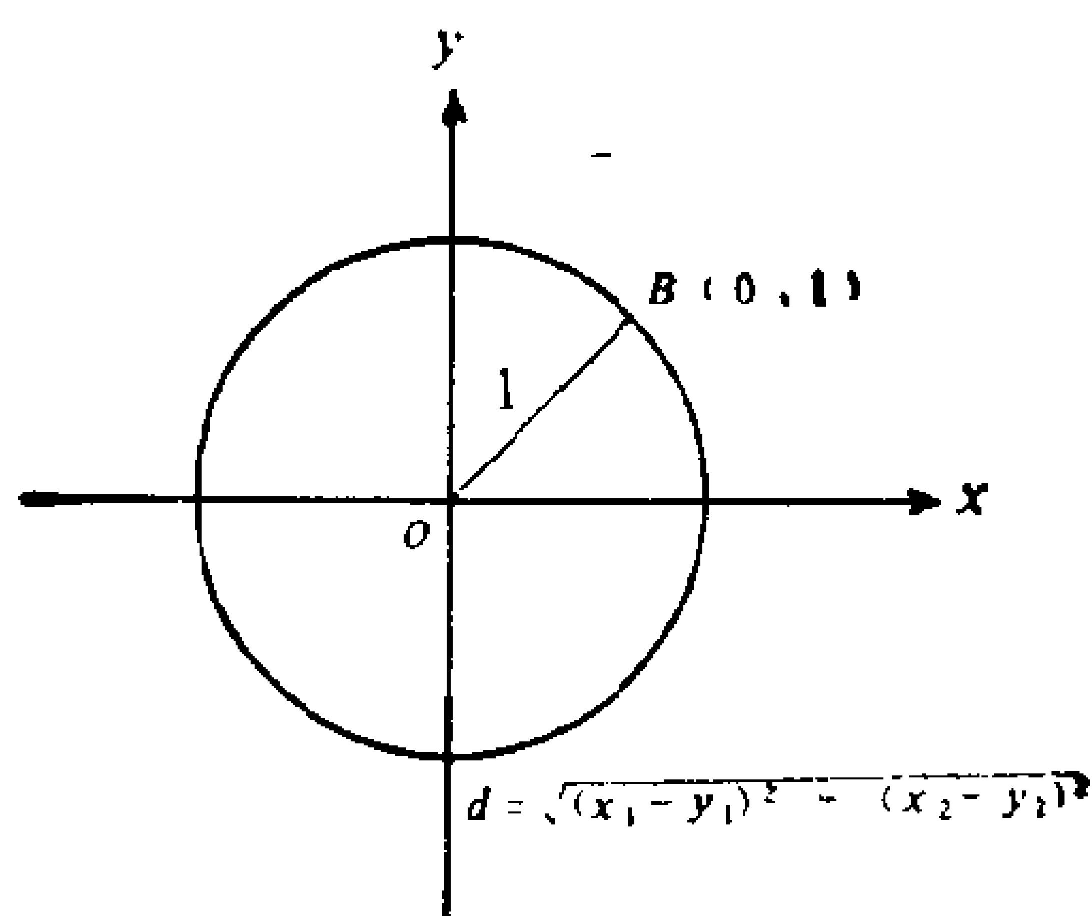
定义 $P_1, P_2, \cdots, P_n \cdots$表示距离空间元素的序列，记为$\{P_n\}$，$P_0 \in S$。称当$n \to \infty$时$P_n$趋向于$P_0 \Longleftrightarrow d\ (P_n, P_0) \to 0\ (n \to \infty)$，表示为$P_n \to P_0$，$(n \to \infty)$或$\lim\limits_{n \to \infty} P_n = P_0$。也说序列$\{P_n\}$收敛于$P_0$。

定理6·3（极限唯一性） 设$\{p_n\}$是距离空间S的序列，$\overline{p}$，$\overline{q} \in S$。若当$n \to \infty$时，$p_n \to \overline{p}$及$p_n \to \overline{q}$，那么$\overline{p} = \overline{q}$。

证明 由距离条件(iii)，有$0 \leqslant d(\overline{p}, \overline{q}) \leqslant d(p_n, \overline{P}) + d(p_n, \overline{q})$，令$n \to \infty$，便得$d(\overline{p}, \overline{q}) = 0$。据距离条件(i)，$\overline{p} = \overline{q}$。

定义 设$P_0 \in S$，r为一正数，称集$B(P_0, r) = \{P \in S: d(P, P_0) < r\}$为以$P_0$为中心，$r$为半径的开球。$\overline{B(P_0, r)} = \{P \in S: d(P, P_0) \leqslant r\}$为以$P_0$为中心$r$为半径的闭球。

图6·1所示是R_2以$d(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{2}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$为距离的



以(0,0)为中心，1为半径的开球$B(0,1)$。
边界圆周不在$B(0,1)$内。

图 6·1

空间中，(0,0) 作中心，1 作半径的开球。图6·2表示以

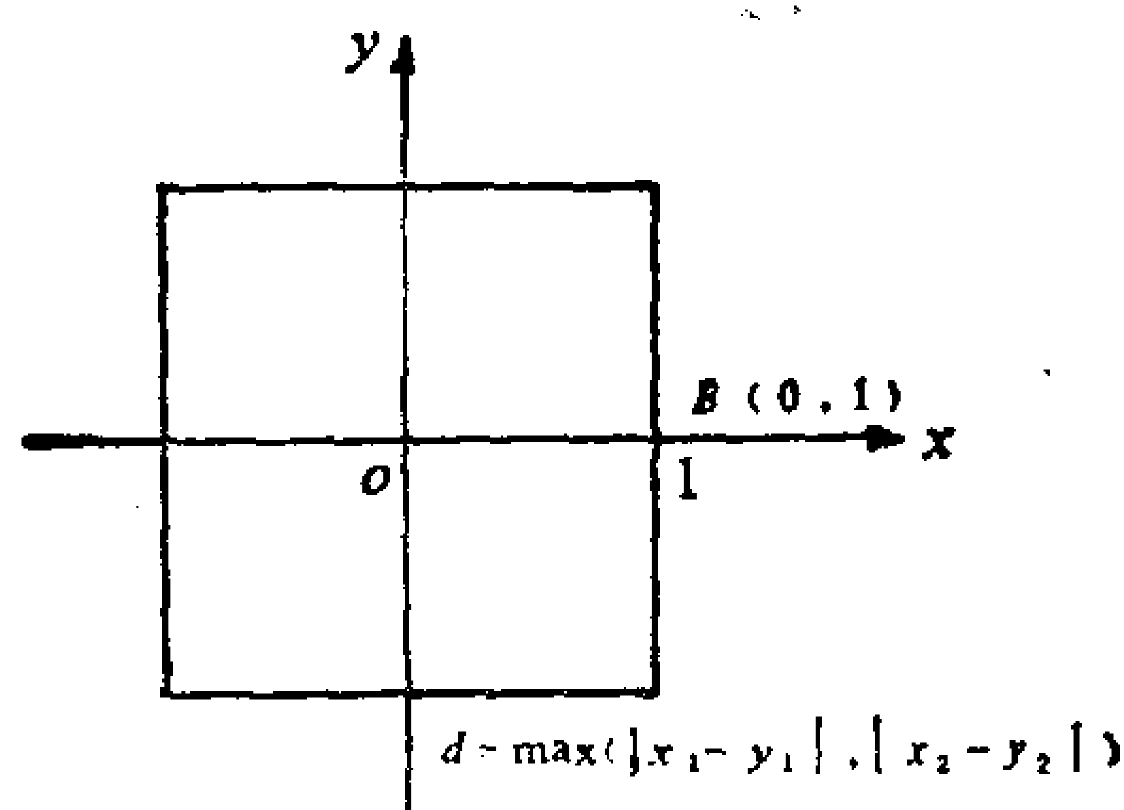


图 6·2

$d(x,y)=\max\limits_{1\leq i\leq 2}|x_i-y_i|$为距离的$R_2$中，(0,0) 作中心，1作半径的开球（两者都不含边界）。

图6·1及6·2说明对距离空间用几何直观应当小心。再如在R_2中取距离函数$d(x,y)=\begin{cases}0 & 当x=y\\ 1 & 当x\neq y.\end{cases}$半径小于1的开球仅含有中心点一个点，而半径大于1的任何开球包含整个空间！

定义 设$A\subset S$，$P_0\in A$称P_0为A的孤立点$\Longleftrightarrow\exists\ r>0$，使开球$B$ (P_0, r) 仅含有A的一个点P_0，即

$$B(P_0,r)\cap A=\{P_0\}.$$（$\{P_0\}$表含单一元素P_0的集）

例如具有欧几里得距离的R_1的集A，$A=\{x: 1\leqslant x\leqslant 2, x=3,4\}$的元素3，4都是$A$的孤立点。而$1\leqslant x\leqslant 2$区间中的点都不是$A$的孤立点。

定义 点P_0称为集A的极限点$\Longleftrightarrow$对每一$r>0$ $B(P_0,r)$内含有不同于P_0的A的点。P_0可以不属于A。

例如以通常距离$d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$的R_1，集$C=\{x: 1\leqslant x<3\}$的每一点是它的极限点，$x=3$也是C的极限点。

定义　$A\subset S$称为闭集$\Longleftrightarrow A$包含它的每个极限点。

一集A称为开集$\Longleftrightarrow A$的每个点P_0是包含在A内的某开球$B(p_0,r)$的中心点。即$\exists r>0, B(p_0r)\subset A$。

注意开集定义中开球$B(p_0,r)$的r因点而异。

定理6·4　点P_0是集A的极限点$\Longleftrightarrow \exists\{p_n\}\subset A\quad p_n\neq p_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p_0$。

证明　(a) 若定理中的序列存在，显然每一$B(p_0,r)$含有异于P_0的$\{p_n\}$中的点，而$\{p_n\}\subset A$，(p_0,r)含有A中异于p_0的点，所以P_0是A的极限点。

(b) 若P_0是A的极限点。构造具有所说性质的序列。由极限点定义，开球$B(p_0,\frac{1}{2})$含有点$p_1\in A$，$p_1\neq p_0$。取$r_2=\frac{1}{2}d(p_0, p_1)$，开球$B(p_0, r_2)$含有点$p_2\in A$，$p_2\neq p_0$，再取$r_3=\frac{1}{2}d(p_0, p_2)$，开球$B(p_0,r_3)$含有点$p_3\in A, p_3\neq p_0$，继续这一过程，得序列$\{p_n\}CA$，$p_n\neq p_0$，当$n\to\infty$时$r_n<\frac{1}{2^n}\to 0$。而$d(p_0,p_n)<r_n$，可知$p_n\to p_0$。

在§5·4中曾对R_2中的集以序列$\{p_n\}$的术语定义极限点，定理6·4说明分别用“序列”或“开球”所给出的极限点定义是等价的。

定理6·5　(a) 开球是开集。

(b) 闭球是闭集。

证明　(a) 设$B(p_0, r)$是开球，$\forall q\in B(p_0, r)$.应证

明∃开球 $B(p,\ \overline{r})\subset B(p_0,\ r)$。令 $r_1=d(p_0,\ q)$，研究以 q 为中心以 $\overline{r}=\frac{1}{2}(r-r_1)$ 为半径的球 $B(q,\overline{r})$（图6·3）。设 $q'\in B(q,\ \overline{r})$，为了证明 $q'\in B(p_0,\ r)$，只要证明 $d(p_0,\ q')<r$ 即可。事实上

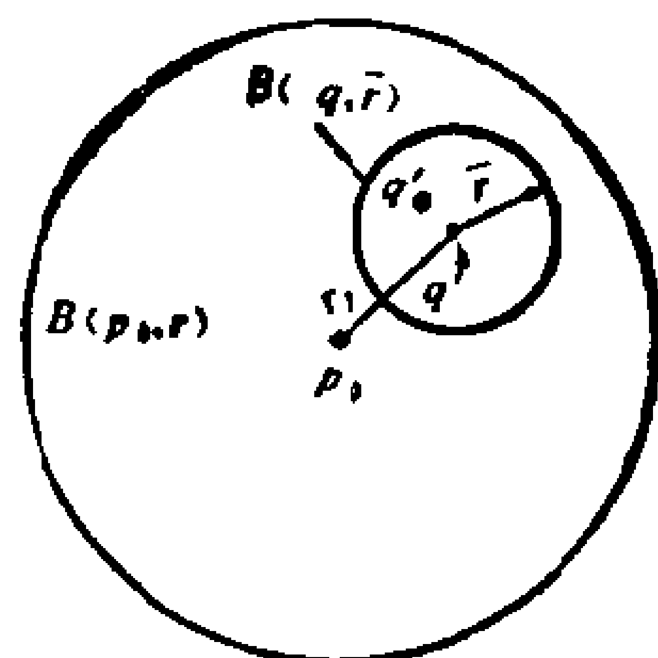


图 6·3

$$d(p_0,\ q')\leqslant d(p_0,\ q)+d(q,\ q')$$

$$<r_1+\overline{r}=r_1+\frac{1}{2}(r-r_1)=\frac{1}{2}(r+r_1)<r.$$

(b) 应当证明 $\overline{B(p_0,r)}$ 包含它的每个极限点。设 q 是 $\overline{B(p_0,r)}$ 的极限点，存在序列 $p_1,p_2,\cdots,p_n,\cdots,\ p_n\in\overline{B(p_0,r)}$，使 $d(p_n,\ q)\to 0$。可是对每一 n 都有 $d(p_n,p_0)\leqslant r$。所以

$$d(q,p_0)\leqslant d(q,p_n)+d(p_n,q_0)\leqslant d(q,p_n)+r.$$

令 $n\to\infty$，由不等式的极限定理有 $d(q,p_0)\leqslant r$，即 $q\in\overline{B(p_0,r)}$。

注　图6·3从直观上帮助导出定理6·5的证明.但是必须注意定理的证明完全是分析论证.

S 是元素的空间，意味着 S 是所研究的全体元素的集。说一个点集，则是指 S 的子集。今后常常需要研究以若干点集为元素的集，这样的集称为集族。即集族是 S 的若干子集的族以花体字母 $\mathscr{F}$ 表示。若 $\mathscr{F}$ 是有限个集的族称为有限集族，它可表示成 $\{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$。

定义　设 $\mathscr{F}$ 是诸点集 A 的族，$A\subset S$，S 为距离空间。定义 $\mathscr{F}$ 的集的并

$$\bigcup_{A\in\mathscr{F}}A=\{p:p\in S,\ p\text{至少属于}\mathscr{F}\text{的一个集}A\}.$$

定义$\mathscr{F}$的集的交

$$\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A=\{p: p\in S,\ p\text{属于}\mathscr{F}\text{的每个集}\}.$$

若A，B是S的点集，定义B与A的差

$B-A=\{p: p\in B$且$p\overline{\in} A\}$.

若A是S的一点集，定义A的余集$\mathscr{C}(A)$为

$$\mathscr{C}(A)=S-A.$$

定理6·6（迪·莫根公式） 设S是一空间，$\mathscr{F}$是一集族；那么

(a) $\mathscr{C}\left[\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right]=\bigcap_{A\in\mathscr{F}}\mathscr{C}(A)$.

(b) $\mathscr{C}\left[\bigcap_{A\in\mathscr{F}} A\right]=\bigcup_{A\in\mathscr{F}}\mathscr{C}(A)$.

证明 (a) 使用证明两个集相等的典型方法，证明$A\subset B$及$B\subset A$都成立。设$p\in\mathscr{C}\left[\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right]$，即$p$不属于$\mathscr{F}$的集的并。因此$p$属于每一$\mathscr{C}(A)$，$A\in\mathscr{F}$，即$p\in\bigcap_{A\in\mathscr{F}}\mathscr{C}(A)$.

于是得到$\mathscr{C}\left[\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right]\subset\bigcap_{A\in\mathscr{F}}\mathscr{C}(A)$. 再设$P\in\bigcap_{A\in\mathscr{F}}\mathscr{C}(A)$，把以上推理倒过来便得$p\in\mathscr{C}\left[\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right]$，于是$\bigcap_{A\in\mathscr{F}}(A)\subset\mathscr{C}\left[\bigcup_{A\in\mathscr{F}} A\right]$.

类似可证(b)，把它留给读者。

注 定理6·6并未涉及距离，S可以是任何集。

定理6·7 距离空间中开集具有性质：

（a）开集族$\mathscr{F}$的并是开集。

（b）设A_1，A_2，…，A_n是有限个开集，那么$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$是开集。

证明 （a）设$p\in\bigcup\limits_{A\in\mathscr{F}} A$，那么$p$至少属于一个集$A\in\mathscr{F}$。因为$A$是开的，∃开球$B(p,r)\subset A$。因而$B(P,r)\subset\bigcup\limits_{A\in\mathscr{F}} A$。即$\bigcup\limits_{A\in\mathscr{F}} A$的每一点$p$是含于它的开球$B(p,r)$的中心，由定义$\bigcup\limits_{A\in\mathscr{F}} A$是开集。

（b）设$p\in\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，那么对每一$i$，∃一开球$B(p,r_i)\subset A_i$。定义$\overline{r}=\min(r_1, r_2, \cdots, r_n)$，开球$B(p,\overline{r})$含于每一$A_i$内，因而$B(p,\overline{r})\subset\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，于是$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$是开集。

注 定理6·7（b）开集为有限个的限制条件不能去掉。例如赋予通常欧几里得距离的R_2的集族$\{A_K\}$，$A_K=\{(x,y):0\leqslant x^2+y^2<\frac{1}{K}\}$。每一$A_K$是开球，但其交$\bigcap\limits_{K=1}^{\infty}(A_k$仅由唯一点组成，显然不是开集（图6·4）。

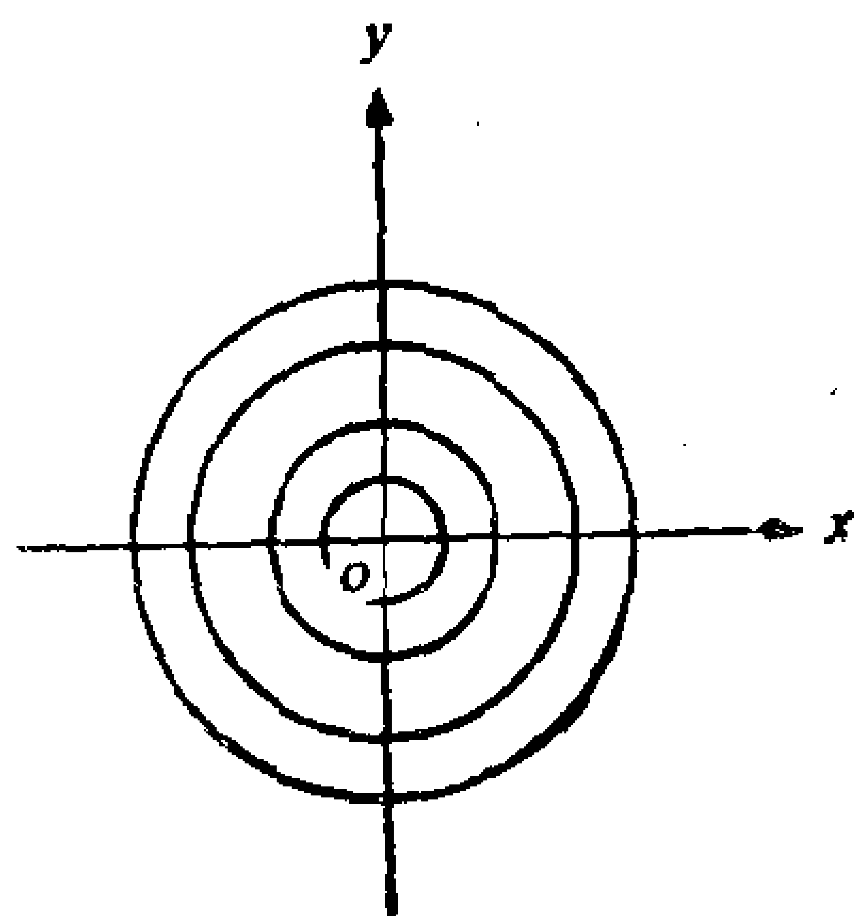


图 6·4

定理6·8 （a）设A是距离空间S的集，A为闭集$\Longleftrightarrow\mathscr{C}(A)$

是开集。

(b) 空间S是既开且闭的集。

(c) 空集是既开且闭的集。

证明 (a) 假定A为闭集，证明$\mathscr{C}(A)$是开集．设$p\in\mathscr{C}(A)$且$\overline{\exists}$以p为中心含于$\mathscr{C}(A)$的开球。那么以p为中心的开球含有A的点(因为$p\in\mathscr{C}(A)$，A的点异于p)。这表明P是A的极限点。但A是闭集，断定$p\overline{\in}\mathscr{C}(A)$，矛盾．于是$\exists$以$p$为中心的开球含于$\mathscr{C}(A)$内，即$\mathscr{C}(A)$是开集。

反之，当A是开的，则$\mathscr{C}(A)$是闭的。证明留给读者。

(b) 由开集、闭集定义，即得S是既开且闭的集。由此及(a)立即得(c)．

定理6·9 距离空间S的闭集具有性质：

(a) 闭集族的交集是闭集。

(b) 有限个闭集的族$\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$的并$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$是闭集。

这是迪·莫根公式及定理6·7、6·8的直接推论，细节留给读者。定理6·9之(b)"有限个"的限制不能去掉。读者容易给出无限个闭集其并非闭的例子。

定义 设$\{P_n\}$是点的无限序列。一无限序列$\{q_n\}$称为$\{P_n\}$的子列$\Longleftrightarrow\exists$自然数递增序列$\{K_n\}$使对$\forall n$，有$q_n=P_{K_n}$.

子列的下标$K_n\geqslant n$，这一事实可用归纳法证明。点列的子列概念是§3·3中实数序列、子序列概念的一般化。

定理6·10 设$\{P_n\}$是距离空间S内的序列，$\{q_n\}$是它

的子序列。若$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p_0$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}q_n=p_0$。

证明 对$\forall\varepsilon>0$，由收敛定义，$\exists$自然数N使$n>N$，有$d(p_n,p_0)<\varepsilon$.但对$\forall n$，$q_n=p_{K_n}$，$K_n\geqslant n$.于是对$n>N$，有

$$d(q_n,\ p_0)=d(p_{K_n},\ p_0)<\varepsilon.$$

由收敛定义$\lim\limits_{n\to\infty}q_n=p_0$。

注 定理6·9(b)也可用闭集定义直接地证明，为此要用定理6·10的结果.

定义 距离空间的点p称为集A的内点$\Longleftrightarrow\exists\ r>0$，使$B(p,r)\subset A$。$A$的所有内点的集称为$A$的内部记为$A^{(0)}$。集$A$的所有极限点的集称为$A$的导集记为$A'$。$A\cup A'$称为$A$的闭包，记为$\overline{A}$。集$\overline{A}-A^{(0)}$称为$A$的边界，记为$\partial A$。

例 设A是欧几里得$\mathbf{R}_2$的集$A=\{(x,\ y):x^2+y^2<1\}$，A的点都是内点，$A=A^{(0)}$。$A=A^{(0)}$是开集的特征。$\overline{A}$是闭圆盘$\overline{A}=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$。$A$的边界$\partial A$是圆周$\partial A=\{(x,y):x^2+y^2=1\}$。$A$的导集$A'=\overline{A}$。

定理6·11 设A是距离空间的集，那么

(a) A'是闭集。

(b) $\overline{A}$是闭集。

(c) ∂A是闭集。

(d) $A^{(0)}$是开集。

(e) 当$A\subset B$，若B是闭集，那么$\overline{A}\subset B$。

定理6·11的证明留给读者。

习 题

1. 设在距离空间S内$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=p_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}q_n=q_0$，对$\forall n$，

$d(p_0, q_0) < a$，证明$d(p_0, q_0) \leqslant a$。

2. 若R_2赋予距离$d(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$，$x = (x_1, x_2)$，$y = (y_1, y_2)$。

   画出以（o，o）为中心半径为1的球。

3. 若R_1赋予距离$d(x,y) = |x - y|$，举出一不开不闭的集。

4. R_1赋予距离$d(x,y) = |x - y|$，证明有限点集的每个点是孤立点。每个点是孤立点的集是否有限？

*5. 举出R_1中一个恰有 4 个极限点的集。

6. 设$A = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1$且$x$是有理数$\}$，$A \subset R_1$求$\overline{A}$。

7. 设欧几里得空间R_2。证证$S = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$是开集。求$S^{(0)}$，$S'$，$\partial S$，$\overline{S}$，$\mathscr{C}(S)$。

8. 证明迪·莫根公式的（b）（定理6·6）。

9. 设A，B，C都是空间S的集，证明

   (a) $\mathscr{C}(A - B) = B \cup \mathscr{C}(A)$，

   (b) $A - (A - B) = A \cap B$

   (c) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$。

   (d) $A \cup (B - A) = A \cup B$。

   (e) $(A - C) \cup (B - C) = (A \cup B) - C$。

*10. 于欧几里得空间R_2求一族$\{A_n\}$，A_n为开集使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{B(0,1)}.$$

11. 证明：当$\mathscr{C}(A)$是开集那么A是闭集（定理6·8）。

12. 证明定理6·9

13. 用闭集定义直接证明闭集族的交是闭集。

*14. 设f是$I = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$上连续函数，且$\forall x \in I$，$f(x) >$

0, $S=\{(x,y)\in \mathrm{R}_2: a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}\mathrm{R}_1$, R_2按通常距离.证明S是闭集并求S', $\overline{S}$, $S^{(0)}$, ∂S.

15. 证明定理6·11.

§6·3 可列集

当A, B都是有限个元素的集，容易用配对的方法比较它们元素数的多少. 如果A, B之间恰好配对，即能1—1对应，A, B的元素数相等. 如果配对完了尚有一集，如A还有余下来被配对的元素，就说A的元素数多于B的元素数. 仿此，以1—1对应的办法进行两无限集间的配对，出乎预料的是无限集都能与它的真子集配对. 例如$N=\{n: n$是自然数$\}$, $N_2=\{2n: n$是自然数$\}$,我们以$(n, 2n)$配对，N与N_2可以1—1对应! 关于无限集理论更深奥的研究，获得了发展数学分析的有用的工具. 本节主要研究R_N中的无限集的基本性质，有些定义、定理对一般元素的集也成立.

定义 集S是可列的$\Longleftrightarrow\exists$使$S$到自然数集$N$上的1—1的对应. 一集$S$称为可数的$\Longleftrightarrow S$是有限集或可列集.

"可列集"顾名思义是元素可如自然数集那样"排列"，也即可用自然数为下标写成$S=\{p_1,p_2,\cdots p_n\cdots\}$.

定理6·12 自然数的非空子集是可数的.可数集的子集是可数的.

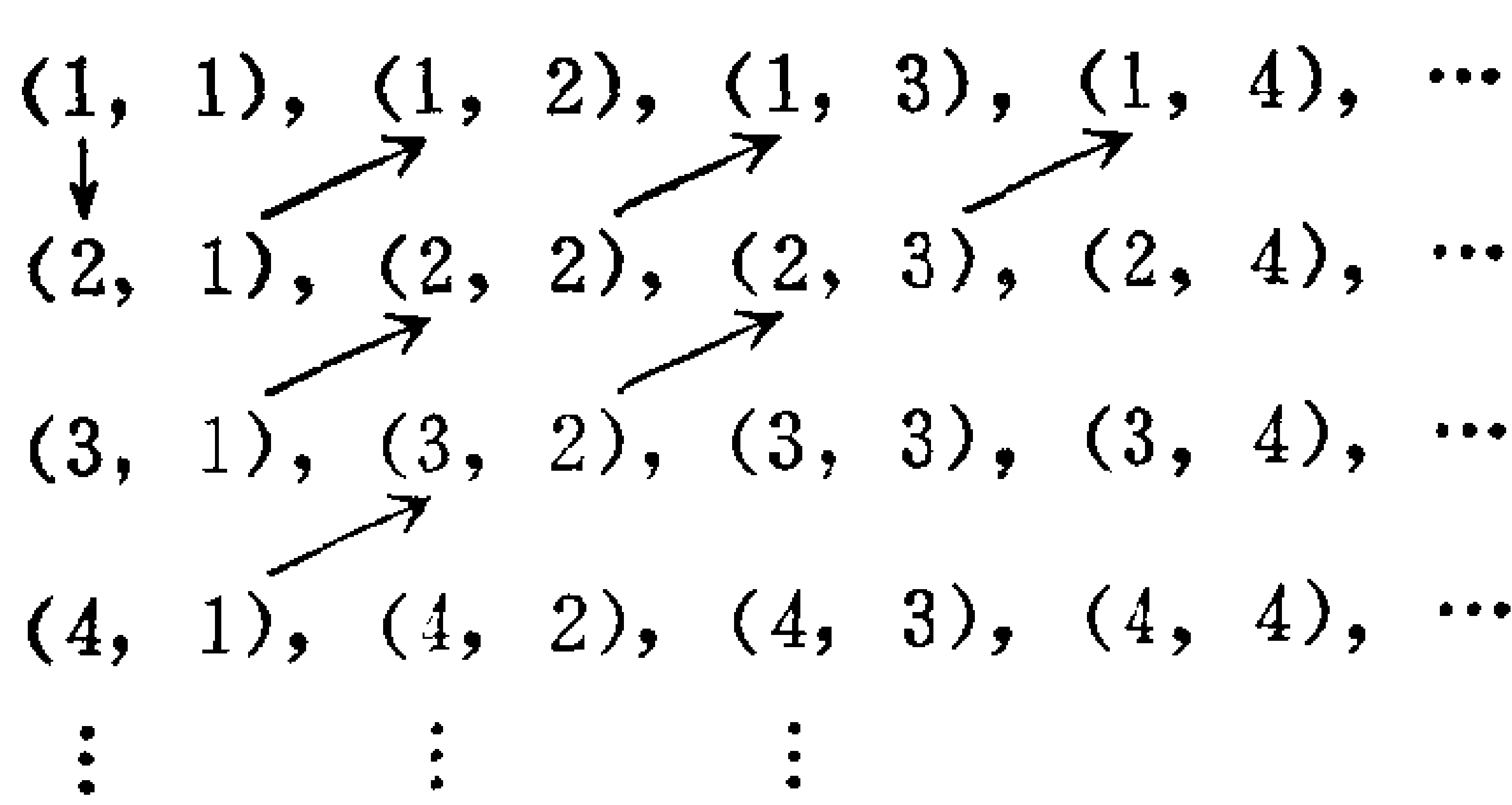
证明 设S是自然数集N的非空子集. 根据自然数的良序性（定理1·30），S有最小元素K_1. 若$S=\{K_1\}$,S是有限集，定理成立. 不然，$S-\{K_1\}$不空它有最小元素K_2，继续这一步骤，若在某个n步后集$S-\{K_1, K_2, \cdots, K_n\}$成为空

集，S是含n个元素的有限集，定理成立。否则，K_1，K_2，$\cdots$，K_n，$\cdots$是无限的。我们来证明$S=\{K_1,K_2,\cdots,K_n,\cdots\}$。若$\exists$ S 的元素不在$\{K_n\}$之中。这种元素有最小的，以p表示。按K_1的定义它是S中最小元素，$p\in S$，应有$K_1\leqslant p$。设T是K_1，K_2，$\cdots$，$K_n\cdots$中满足$K_i\leqslant p$的那些数K_i的集。因p是自然数，所以T是有限集，且$\exists i$，使$K_i\leqslant p<K_{i+1}$。因$p\overline{\in}\{K_n\}$，所以$K_i<p<K_{i+1}$。按K_{i+1}定义，它是S中大于K_1，K_2，$\cdots$，K_i的最小元素，又$p\in S$，p不能小于K_{i+1}，这与$p<K_{i+1}$矛盾。即$S=\{K_1,K_2,\cdots,K_n,\cdots\}$是可列的。

定理的第二判断是前者的直接推论。

定理6·13 可数集的可列族的并是可数集。

证明 设S_1，S_2，$\cdots S_m\cdots$的每个集S_m是可数集。现证$\bigcup_{m=1}^{\infty}S_m=S$是可数集。对固定的$m$，$S_m$可与序偶$(m,1)$，$(m,2)$，$\cdots(m,n)$，$\cdots$的一部分或全部1—1相对应。因此$S$可与全部或部分自然数序偶$(m,n)$建立1—1对应。由定理6·12，只要证明集$\{(m,n):m,n=1,2,\cdots\}$是可数集。而序偶$(m,n)$的全体可如下排列。



即 (1, 1)，(2, 1)，(1, 2)，(3, 1)，(2, 2)，

(1, 3), …。

读者可以验证序偶 (p,q) 与自然数 $\frac{(p+q-1)(p+q-2)}{2}+q$ 相1—1对应。

由定理6·13，可知所有整数是可列的。有理数集可与整数序偶的集的子集1—1对应 $\left(\frac{n}{m}\text{视为}(m,\ n)\right)$，有理数集是可列的。

下面定理说明实数系实质地"大"于有理数系。

定理6·14 R_1不是可数集。

证明 只要证明区间 $I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 是不可数的就够了。用反证法，设 I 是可数的将导致矛盾。若 I 可数，把它的所有元素排成序列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\cdots.$$

把 I 分成三等分，$\left[0,\ \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3},\ 1\right]$之中总有一个闭区间不含有$x_1$，用 I_1表示这个闭区间（图6·5）把 I_1 三等分可得

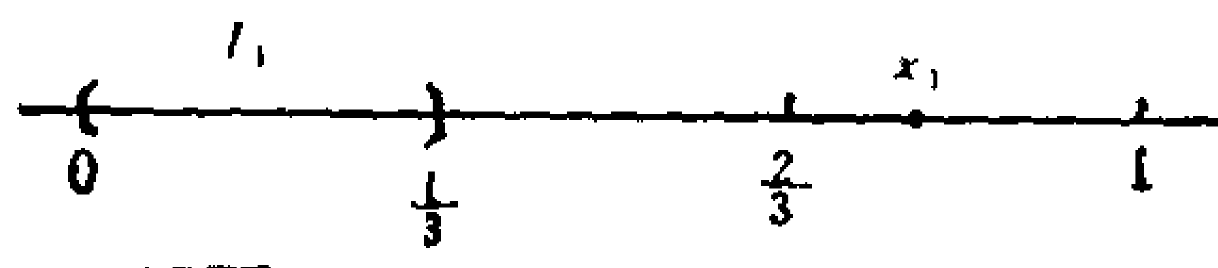


图 6·5

不含x_2的闭区间 I_2，等。据归纳法，便得闭区间套$\{I_n\}$。对$\forall n$，$I_n\supset I_{n+1}$，$x_n\overline{\in} I_n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。而 I_n的长为$\frac{1}{3^n}\to 0$，据闭区间套定理（定理3·1），$\exists$唯一点$x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$。$x_0\in I$，但$x_0\neq x_n$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，矛盾。

定理6·15 (*a*) R_1中互不相交的开区间组成的族是可数族。

(*b*) R_N内互不相交的开集组成的族是可数族。

定理6.16 设f是R_1内一区间I上的单调函数，那么f的间断点的集是可数的。

证明留作业题。

定义 R_N的开方格是集：

$$\{(x_1,x_2,\cdots x_N):a_i<x_i<b_i,\ i=1,2,\cdots,N\}.$$

闭方格是集：

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_N):a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,N\}.$$

$N=1$的特殊情况，开方格、闭方格分别是R_1中的开区间、闭区间。

定理6·17 R_1的开集是可数个开区间族的并。

证明 设G是给定开集，任取$x_0\in G$，$\exists$开区间J，$x_0\in J\subset G$。定义$I(x_0)$为所有这样J的并。因为有公共点x_0的开区间的并是开区间，所以$I(x_0)$为开区间且$I(x_0)\subset G$。设$x_1,x_2\in G$，$x_1\neq x_2$。当$I(x_1)\cap I(x_2)$不空，那么$I(x_1)\cup I(x_2)$是G内同时包含x_1与x_2的一个开区间，由$I(x_1),I(x_2)$的定义，有$I(x_1)=I(x_2)$。

于是，含于G内所有互不重合的$I(x_0)$是互不相交的开区间。由定理6·15(*a*)，这些开区间的族是可数的，G是这可数个开区间的族的并。

定理6·18 R_N内的开集可以是内部互不相交的可数个闭方格族的并。

证明 设G为R_N中的开集。作超平面

$$x_i=\frac{K_i}{2},\qquad i=1,\ 2,\ \cdots N.$$

这里n是自然数，K_i是整数。对$\forall n$，不等式

$$2^{-n}(K_i-1)\leqslant x_i\leqslant 2^{-n}K_i,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

确定一超方格。当$K_1, K_2, \cdots, K_N$各自取一切整数值，可得将$\mathbf{R}_N$ 划分成可数个彼此内部不相交的方格的族称为 $\mathbf{R}_N$ 的n阶格。令F_0为含于G内的 0 阶闭方格的并集。令G_1是含于G内但不在F_0内部的 1 阶方格的并。定义$F_1=F_0\cup G_1$。令G_2是含于G内但不在F_1内部的 2 阶方格的并。定义 $F_2=G_2\cup F_1$。继续这一过程。显然$F_0, G_1, G_2, \cdots, G_K\cdots$每一集都是可数个闭方格族的并，且闭立方格彼此不含公共内点即内部互不相交。由此，对$\forall n$，F_N是含于G内的n阶格的方格族的并。

我们来证明$G=\bigcup_n F_n$。为此设$p_0\in G$。由G是开集，$\exists$开球$B(p_0,r)\subset G$。对于使$2^{-n}\sqrt{N}<r$的n，包含p_0的n阶格的方格含于$B(p_0,r)$之内。即$p_0\in F_n\subset\bigcup_n F_n$。由于$p_0$是任意的，所以$G\subset\bigcup_n F_n$。另一方面由$F_n\subset G$，$\bigcup_n F_n\subset G$，所以$G=\bigcup_n F_n$。即$G$是内部互不相交的可数个闭方格族的并（图6・6可作为$\mathbf{R}_2$中的示意图）。

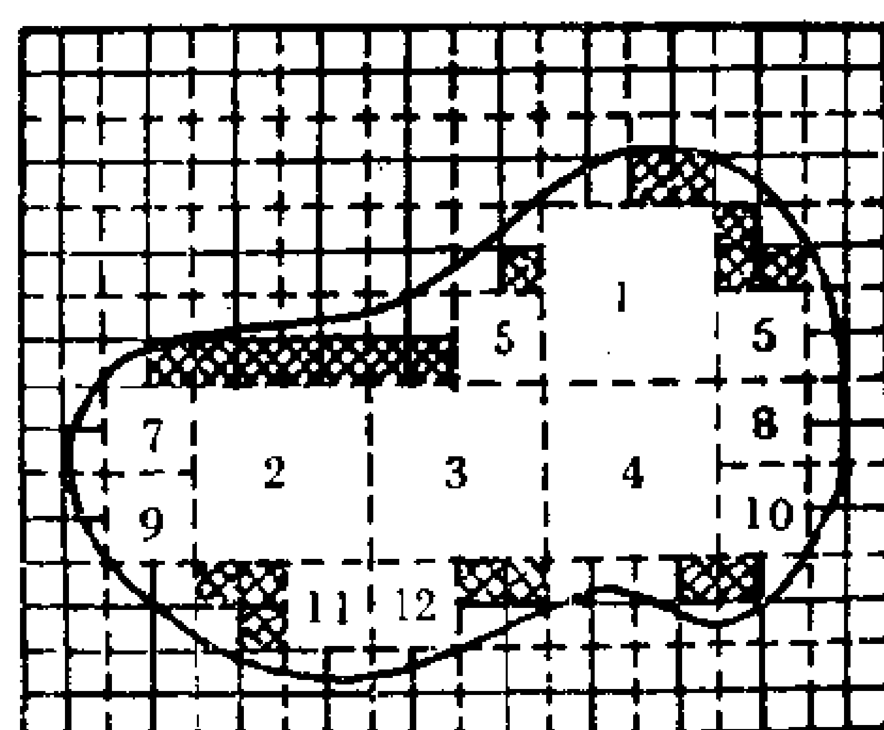


图 6·6

注　定理6·18中开集分解为闭立方格的并的方法不是唯一的.

习　题

1. 证明R_2的全体有理点（坐标为有理数）是可列的。
2. 证明R_N的全体有理点是可列的。
3. 设$S=\{x: x=(r_1, r_2, \cdots, r_n, 0, 0, \cdots)\}$ r_i为有理数，无限序列x从某n项之后的各项为0。证明S是可列的。
4. 整系数多项式的实根是代数数。证明这样的代数数的全体是可列的。
5. 通过建立互不相交的开区间族与有理数的子集1-1对应，证明定理6·15(*a*)。
6. 证明定理6·15(*b*)。
7. 证明定理6·16。〔提示：间断点的集可与互不相交的开区间的族建立1-1对应〕。
8. 证明每个无限集都包含有可列子集。
9. 设G是R_1的开集，证明G可以表示为以有理点为端点的开区间族的并。
10. 设$G=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$是$R_2$的子集，具体地给出如定理6·18内的闭方格的族，使其并为G。证明闭方格的可能选取有无限多种。

*11. 设$I=\{x: 0<x<1\}$。S为定义于I上值域含于I的全体函数f的集。证明S不可能与R_1的子集建立1-1对应。〔提示：用反证法。〕

*12. 设$I=\{x: 0<x<1\}$，$J=\{(x,y): 0<x<1, 0<y<1\}$，证明$J$可与$I$建立1-1对应。推广这一结果到$I$与$K$建立1-1对应。$K=\{(x_1, x_2, \cdots, x_N): 0<x_i<1, i=1, 2, \cdots, N\}$。

〔提示：设x的小数表示为$0\cdot x_1x_2x_3x_4\cdots$，$y$的小数表示为$0\cdot y_1y_2y_3\cdots$，使$0\cdot x_1y_1x_2y_2x_3y_3\cdots\in I$，与$(x,y)\in J$对应。〕

§6·4 紧　集

在§3.3中证明了著名的波尔查诺—外尔斯特拉斯定理：$\mathbf{R}_1$中有界无限序列含有收敛子列（定理3·8）。本节说明在一般的距离空间中，有界序列可能不存在收敛子列，把其中序列有收敛子序列的集称为**紧性集**。这种集保持了$\mathbf{R}_1$的闭区间的一些重要性质。

定义　距离空间S内的集A称为紧集$\Longleftrightarrow A$的点序列$\{p_n\}$含有收敛于A中的点的子序列$\{q_n\}$。也即$\exists\ \{p_n\}$的子列$\{q_n\}$，$q_n\longrightarrow p_0\in A$。

由定义及定理3·8可知$\mathbf{R}_1$中有界闭集是紧集。

定义　距离空间S内的集A称为有界集$\Longleftrightarrow\exists$某球$B(p,r)$，$A\subset B(p,r)$。

定理6.19　距离空间S内的紧集A为有界闭集。

证明　假定A无界。定义如下序列：取$p_1\in A$。由A无界，$\exists\, p_2\in A$，使$d(p_1,p_2)>1$。同理，$\exists\, p_3\in A$使$d(p_1,p_3)>2$。如此对$\forall n$，$\exists\, p_n\in A$使$d(p_1,p_n)>n-1$。这样得到A的点的序列$\{p_n\}$。而A是紧集，$\{p_n\}$有收敛子列$\{q_n\}$，$q_n\to p_0$，$p_0\in A$。由收敛定义，$\exists N$使$n>N$，$d(q_n,p_0)<1$。但

$$(n-1)<d(p_1,q_n)\leqslant d(q_n,p_0)+d(p_0,p_1)$$
$$<1+d(p_0,p_1)\qquad(6\cdot7)$$

(6·7) 中$d(p_1, q_n)>(n-1)$是由$d(p_1, p_n)>n-1$，而q_n至少是$\{p_n\}$的第n项推得的。$d(p_0, p_1)$是定数，当n充分大(6·7)是矛盾的。于是A是有界集。

现设A不是闭集。那么$\exists A$的极限点$p_0\overline{\in}A$。既然p_0是A的极限点，按定理6·4$\exists A$的点序列$\{p_n\}$，$p_n\to p_0$按A紧性的定义，$\{p_n\}$有收敛于A中点的子列，由$\{p_n\}$的子列必须收敛于p_0，所以$p_0\in A$。这与$p_0\overline{\in}A$的假定矛盾，因此A是闭的。

很自然地要探讨定理6·19的逆是否成立。我们给出一距离空间的有界的点序列它不含有收敛子列，因而任何一个包含这一序列的有界闭集都不能是紧集。

例 于距离空间$C_{[0;1]}$（§ 6·1 例4）中研究序列

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\leqslant x\leqslant 2^{-n-1}\\ 2^{n+2}(x-2^{-n-1}) & 2^{-n-1}\leqslant x\leqslant 3\cdot 2^{-n-2}\\ -2^{n+2}(x-2^{-n}) & 3\cdot 2^{-n-2}\leqslant x\leqslant 2^{-n}\\ 0 & 2^{-n}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

图6·7中所示的f_n的图象是高为1的“锯齿”形。当$m\neq n$，

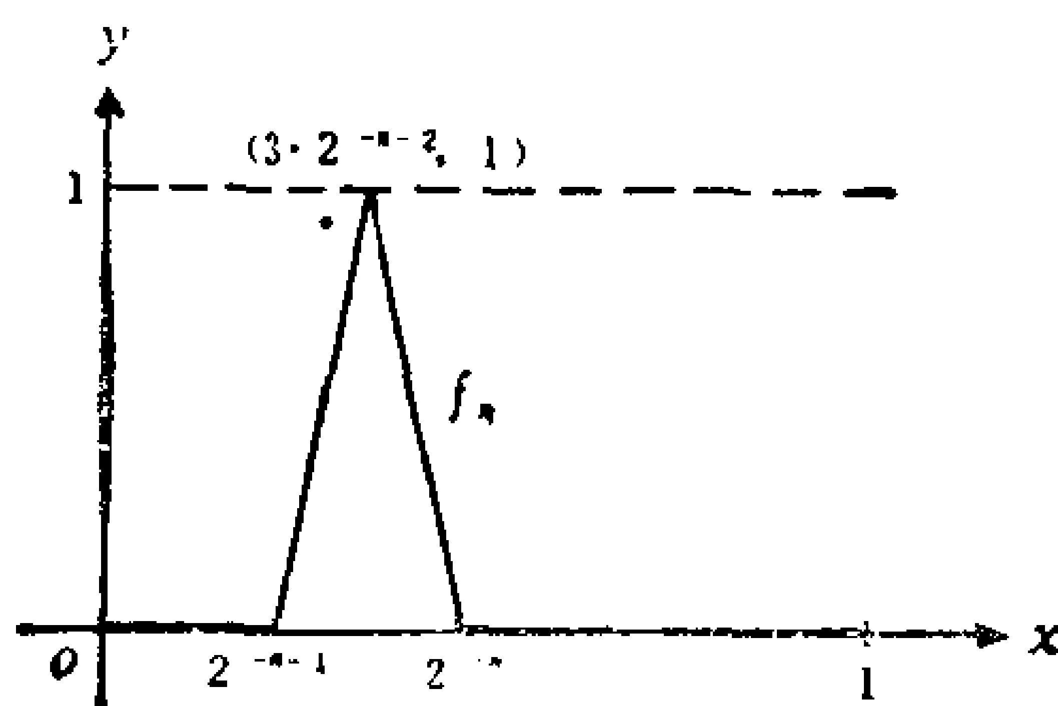


图 6·7

两“锯齿”部分不相重合，易知$d(f_n, f_m)=1$，并且$d(f_n, 0)=1$，0表示恒等于零的连续函数。因此得到了$\{f_n\}\subset B(0, 2)$是有界的，它没有收敛子列。象闭球$\overline{B(0, 2)}$就是有界闭集，因为它含有$\{f_n\}$，所以$\overline{B(0,2)}$为非紧性的有界闭集。

对于某些距离空间定理6·19的逆成立。例如R_1中的有界闭集是紧集。这一结论对R_N也成立。

定理6·20 R_N内的有界闭集是紧集。

证明 设A是有界闭集。那么A含于闭方格C内，$c=\{(x_1,x_2,\cdots,x_N): a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\cdots,N\}$。$\{p_n\}$是$A$中的任一序列。$p_K=(p_K^1, p_K^2, \cdots, p_K^N)$，$a_i\leqslant p_K^i\leqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,N$，$K=1,2,\cdots,n,\cdots$。从$i=1$着手，显然$\{p_K^1\}$是实数的有界序列。据波尔查诺—外尔斯特拉斯定理，$\{p_K^1\}$有一收敛子列$\{p_{K'}^1\}$，再对$i=2$，研究$\{p_K^2\}$的子列$\{p_{K'}^2\}$，由$\{p_{K'}^2\}$是有界的它有收敛子列$\{p_{K''}^2\}$。当然$\{p_{K''}^1\}$是$\{p_{K'}^1\}$的子列也收敛。对$i=3$，取$\{p_{K''}^3\}$的收敛子列。如此直到$i=N$。最后得到一$\{p_K\}$的子列$\{q_K\}$，$\{q_K\}$的每一分量都是收敛的实数列。在$R_N$中$\{q_K\}$收敛于某一点$p$。由$A$是闭的$\{q_K\}\subset\{p_K\}\subset A$，所以$p\in A$。按紧性定义$A$是紧集。

定理6·21 距离空间的紧集的闭的子集是紧集。

定义 距离空间中的点序列$\{p_n\}$称为哥西序列$\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数N，使当m，$n>N$有

$$d(p_n, p_m)<\varepsilon.$$

注 在§3·6中讲过：R_1中序列收敛的充要条件是序列为哥西序列．这一

结果容易推广到R_N中．对于一般距离空间，收敛序列必是哥西序列的结论可直接从收敛定义导出．反过来，哥西序列却不一定是收敛的．例如距离空间(S,d)：S为全体有理数的集，$d(a,b)=|a-b|$我们知道有理数的哥西序列可以无理数为极限，S中这样的哥西序列就不存在极限．

定理6·22 在距离空间S内，若$p_n \to p_0$，那么$\{p_n\}$是一哥西序列。

定理6·23 若A是距离空间S内的紧集，而$\{p_n\} \subset A$是一哥西序列，那么$\exists p_0 \in A$，$p_n \to p_0$。

定理6·21。6·22。6·23的证明都留给读者作为习题。

定理6·24 设A是距离空间S内的紧集，S_1，S_2，$\cdots$，S_n，$\cdots$是A的非空闭子集序列且对$\forall n$，$S_n \supset S_{n+1}$，那么$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$是非空集。

证明 诸S_n都是A的闭子集，由定理6.21。S_n是紧集。S_n非空，在S_1中取一点p_1，S_2中取一点p_2，继续下去得序列$\{p_n\}$，$p_n \in S$，由$S_n \subset S_{n+1}$，可知对每一n，p_n，p_{n+1}，p_{n+2}，$\cdots$，是S_n中点列。S_n是紧集存在收敛子列收敛于S_n的点p_0。p_0也是收敛子列含于S_{n+K}中的子列的极限，即对$\forall K$，$p_0 \in S_{n+K}$。因此$p_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$。

定理6·25 设A是距离空间S内的紧集，那么对$\forall \delta>0$，存在A的有限个点$p_1, p_2, \cdots, p_n$，使$A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} B(q_i, \delta)$。

证明 设A不空，取$P_1 \in A$。若$A \subset B(P_1,\delta)$，定理得证。否则取$P_2 \in (A-B(P_1,\delta))$。若$A \subset B(P_1,\delta) \cup B(P_2,\delta)$定理得证。否则取$P_3 \in [A-(B(P_1,\delta) \cup B(P_2,\delta))]$，继

续这一步骤，若在有限步A被所得到的有限个开球覆盖，定理获证。下边证明这一步骤不能无限地继续下去。假定这一步骤可以无限地继续，便会得到无限序列$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_K$ $\cdots$，且$d(P_i, P_j) \geqslant \delta$对一切$i \neq j$成立，因此$\{P_n\}$不存在收敛子列，这与$A$是紧集相矛盾。

定义 H是空间S的集，$\mathscr{F}$是S的子集族，称$\mathscr{F}$覆盖H $\Longleftrightarrow \forall P \in H$，$\exists A \in \mathscr{F}$，$P \in A$。

定理6.25指出紧集可用任给半径的有限个开球族覆盖。下一定理是定理6.25的自然地推广。它是$\mathbf{R}_1$中汉因—波赖尔定理的一般化，是分析中很有用的结果。

定理6·26（汉茵—波赖尔定理） 设A是距离空间S内的一个紧集，$\mathscr{F} = \{G_\alpha\}$是覆盖$A$的开集族，那么$\mathscr{F}$的一个有限子族覆盖了$A$。

证明 假定$\mathscr{F}$不存在能覆盖A的有限子族，将导致矛盾。据定理6·25，令$\delta = \frac{1}{2}$，$\exists$有限个A的点P_{11}，P_{12}，$\cdots$ P_{1K_1}，使$A \subset \bigcup_{i=1}^{K_1} B(P_{1i}, \frac{1}{2})$。那么$A$分解为$K_1$个紧集：

$$A \cap \overline{B\left(P_{11}, \frac{1}{2}\right)},\ A \cap \overline{B\left(P_{12}, \frac{1}{2}\right)},\ \cdots,\ A \cap \overline{B\left(P_{1K_1}, \frac{1}{2}\right)}.$$

这K_1个紧集当中至少有一个要求$\mathscr{F}$的无限个开集才能覆盖它（否则每个$A \cap \overline{B\left(P_{1i}, \frac{1}{2}\right)}$能被$\mathscr{F}$的有限个开集覆盖，那么$A$便被$\mathscr{F}$有限子族覆盖，这与假定不符）。记这样一个不能被$\mathscr{F}$有限覆盖的子集为$A \cap \overline{B\left(P_1, \frac{1}{2}\right)}$。对$A \cap$

$\overline{B\left(P_1,\frac{1}{2}\right)}$这一紧子集应用定理 6•25，取$\delta=\frac{1}{2^2}$，那么∃$A\cap\overline{B\left(P_1,\frac{1}{2}\right)}$中有限个点$p_{21}$，$P_{22}$，$P_{23}$，…$P_{2K}$，使$A\cap\overline{B\left(P_1,\frac{1}{2}\right)}\subset\bigcup_{i=1}^{K_2}B\left(P_{2i},\frac{1}{2^2}\right)$。与前面同样论证，∃$A\cap\overline{B\left(P_2,\frac{1}{2^2}\right)}$要求$\mathscr{F}$的无限个开集才能覆盖它。继续这一步骤，得到闭球序列

$$\overline{B\left(P_1,\frac{1}{2}\right)},\ \overline{B\left(P_2,\frac{1}{2^2}\right)},\ \cdots,\ \overline{B\left(P_n,\frac{1}{2^n}\right)},\ \cdots.$$

$P_n\in\overline{B\left(P_{n-1},\frac{1}{2^{n-1}}\right)}$，$A\cap\overline{B\left(P_n,\frac{1}{2^n}\right)}$要求$\mathscr{F}$的无限个开集才能覆盖它。因为$d(P_{n-1},P_n)\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}$，那么$\{P_n\}$是$A$的哥西序列，由定理6•23.$p_n\longrightarrow p_0\in A$。由$\mathscr{F}$覆盖$A$，∃开集$G_0\in\mathscr{F}$，$P_0\in G_0$。因$G_0$是开集，$P_0$是某开球$B(P_0,r)$的中心，$B(P_0,r)\subset G_0$。$n$充分大，$P_n\in B(P_0,r)$且$\overline{B\left(P_n,\frac{1}{2^n}\right)}\subset B(P_0,r)\subset G_0$。因此对这样充分大的$n$，$A\cap\overline{B\left(P_n,\frac{1}{2^n}\right)}\subset G_0\in\mathscr{F}$，这与$A\cap\overline{B\left(P_n,\frac{1}{2^n}\right)}$要求$\mathscr{F}$的无限个开集才能覆盖的性质相矛盾。

注　集A的紧性对于定理6•25是必不可少的。例如在定理6•19之后的

$C_{[0,1]}$ 中的$\{f_n\}$，它是有界集：$d(f_n, 0)=1$，$n=1, 2, \cdots$，当 $m\neq n$ $d(f_m, f_n)=1$. 若$\mathscr{F}=\left\{B\left(f_n, \frac{1}{2}\right)\right\}$每一$f_n\in\{f_n\}$，恰有$\mathscr{F}$中的开集$B\left(f_n, \frac{1}{2}\right)$包含$f_n$，$\mathscr{F}$是$\{f_n\}$的覆盖. 而$B\left(f_n, \frac{1}{2}\right)$仅含有$\{f_n\}$的唯一元素$f_n$，因此$\mathscr{F}$的有限的子族不能覆盖$\{f_n\}$.

更简单的例子如在R_1中取$A=\{x: 0<x<1\}$，A有界但不闭，因而是非紧的. 开集族$\mathscr{F}=\{I_a: I_a为\left(\frac{a}{2}, 1\right), a\in A\}$覆盖$A$. $\mathscr{F}$不存在有限子族能覆盖A.

下一定理是汉茵—波赖尔定理的一个有用的等价形式. 可以仿照定理3·14叙述与证明.

定理6·27（勒贝格引理） 设A是紧集，A被开集族$\mathscr{F}=\{G_a\}$所覆盖，那么$\exists$一正数ρ，使对$\forall p\in A$，球$B(p, \rho)$含于$\mathscr{F}$的一开集内.

证明 由$\mathscr{F}$覆盖A，$\forall P\in A$，$\exists$开球$B(P, 2r_P)$含于$\mathscr{F}$的某个开集内. 因而$B(P, r_P)$也含于$\mathscr{F}$的同一开集内. 以$\mathscr{G}$记开球族$\{B(P, r_P): P\in A\}$，$\mathscr{G}$也覆盖A. 据汉茵—波赖尔定理，$\mathscr{G}$的有限子族$\{B(P_1, r_1), B(P_2, r_2), \cdots, B(P_K, r_K)\}$覆盖$A$. 令$\rho=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant K} r_i$. 现在对$\forall P\in A$，$P$属于某$B(P_i, r_i)$内且有

$$B(P, \rho)\subset B(P_i, r_i+\rho)$$
$$\subset B(P_i, 2r_i).$$

示意图如图6·8球$B(P_i, 2r_i)$含于$\mathscr{F}$的某开集之内，因而$B(P, \rho)$含于$\mathscr{F}$的这个开集内. p是A的任意点，于是定理证迄.

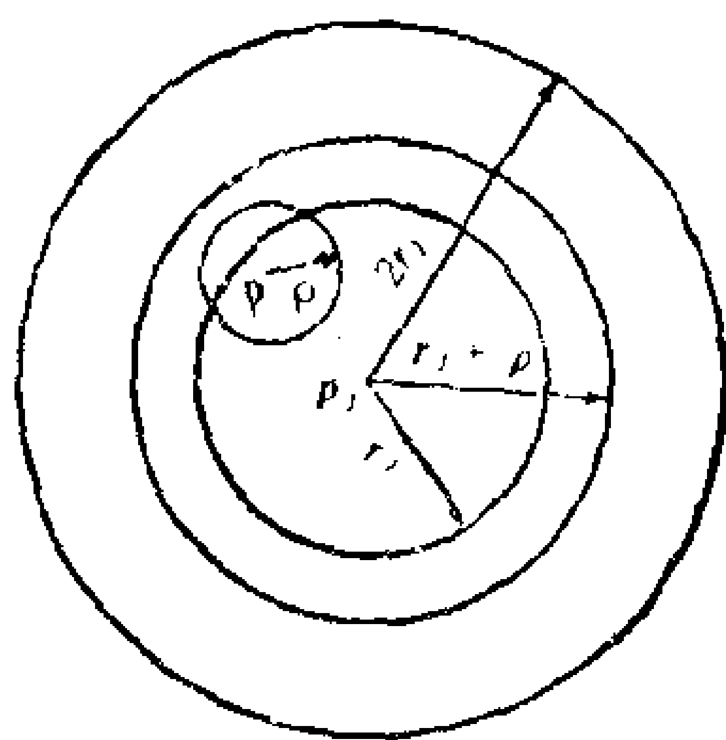


图 6·8

习　题

1. 证明有限点集是紧集。

2. 证明 (i) 任意多个紧集的交是紧集。

(ii) 有限多个紧集的并是紧集。

(iii) 无限多个紧集的并可能是非紧集。

3. 于欧几里得的R_2中，定义$A=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$B=A-\{P\}$，$P$是点$(1,1)$。给出一个覆盖$B$的开矩形族$\mathscr{F}$，而$\mathscr{F}$不存在覆盖$B$的有限子族。

4. 设l_2是$\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2$收敛序列$(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$的空间，$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，$x,y\in l_2$。于这个距离空间中$e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)$为第$n$个分量为1其他分量都为零的元素。证明集$\{e_n\}$是$l_2$的有界非紧集。

5. 在R_1中，开集族$\mathscr{F}=\{I_0\}\cup\left\{I_a:0<a\leqslant 1,\ I_a=\left(\frac{a}{2},2\right)\right\}$，$I_0=\left\{x:\frac{-1}{5}<x<\frac{1}{5}\right\}$，$\mathscr{F}$覆盖$A=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$。对$\mathscr{F}$求一勒贝格引理中的$\rho$值。

6. 设R_2中矩形$R=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$被开集族$\mathscr{F}$所覆盖。证明可用平行于$R$的边的直线把$R$划分为彼此不含共同内点的矩形，使这每一矩形含于$\mathscr{F}$的一开集内。

7. 设$\mathscr{G}$是只有有限个$x_i\neq 0$的序列$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$的空间。距离定义为$d(x,y)=\max\limits_{1\leqslant i<\infty}|x_i-y_i|$。证明$\mathscr{G}$是

距离空间，求$\mathscr{G}$中的一个有界闭非紧集。

8. 设$\mathscr{F}$是R_2中覆盖圆周$C=\{(x,y): x^2+y^2=1\}$的开集族。证明∃一正数ρ，$\mathscr{F}$也能覆盖集$A=\{(x,y):(1-P)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1+\rho)^2\}$.

9. 证明定理6·21。

10. 证明定理6·22。

11. 证明定理6·23。

§6·5 紧集上的函数

本节研究距离空间S到R_1的函数，R_1到R_1的函数的一些基本性质将得到推广。我们从极限和连续性的基本概念着手。

定义 设f是距离空间S到R_1的函数，f的定义域$A\subset S$，记作$f: A\to R_1$。称当p通过点集A的点趋向于p_0点时，$f(p)$趋向于极限$l\Longleftrightarrow$(i)P_0是A的极限点；(ii)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使A内满足$0<d(P,P_0)<\delta$的点p，有$|f(P)-l|<\varepsilon$成立。记为

$$f(P)\to l\quad 当P\to P_0,\ P\in A或\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f(P)=l.$$

注意在极限定义中不要求$p_0\in A$，或$l=f(P_0)$。当$p_0\in A$，$l=f(P_0)$成立时就是连续性定义。

定义 设A是距离空间S的子集，给定$f: A\to R_1$，$P_0\in A$。称f在p_0点关于A连续$\Longleftrightarrow\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f(P)=f(P_0)$。称$f$在$A$上连续$\Longleftrightarrow$对$\forall p\in A$，$f$在$p$点关于$A$连续。

在§2·2中所建立的定理，除了复合函数定理之外都能直接推广过来。

定理6·28（极限唯一性） 设A是距离空间S的子集，$f: A\to R_1$，$P\in A$当$P\to P_0$，$f(P)\to L$及$f(P)\to M$，那么$L=M$。

证明 假定$L\neq M$将导致矛盾。取$\varepsilon=\frac{1}{2}|L-M|$。依极限定义，对这一$\varepsilon$，$\exists\delta_1>0$及$\delta_2>0$，使对$A$中分别满足$0<d(P, P_0)<\delta_1$，$0<d(P, P_0)<\delta_2$的$p$，相应地有

$$|f(P)-L|<\varepsilon, \quad |f(P)-M|<\varepsilon. \qquad (6\cdot 8)$$

P_0既是A的极限点，$\exists\overline{P}\in B(P_0, \delta)$，$\overline{P}\in A$，这里$\delta$为$\min\{\delta_1, \delta_2\}$。由(6.8)式，得

$$|L-M|\leqslant|L-f(\overline{P})|+|f(\overline{P})-M|<2\varepsilon=|L-M|.$$

导致$|L-M|<|L-M|$的矛盾。

把上面的证明与定理2·1的证明对照一下，可见只要把定理2·1中R_1的距离($d(x, y)=|x-y|$换成一般的距离，把R_1的元素x换成距离空间的元素p，就是定理6·28的叙述与证明。§2·2中除了定理2·7之外的九个定理从叙述到证明都能对照着推广过来。

第三章建立的闭区间上连续函数的基本性质，在函数定义域是紧集的条件下，有界性、极值性、一致连续性定理都能推广过来。下面的三个定理就是相应定理的推广。作为示范仅写出有界性定理的证明。

定理6·29 设A是距离空间S中的紧集，$f: A\to R$，在A

上连续，那么f的值域是有界的。

证明 若不然，f的值域无界将导致矛盾。当值域无界，对$\forall$自然数n，$\exists P_n\in A$，使$|f(P_n)|>n$，因为A是紧集，$\{P_n\}\subset A$，$\{P_n\}$含有收敛子列$\{q_n\}$，$q_n\to\overline{P}\in A$。由f在A上连续，有$f(q_n)\to f(\overline{P})$。这与

$$|f(q_n)|=|f(P_{K_n})|>K_n\geqslant n\to+\infty\quad(n\to\infty)$$

相矛盾。

注 读者对照定理6·29与定理3·9的证明可见两者同样都基于定义域是紧集。若A非紧结果不成立。

定理6·30 设A是距离空间中的紧集，$f: A\to R_1$在A上连续，那么f的值域包含它的上确界、下确界。

定义 设A是距离空间S的子集，$f: A\to R_1$是给定的。称f在集B上一致连续$\Longleftrightarrow$(i)$B\subset A$(ii)对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$P,q\in B$，$d(P,q)<\delta$，便有$|f(P)-f(q)|<\varepsilon$。

定理6·31 设$f: A\to R_1$在A的紧子集B上连续，那么f在B上一致连续。

定理6·30、定理6·31的证明可仿照定理3·10、定理3·11写出。

习 题

习题1—7中的函数都是定义在距离空间S的集A上的。

1. 设C是常数，$\forall P\in A$，$f(P)=C$。P_0是A的极限点，那么$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f(P)=C$。(常数极限定理)

2. 设p_0是A的极限点，f，g对$\forall P\in(A-\{P_0\})$有$f(P)=$

$g(P)$。若$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f(P)=L$ 证明$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}g(P)=L$。

3. 设$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f_1(P)=L_1$，$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f_2(P)=L_2$，证明$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}(f_1(P)+f_2(P))=L_1+L_2$。

4. 在习题3的假设下，证明$\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}(f_1(P)\cdot f_2(P))=L_1\cdot L_2$。

5. 在习题3假设条件之下，且$L_2\neq 0$。证明

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\P\in A}}f(P_1)/f(P_2))=L_1/L_2.$$

6. 设对$\forall P\in A$ $f(P)\leqslant g(P)$，当$P\to P_0$，$P\in A$，$f(P)\to L$及$g(P)\to M$，证明$L\leqslant M$。

7. 对距离空间集A上的实值函数叙述并证明§2·2定理2·10（两边夹定理）相应的定理。

8. 证明复合函数定理的如下推广。设f：$\mathrm{R}_1\to\mathrm{R}_1$在$L$连续，$g$：$S\to\mathrm{R}_1$，$S$是距离空间。若当$P\to P_0$，$g(P)\to L$，那么$f[g(P)]\to f(L)$，$(P\to P_0)$。

9. 设$A\subset\mathrm{R}_1$ f：$A\to\mathrm{R}_1$在集A上连续。举例说明当A不是区间时介值性定理可能不成立。

10. 证明定理6·30。（极值性定理）

11. 证明定理6·31。（一致连续定理）

12. 用定理6·26证明定理6·29。

13. 以勒贝格引理（定理6·27）证明定理6·31。

§6·6 连通性

在区间上定义的连续函数介值性定理与区间的连通性有

关。直观地想象连通性是指点集的任意两点能以位于集内的“路径”联结，或换一种说法集不能分成两个或更多个“分块”。

定义 距离空间S的两个子集A，B称为是分离的（或不连通的）$\Longleftrightarrow A\cap\overline{B}$及$B\cap\overline{A}$都是空集。$\overline{A}$，$\overline{B}$分别是$A$，$B$的闭包。

集A称为连通的$\Longleftrightarrow A$不能是两个非空分离集的并。

例如$\mathbf{R}_1$内的集$A=\{x:0<x<1$或$1<x<2\}$是不连通的。事实上会$B_1=\{x:0<x<1\}$，$B_2=\{x:1<x<2\}$。$B_1\cap\overline{B_2}$及$B_2\cap\overline{B_1}$都是空集，$A=B_1\cup B_2$，B_1，B_2是分离的，所以A是不连通集。如图6·9所示。

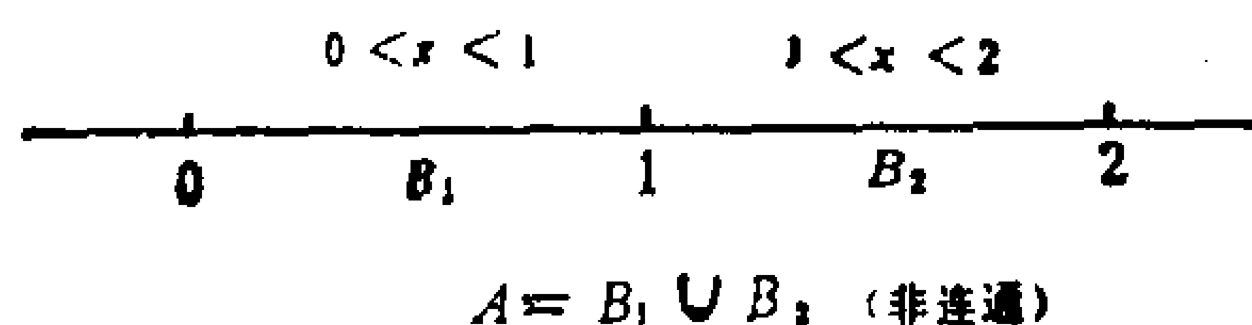


图 6·9

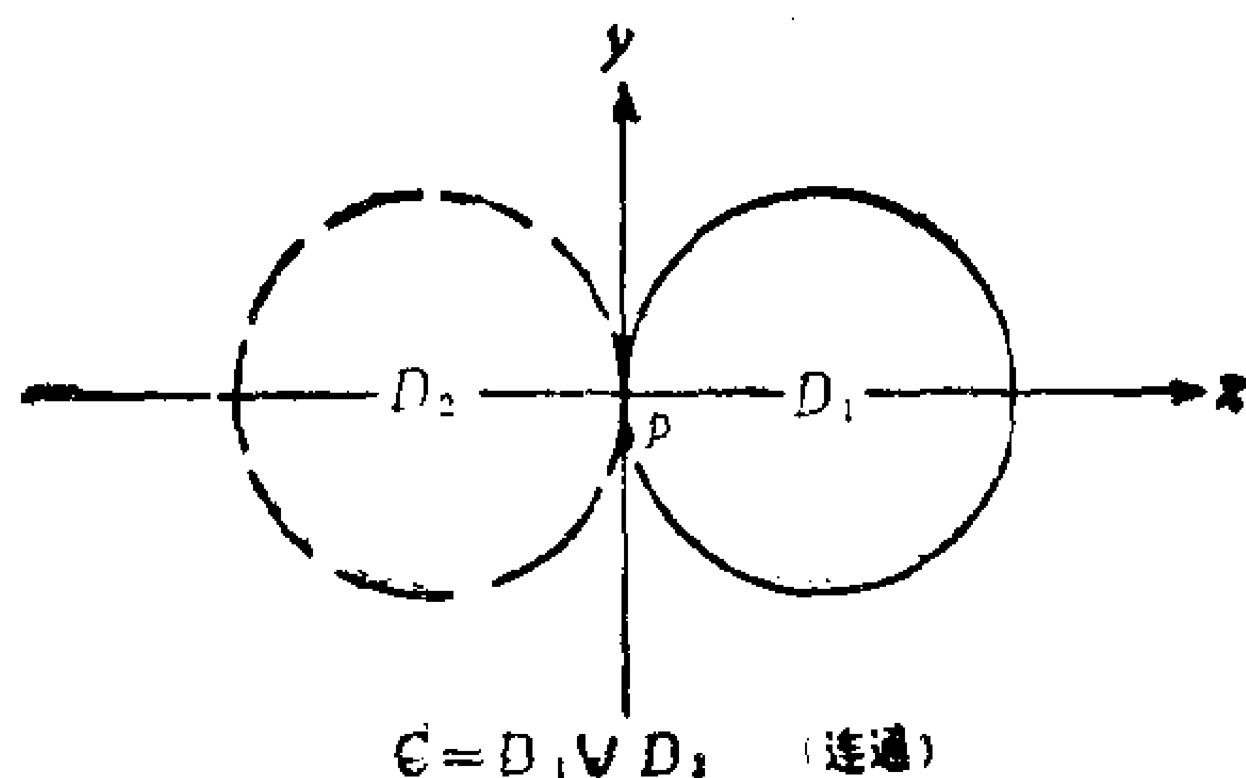


图 6·10

图6·10所示$\mathbf{R}_2$内的点集$C=D_1\cup D_2$是连通的。其中

$D_1=\{(x,y):(x-1)^2+y^2\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y):(x+1)^2+y^2<1\}$。虽然$D_1$与$D_2$不相交。但$P(0,0)\in D_1$，$P(0,0)$是$D_2$的极限点。即$D_1\cap\overline{D_2}=\{P\}$不空，$D_1$与$D_2$不分离。

下面定理是定理3·7在距离空间的推广，它表明连通性的作用。

定理6·32（介值定理） 设f是定义在距离空间X上的实值函数。若f在X的连通的非空子集S上连续，那么$R(f|_S)=\{f(P):P\in S\}$是R_1的区间或一个点的集。

证明 若$f|_S$是常数，$R(f|_S)$是个单点集。否则，$R(f|_S)$含有两个点，仿效定理3.7的证明.设$y_1,y_2\in R(f|_S)$，$y_1<y_2$，证明当C满足$y_1<C<y_2$，有$C\in R(f|_S)$就够了。假定存在这样的$C\overline{\in}R(f|_S)$。定义$S_1=\{P:f(P)<C,\ P\in S\}$，$S_2=\{P:f(P)>C,\ P\in S\}$．由定义$S_1$与$S_2$不相交，并且$S_1$，$S_2$非空（理由是$y_1$，$y_2\in R(f|_S)$，$y_1<C$，$y_2>C$），$S=S_1\cup S_2$。根据$S$是连通集的假设，$S_1$与$S_2$是非分离的，即必有一$S_i$($i=1$，2)包含另一集的极限点．另一方面，设$P_0\in S_1$，令$\varepsilon=C-f(P_0)>0$，对这一$\varepsilon$，$\exists\ \delta>0$，使$S$中满足$d(P,\ P_0)<\delta$的$p$，有$|f(P)-f(P_0)|<\varepsilon=C-f(P_0)$。也即对这样的$p$，有$f(P)<f(P_0)+C-f(P_0)=C$。于是$B(P_0,\ \delta)$中不含有$S_2$的点。$p_0$不是$S_2$的极限点．同理，$S_2$的点不是$S_1$的极限点。这与$S$的连通性相矛盾．于是当$C$介于$y_1$，$y_2$之间，便有$C\in R(f|_S)$。这表明$R(f|_S)$是一区间。

下面关于连通集性质的定理留给读者去证明。

定理6·33 设$\mathscr{F}$是距离空间X的连通子集的族并且族

中的每两个元素都有公共点，那么$\mathscr{F}$的并$A=\bigcup\limits_{S\in\mathscr{F}}S$是连通集。

定理6·34 若S是一距离空间的连通子集，那么S的闭包$\overline{S}$是连通的。

定理6·35 $\mathbf{R}_1$中的区间是$\mathbf{R}_1$的连通子集。

证明 因为任一区间或是闭区间或是闭区间递增序列的并集。例如$[a,\ b)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,\ b_n]$，这里$a_n=a$，$b_n=b-\dfrac{b-a}{2^n}$，$n=1,2,\cdots$；$[a,+\infty)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[a,\ a+n]$。据定理6•33，只要证明闭区间是连通集就够了。

设闭区间$[a,b]=S_1\cup S_2$，这里S_1，S_2是不相交的非空集。令$U_1=\sup S_1$，$U_2=\sup S_2$，并设$U_1\leqslant U_2\leqslant b$。设$U_1<b$，那么满足$U_1<x\leqslant b$的$x\in S_2$，因此$U_2=b$。这时，若$U_1\in S_1$，显然$U_1$是$S_2$的极限点；若$U_1\in S_2$，因$U_1=\sup S_1$，$U_1$是$S_1$的极限点。即$S_1$与$S_2$为非分离的集。若$U_1=b$，当然$U_1=U_2=b$，$b$是$S_1$也是$S_2$的极限点，$S_1$与$S_2$不是分离的。总之，$[a,b]$不能表示成非空的两分离集的并，它是连通集。

习　题

1. 证明定理6•33〔提示：用反证法。设$A=\Sigma_1\cup\Sigma_2,\Sigma_1$，$\Sigma_2$互不相交且非空。$\mathscr{F}$的某$S$与$\Sigma_1$及$\Sigma_2$的交都不空导致矛盾〕。

2. 证明定理6·34。

3. 设f: $R_1 \to R_1$在区间I上连续。证明$\{(x,y): x \in I, y = f(x)\}$是$R_2$内的连通集。

4. 设 $$S_1 = \left\{(x,y): x>0, \quad y = \sin\frac{1}{x}\right\} \qquad (6\cdot9)$$

$$S_2 = \left\{(x,y): x<0, \quad y = \sin\frac{1}{x}\right\}$$

证明$S_1 \cup S_2$是非连通集。即S_1与S_2是分离集。

5. S_1，S_2定义如（6.9）式。证明集$S = \{(x,y): x=0, |y|<\eta, 0<\eta\leqslant 1\} \cup S_1 \cup S_2$是连通集。

6. S_1，S_2定义如（6.9）式。证明集$S = \{(x,y): x=0, |y|>1\} \cup S_1 \cup S_2$是非连通集。

7. 证明：若A是距离空间的连通集且$A \subset B \subset \overline{A}$，那么$B$是连通集。

8. 设S是距离空间的闭子集，且S非连通的，那么存在S的不相交的非空且闭的子集S_1与S_2，使$S = S_1 \cup S_2$。

9. 设A是R_1中有理点集，证明A是非连通的。

10. 设A与B是距离空间中的连通集但$A-B$不连通。假设$A-B = C_1 \cup C_2$，C_1，C_2是分离集，证明$B \cup C_1$是连通的。

11. 设$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$设$f: I \to I$的连续函数。证明方程$f(x) = x$至少有一个解。〔提示：对函数$F(x) = f(x) - x$应用反证法，假设$F(x) \neq 0$与介值定理矛盾。〕

§6·7 距离空间之间的映象

现在把函数概念推广为集间的映象，并研究哪些实值连续函数定理能推广到从距离空间到距离空间的连续映象上来。

定义 从集A到集B的一关系是序偶(p,q)的集，$p\in A$，$q\in B$。组成序偶集的(p,q)的元素p组成的集称为这一关系的定义域；而所有(p,q)的q组成的集称为这一关系的值域。当关系的序偶中没有两个同样第一元素的序偶时，关系称之为映象，或称之为函数、变换等。若f是从A到B的映象，表示为$f: A\to B$。以$D(f)\subset A$记f的定义域。以$R(f)$记f的值域，若$p\in D(f)$，$f(p)$是B中唯一元素q满足$(p,q)\in f$。若$D(f)=A$，就说f是A上到B内的映象。若$R(f)=B$就说是到B上的映象。若$A_1\subset D(f)$，A_1在f之下的像是指集$\{f(p): p\in A_1\}$记为$f(A_1)$。若$B_1\subset R(f)$，B_1在f之下的逆像指集$\{p: f(p)\in B_1,\ p\in D(f)\}$，记为$f^{-1}(B_1)$。若$T$是从$A$到$B$的关系，其逆关系$T^{-1}$指集$\{(q,p):(p,q)\in T\}$。映象的逆关系不必是映象，当且仅当映象是1－1的，逆关系是映象。

注 三维空间中曲线的参数方程是

$$x=f(t),\qquad y=g(t),\qquad z=h(t).$$

这三个方程表示从R_1到R_3的映象．一般的，从R_N到R_M的映象可由M个显式方程组给出：

$$y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_N)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_N)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$y_M = f_M(x_1, x_2, \cdots, x_N).$$

每一f_i是从R_N到R_1的映象，f_i的有序组表示从R_N到$R_M = R_1 \times R_1 \times \cdots \times R_1$（M个因子）的映射。

当映象的定义域及值域都是距离空间的集时，容易把R_1到R_1的函数的极限、连续概念推广到这样的映象。从而第三章中那些仅与R_1是距离空间有关的若干定理都能得到推广。

定义 设(S_1, d_1)，(S_2, d_2)为两距离空间，f是从S_1到S_2内的映象，$A \subset S_1$，$P \in A$，$P_0 \in S_1$，称当$p \to p_0$时，$f(P) \to q_0 \Longleftrightarrow$ (i) p_0是A的极限点；(ii)对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使$d_2(f(P), q_0) < \varepsilon$对所有$A$中满足$0 < d_1(P, P_0) < \delta$的$p$成立。也说成当$p$趋向于$p_0$，$f(p)$的极限是$q_0$，表示为

$$f(p) \to q_0, \quad 当 p \to p_0,\ p \in A$$

或

$$\lim_{\substack{P \to P_0 \\ P \in A}} f(p) = q_0.$$

映象f关于A在p_0点连续$\Longleftrightarrow$ (i) $f(P_0)$有定义；(ii) p_0为A的孤立点或为A的极限点，且$\lim\limits_{\substack{P \to P_0 \\ P \in A}} f(P) = f(P_0)$.

f在A的每一点都连续，称在A上连续。当$A = S_1$时，上述诸定义中"关于A"可以省略。

重要的是：一个函数关于A在某点连续而在同一点关于别的集可能不连续。例如$f: R_1 \to R_1$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x为有理数. \\ 0, & x为无理数. \end{cases}$$

它在各点都不连续。但是，若A是R_1的有理数集，那么f关于A在每一有理点连续，理由是f在A上是常数。另一方面，尽管每一无理数都是A的极限点，但f关于A在任一无理数处不连续$\left(\lim\limits_{\substack{P\to P_0\\ P\in A}} f(P)\neq f(P_0)\right)$！

§6·5中关于距离空间上的实值函数的定理能直接推广为值域也是距离空间的映射的相应的定理。这种推广可用值域的距离d_2代替R_1的距离并在叙述中作相应的改变而得出。以复合函数定理为例来说明。其他作为习题留给读者。

定理6·36 设f是从距离空间(S_1, d_1)到距离空间(S_2, d_2)内的映象，g是(S_2, d_2)上到距离空间(S_3, d_3)内的映象。若$h=g\circ f$（即$g\circ f(p)=g[f(p)]$），那么

(a)当$p\to p_0$，$f(p)\to q_0$，g在q_0连续，则$h(p)\to g(q_0)$。

(b)当f在S_1上连续，g在S_2上连续，则$h=g\circ f$在S_1上连续。

证明 仅需证明(a)，(b)是(a)的直接推论。

因为g在q_0点连续，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，使当$d_2(q, q_0)<\delta$，有$d_3(g(q), g(q_0))<\varepsilon$。又据$p\to p_0$时，$f(p)\to q_0$，对上述$\delta>0$，$\exists\,\delta_1>0$，使$d_2(f(p)q_0)<\delta$对满足$0<d_1(p, p_0)<\delta_1$的一切$p$成立。于是，对这样的$p$，有$d_2(f(p), q_0)<\delta$，进而$d_3(g[f(p)], g(q_0))<\varepsilon$成立。即定理(a)成立。

在空间上连续的映象能用开集表述它的特征。如下面定理所叙。

定理6·37 设f是距离空间(S_1, d_1)上到距离空间(S_2, d_2)内的映象，那么f在S_1上连续$\Longleftrightarrow$对每一S_2内开集U，

$f^{-1}(U)$是S_1内的开集。

证明 (a)设f在S_1上连续，U是S_2内开集。我们证明$f^{-1}(U)$是S_1内的开集。考察$\forall p_0\in f^{-1}(U)$。由连续定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当$d_1(p,p_0)<\delta$，有$d_2(f(p),f(p_0))<\varepsilon$。由$f(p_0)\in U$，$U$为开集，选取$\varepsilon$足够小使开球$B(f(p_0),\ \varepsilon)\subset U$，那么$f^{-1}(B)\subset f^{-1}(U)$。由连续性，当$d_1(p,\ p_0)<\delta$，有$d_2(f(p),\ f(p_0))<\varepsilon$，这表明$B_1(p_0,\ \delta)\subset f^{-1}(B)\subset f^{-1}(U)$。即$p_0$是$f^{-1}(U)$的内点，因此$f^{-1}(U)$是开集。

(b)设对S_2内每个开集U，$f^{-1}(U)$是S_1的开集。考察$p_0\in S_1$，及给定$\varepsilon>0$。开球$B(f(p_0),\ \varepsilon)$是S_2中开集，那么$f^{-1}[B(f(p_0),\ \varepsilon)]$是$S_1$中开集。$p_0\in f^{-1}[B(f(p_0),\ \varepsilon)]$，可取一$\delta>0$，使$S_1$中开球$B_1(p_0,\ \delta)\subset f^{-1}[B(f(p_0),\ \varepsilon)]$。这一$\delta$是满足连续定义相应于$\varepsilon$要求的$\delta$。

注 (i) 连续函数并不常把开集映象为开集.例如，$\boldsymbol{R}_1\to\boldsymbol{R}_1$的函数$f(x)=x^2$映开区间$I=\{x:-1<x<1\}$为半开区间$J=\{x:0\leqslant x<1\}$.

(ii) 定理6·37也能以闭集代替开集叙述为：f在S_1上是连续的，当且仅当对S_2的每个闭集A，$f^{-1}(A)$是S_1内的闭集.同样，连续函数并不常把闭集的映象为闭集.例如$\boldsymbol{R}_1\to\boldsymbol{R}_1$的函数$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$把闭集$A=\{x:0\leqslant x<\infty\}$映射为半开区间$I=\{x:0<x\leqslant 1\}$.

下面简单事实的证明留给读者。

定理6·38 设f是从距离空间X到距离空间Y的映象，$p_0\in X$，$S\subset X$。d，d'分别表X、Y的距离。

(a)f关于S在p_0点连续$\Longleftrightarrow f(p_0)$有定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$p\in S$且$d(p,p_0)<\delta$的$p$，有$d'(f(p),f(p_0))<\varepsilon$。

(b)若p_0，$p_n\in S$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，$p_n\to p_0$，f关于S在p_0

点连续，那么$f(p_n)\to f(p_0)$.

定理6·39 设f是从距离空间X到距离空间Y内的映象，$p_0\in X$。若对于$\forall\{p_n\}\subset X$，当$p_n\to p_0$便有$f(p_n)\to f(p_0)$那么f在p_0点连续。

定理6·40 设f是从距离空间X到距离空间Y的连续映象，g是从Y到距离空间Z内的连续映象，那么复合映象$g\circ f$在其定义域上连续。当f在X上连续，g在Y上连续，那么$g\circ f$在X上连续。

定义 设(X,d)是距离空间，$S\subset X$，把d限制在$(S\times S)$上记为d_s，称距离空间(S,d_S)为由S导出的X的距离子空间。

$A\subset S$称为A是S内的开集（闭集）$\Longleftrightarrow A$作为(S, d_s)内的开集（闭集）.

例如S是R_1内的一些孤立点的集合，那么作为距离空间S，S的任何子集都是S内的开集。但这样的集在R_1内并不是开集。

定理6·41 设（A, d）是距离空间（S, d）的子空间。$C\subset A$，那么

（a）C是A内的开集$\Longleftrightarrow\exists S$的开集$G$，使$C=G\cap A$。

（b）C是A内的闭集$\Longleftrightarrow\exists S$的闭集$F$，使$C=F\cap A$。

（c）C在A内是连通的$\Longrightarrow C$在S内是连通的。

证明 （a）以B（P, r）表示S内以P为中心，以r为半径的开球。若$P\in A$，以$B_A(p,r)$表示以P为中心，以r为半径的A内的开球。显然$B_A(p,r)=A\cap B(p,r)$。现设C是A内的开集，$\forall p\in A$，$\exists B_A(p,r_p)\subset C$。取所有这些球的并

$\bigcup\limits_{p\in C} B_A(p,r_p)$，易知

$$C=\bigcup_{p\in C}B_A(p,r_p).$$

因为$B_A(p,r_p)=A\cap B(p,r_p)$，有

$$C=A\cap\left[\bigcup_{p\in C}B(p,r_p)\right].$$

由任意的开集族的并是开集，因而$G=\bigcup_{p\in C}B(p,r_p)$是$S$的开集。於是$C=A\cap G$。

再设$C=A\cap G$，G是S内的开集。证明C是A内的开集。$\forall p\in C=A\cap G$。P既是G的点，它是含于G内的某开球$B(p,r_p)$的中心。因而$B_A(p,r_p)=A\cap B(p,r_p)\subset A\cap G=C$。即$C$的每一点关于$A$是内点，由定义$C$是$A$内的开集。

(b) 可与 (a) 类似来证明。(c) 由 (a)，(b) 以及连通性定义可得。把它们留作习题。

定义 设f是从距离空间 (S_1,d_1) 到距离空间 (S_2,d_2) 的映象，$A\subset S_1$，称f在集A上一致连续$\Longleftrightarrow$ (i) f的定义域含有A，(ii) 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当任意p，$q\in A$，且$d_1(p,q)<\delta$，有$d_2(f(p),f(q))<\varepsilon$（$\delta$与$\varepsilon$有关，而与$p$，$q$无关）。

注 若映象f在集A上一致连续，那么它在A的每一点关于A是连续的。但是，关于不同于A的集可以不连续。例如f：$R_1\to R_1$。当x是有理数$f(x)=1$；当x是无理数$f(x)=0$。f在有理点集A上一致连续，它在A的每一点关于A连续，可是f关于R_1在任何点都不连续。

定理6·42 设A是距离空间 (S_1,d_1) 的子集，f是A上到距离空间 (S_2,d_2) 内的连续函数。

(a) 若A是紧集，那么$f(A)$是紧集。

(*b*) 若A是连通的，那么$f(A)$是连通的。

(*c*) 若A是紧集，那么f在A上一致连续。

(*d*) 若A是紧集且f是1－1的，那么f^{-1}连续。

定理6·42的证明留给读者。

定义 设$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$是$\mathbf{R}_1$内的区间，$Z$是$I$上到$\mathbf{R}_N$内的连续映象。称$Z$是逐段线性的$\Longleftrightarrow\exists I$内的数$t_0$，$t_1$，…，$t_K$，$a=t_0<t_1<\cdots<t_K=b$，$Z$在每个子区间$I_j=\{x: t_{j-1}\leqslant x\leqslant t_j\}$ $(j=1, 2, \cdots, K)$上是线性映象$Z^j=(Z_1^j, \cdots Z_N^j)$，$Z_i^j=a_i^jx+b_i^j$，$(i=1, 2, \cdots, N, j=1, 2, \cdots, K)$，$a_i^j$，$b_i^j$是数。

定理6·43 设G是$\mathbf{R}_N$内连通开集，u，$v\in G$。那么$\exists$逐段线性映象$Z: I\to\mathbf{R}_N$，满足$Z(a)=u$，$Z(b)=v$，$Z(I)\subset G$（Z（I）称为联结u，v的折线）。

证明 设u是G的一定点，定义集$G_1=\{v: v\in G$，且$\exists$满足定理要求联结u，v的映象$\}$因为G含有以u为中心的某一开球，这球内的点都可用线性映象与u相联结，因此这一球含于G_1内。设$v\in G_1$，那么$\exists$逐段线性映象$Z: I\to\mathbf{R}_N$，$Z(a)=u$，$Z(b)=v$，$Z(I)\subset G_1$。因G是开集$\exists$球$B(v,\rho)\subset G$。当$w\in B(v, \rho)$，取一大于b的数c，令$J=\{x: a\leqslant x\leqslant c\}$。定义逐段线性映象$\xi$：$J\to\mathbf{R}_N$，$\xi$在$I$上与$Z$重合，在$J-I$上是联结$\xi(b)=v$，$\xi(c)=w$的线性映象。$\xi$是$J$上合乎要求的逐段线性映象。再用正比变换把$\xi$变为$I$上的联结$u$，$w$的逐段线性映象。于是有$w\in G_1$，这即证明了$B(v,\rho)\subset G_1$，因此$G_1$是开集。

现证$G=G_1$。假定$G-G_1$是非空集。因为G_1是开集，$G-G_1$的极限点不在G_1内。G是连通的应当有$v'\in G-G_1$，

v'是G_1的极限点．由G是开集，对$v'\in G$，$\exists$某开球$B(v',\rho)\subset G$。v'是G_1的极限点，$\exists w'\in G_1\cap B(v',\rho)$（图6·11）．

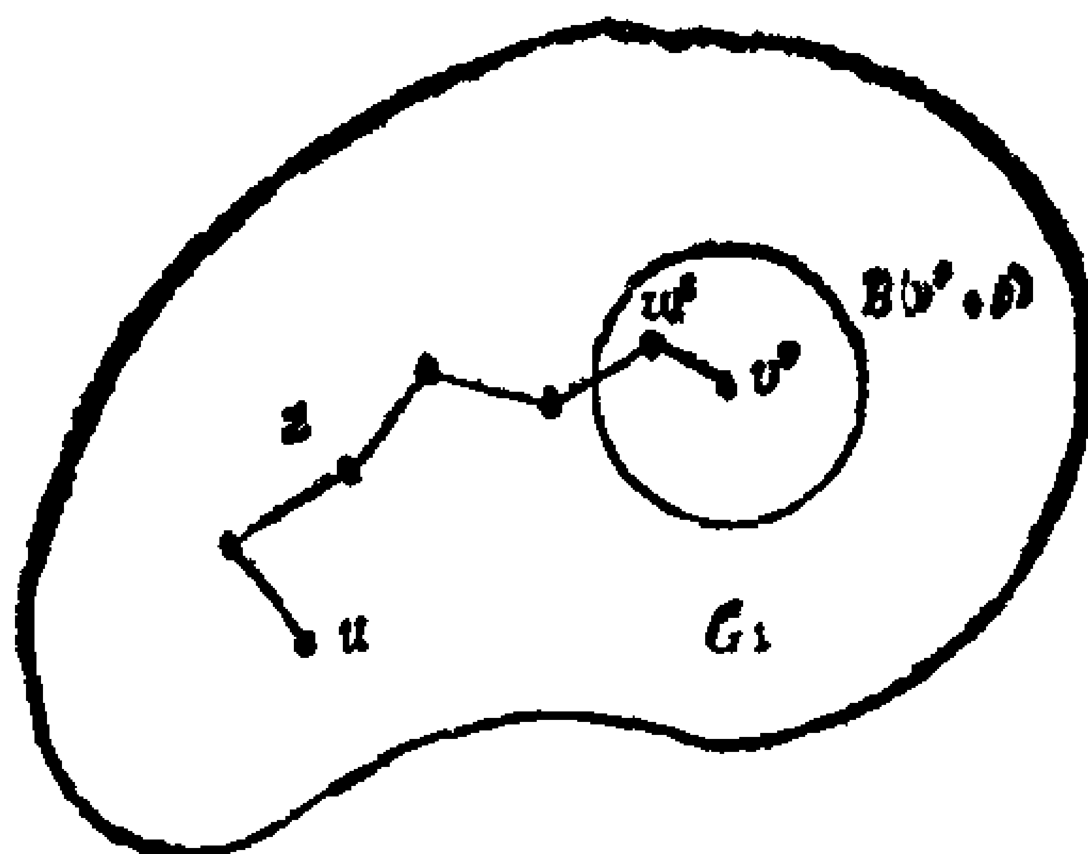


图 6·11

然v'，w'都属于$B(v',\rho)$，存在线性映象联结v'，w'，进而存在联结u，v'逐段线性映象。这样$v'\in G_1$，与$v'\in G-G_1$相矛盾。于是$G=G_1$。定理证毕。

定理6·44 （a）距离空间的集S是连通的$\Longleftrightarrow S$不能是两个非空的不相交的S内的开子集的并．

（b）距离空间的集S是连通的$\Longleftrightarrow S$内的既开且闭的集仅有S及空集φ。

证明 （a）设S是不连通的。那么$\exists S_1$，S_2是非空的分离的集，且$S=S_1\cup S_2$。由分离集的定义彼此不含有另一集的极限点，这样$\forall p\in S_1$，p是与S_2不相交的某个球$B(p,2r_p)$的中心。同理S_2的每一点q是不含S_1的点的某个球$B(d,2\rho_q)$的中心。定义

$$G_1=\bigcup_{p\in S_1}B(p,r_p),\quad G_2=\bigcup_{q\in S_2}B(p,\rho_q).$$

显然G_1，G_2是分别包含S_1，S_2的开集。我们证明$G_1\cap$

$G_2=\varphi$。设$\bar{p}\in G_1\cap G_2$。那么$\exists p\in S_1$，$q\in S_2$，$\bar{p}\in B(p, r_p)\cap B(q, \rho_q)$。由$d$是距离函数，有

$$d(\bar{p},p)<r_p\leqslant\frac{1}{2}d(p,S_2)\leqslant\frac{1}{2}d(p,q),$$

$$d(\bar{p},q)<\rho_q\leqslant\frac{1}{2}d(q,S_1)\leqslant\frac{1}{2}d(p,q).$$

因此

$$d(p,q)\leqslant d(p,\bar{p})+d(\bar{p},q)<\frac{1}{2}d(p,q)+\frac{1}{2}d(p,q)$$
$$=d(p,q).$$

导致$d(p,q)<d(p,q)$的矛盾。于是$G_1\cap G_2=\varphi$.注意到$S=(S_1\cap G_1)\cup(S_2\cap G_2)$，所以$S$是$S$内的两非空开子集的并。

再证当S是S内两非空开子集T_1，T_2的并时，S是不连通的。T_1是S的开集，$\exists$距离空间的开集G_1，使$T_1=G_1\cap S$（定理6·41(a)）。那么$\forall p\in T_1,\exists B(p,r)\subset G_1$，$B(p,r)$不含$T_2$的点。因此$T_1$不含$T_2$的极限点。这恰好表明$S$是不连通的。

(b)的证明容易由(a)得出。

习　题

1.设(S_1, d_1)，(S_2, d_2)是距离空间，$A\subset S_1$，f是A上到S_2内的在p_0点关于A连续的映象。假若p_1，$p_2\cdots,p_n\cdots$是A的序列，$p_n\to p_0$。证明$f(p_n)\to f(p_0)$.

2.证明若f在P_0点关于A是连续的，$P_0\in C\subset A$，那么f在P_0点关于C连续。

3.设f是从距离空间(S_1, d_1)到距离空间(S_2, d_2)内的

映象．叙述并证明类似定理6·28的极限唯一性定理。

4. 证明定理6·36的(*b*)。

5. 举出$\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$的连续函数$f$，它把一开集映象为一闭集。

6. 设（S,d）是距离空间，A，C是S的子集且$C\subset A$，证明若C在A内是闭的，那么C在S内是闭的。

7. 证明定理6·41的（*b*）。

8. 证明定理6·41的（*c*）。

9. 设（S_1，d_1），（S_2，d_2）是距离空间且f是S_1上到S_2内的映象。证明f是连续的$\Longleftrightarrow S_2$的闭集A，$f^{-1}(A)$是S_1内的闭集。

10. 举出一$\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$的函数，它在$\mathbf{R}_1$的每一点连续但不一致连续。

11. 设（S_1，d_1），（S_2，d_2），（S_3,d_3）都是距离空间，f是S_1上到S_2内一致连续映象，g是在S_2上到S_3内的一致连续的映象。证明$g\circ f$是S_1上一致连续的映象。

12. 证明定理6·42.（*a*）　〔提示：参看习题1.〕

13. 证明定理6·42.（*b*）。

14. 证明定理6·42.（*c*）。

15. 证明定理6·42.（*d*）。

16. 设f，g是在（S_1，d_1）上到（S_2,d_2）内的连续映象，令A是S_1中使$f(p)=g(p)$的点p的集。证明A是闭集。〔提示：证明S_1-A是开集。〕

17. 设$S=\{(x_1,x_2,x_3):1<x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\}$为$\mathbf{R}_3$内的集。$p_1=\left(\frac{-3}{2},\ 0,\ 0\right)$，$p_2=\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$．构造一具体的从$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$到$\mathbf{R}_3$的逐段线性映象$Z$，其

值域属于S，$Z(0)=p_1$，$Z(1)=p_1$。

18. 证明定理6·44 (b)。

§6·8 压缩映象定理

§6·4的定理6·22指出：距离空间中每个收敛序列是哥西序列。一般说，哥西序列却不必是收敛的。

定义 距离空间S称为完备的$\Longleftrightarrow S$内的每个哥西序列都收敛于S的一个点。

由定理6·23，凡紧空间是完备的。我们知道$\mathbf{R}_1$不是紧空间但它是完备的（定理3·12）。$\mathbf{R}_N$也是完备非紧的空间，下面定理证明$\mathbf{R}_N$的完备性。

定理6·45 空间$\mathbf{R}_N$伴之欧几里得距离它是完备的距离空间。

证明 我们已证明了$\mathbf{R}_1$是完备的。设$N\geqslant 2$，x_1，x_2，…，x_n，…是$\mathbf{R}_N$内的哥西序列，$x_n=(x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^N)$。由

$$d(x_m, x_n)=\left[\sum_{i=1}^{N}(x_m^i-x_n^i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

固定j，$1\leqslant j\leqslant N$，有

$$d(x_m, x_n)=\left[\sum_{i=1}^{N}(x_m^i-x_n^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant |x_m^j-x_n^j|.$$

这表明序列$\{x_n^j\}$是$\mathbf{R}_1$内的哥西序列，它收敛于极限x_0^j，由此便有$x_n\to x_0$，$x_0=(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^N)\in\mathbf{R}_N$。

定理6.46（压缩映象定理） 设S是完备距离空间，f是S上到S内的映象，且对x，$y\in S$有

$$d(f(x),\ f(y))\leqslant Kd(x,\ y) \tag{6·10}$$

其中$0<K<1$（f称为压缩映象），那么$\exists$唯一不动点$x_0\in S$，使$f(x_0)=x_0$。且对$\forall x_1\in S$，令$x_{n+1}=f(x_n)$，得到序列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$成立。

证明 于S内任取x_1。令$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=1,\ 2,\ \cdots$。由f是压缩映象，$d(x_2,\ x_3)\leqslant Kd(x_1,\ x_2)$，$d(x_3,\ x_4)\leqslant Kd(x_2,\ x_3)\leqslant K^2d(x_1,\ x_2)$。一般地，按归纳法有

$$d(x_n,\ x_{n+1})\leqslant K^{n-1}d(x_1,\ x_2) \tag{6·11}$$

设$m>n$，都是自然数．由距离的三角形不等式

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots$$
$$+d(x_{m-1},x_m)$$

应用不等式（6·11）于上式的右端各项，得出

$$d(x_n,x_m)\leqslant d(x_1,x_2)[K^{n-1}+K^n+\cdots+K^{m-2}]$$
$$=d(x_1,x_2)K^{n-1}[1+K+\cdots+K^{m-n-1}].$$

因此

$$d(x_n,x_m)<d(x_1,x_2)K^{n-1}\frac{1}{1-K}.$$

对于$\forall\varepsilon>0$，由$0<K<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}K^{n-1}=0$。因此$\exists N$，使$n$

$>N$ 有 $d(x_1,x_2)K^{n-1}\dfrac{1}{1-K}<\varepsilon$，即 $\{x_n\}$ 是 S 内的哥西序列。由 S 是完备的，$\{x_n\}$ 有极限点 x_0。据（6•10）式，f 在 S 上是连续的。因此对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 取极限便得

$$x_0=f(x_0)。$$

现证不动点是唯一的。假定另有 $x'\in S$，也满足 $x'=f(x')$。由（6•10）应有

$$d(x_0,x')=d[f(x_0),f(x')]\leqslant Kd(x_0,x')。$$

既然 $0<K<1$，必有 $d(x_0,x')=0$，即 $x_0=x'$。

推论 设 R_1 中区间 $I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，若 $f:I\to I$ 是在 I 内可微的函数，且对 I 的每一内点 x 都有 $|f'(x)|\leqslant K$，$0<K<1$。那么 $\exists$ 唯一的 $x_0\in I$，$f(x_0)=x_0$。

例 设 f 在 $I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$ 上可微，$f(a)$ 及 $-f(b)$ 属于区间 $J=\{x:0\leqslant x\leqslant b-a\}$。并且存在数 K 及 K'，对 $\forall x\in I$，$-1<K'\leqslant f'(x)\leqslant K<0$ 成立，证明 $\exists x_0\in I$，使 $f(x_0)=0$，且从 $\forall x_1\in I$ 迭代 $x_{n+1}=f(x_n)$ 的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0。

解 令 $g(x)=f(x)+x$。由 $f(a)$ 及 $-f(b)\in J$，可知 $g(a)$，$g(b)$ 属于 I，且由 $g'(x)=1+f'(x)>0$，$g(x)$ 是 I 上的递增函数，因此 g 映象 I 到 I 内。对 $g(x)-g(y)$ 应用中值定理，有

$$|g(x)-g(y)|=|(x-y)(1+f'(\xi))|,\quad a<\xi<b.$$

于是

$$|g(x)-g(y)|\leqslant(1+K)|x-y|=\alpha|x-y|,\quad 0<\alpha<1.$$

由推论 $\exists\, x_0 \in I$， $g(x_0)=x_0$。于是 $x_0+f(x_0)=x_0$，即 $f(x_0)=0$。

应用简单迭代方法求函数零点，最早是牛顿提出的后来人们称之为牛顿方法，这一简单方法发展成近代计算数学中的一个重要方法。

设 f 在 $I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 上有二阶导数，$f(a)>0$，$f(b)<0$，且 $\exists\, M>0$，及 $|f'(x)|\geqslant\frac{1}{M}$，$f''(x)\leqslant 2M$，$x\in I$。那么对 $\forall x_1\in I$，在某种条件下迭代序列

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

收敛于 $x_0\in I$，$f(x_0)=0$。

由 x_n 确定 x_{n+1} 的几何意义如图6·12所示：过 $y=f(x)$ 在

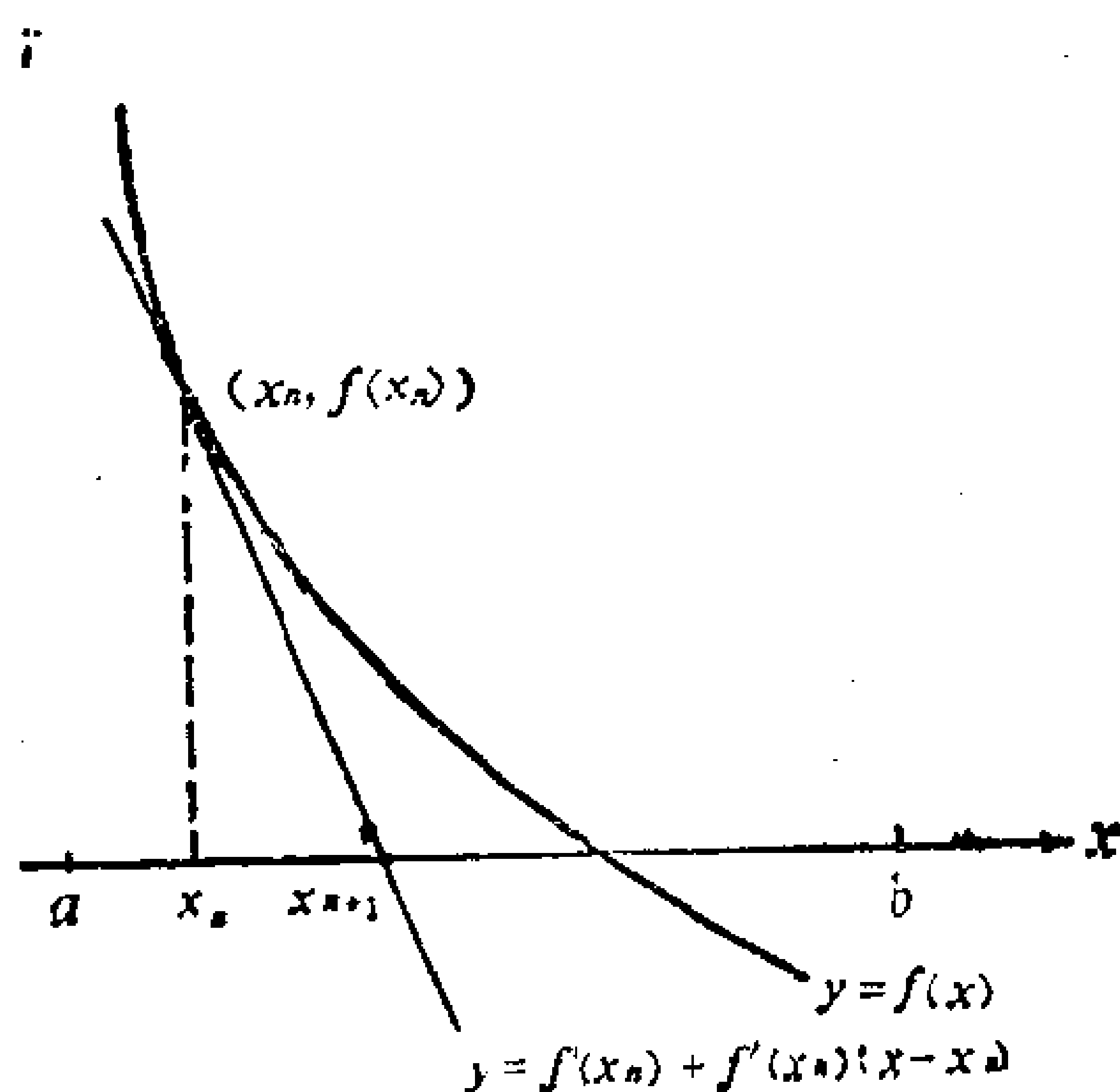


图 6·12

$(x_n, f(x_n))$ 点作切线交 x 轴于 x_{n+1}。因此牛顿方法也称切线法。

为证明$\{x_n\}$收敛于x_0，首先有

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant M|f(x_n)|.$$

再对f在x_{n+1}点应用台劳定理（参看定理7·6）得

$$f(x_{n+1})=f(x_n)+f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)+$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi)(x_{n+1}-x_n)^2,$$

这里ξ是介于x_n，x_{n+1}间的点，由$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$上式

成为$f(x_{n+1})=\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x_{n+1}-x_n)^2$。因此

$$|f(x_{n+1})|\leqslant M|x_{n+1}-x_n|^2.$$

假定$|f(x_1)|<1$，$M<1$时，容易由归纳法证明，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，且$f(x_0)=0$。用不动点的术语来说，牛顿法是

定义$F(x)=x-\dfrac{1}{f'(x)}f(x)$，构造$x_{n+1}=F(x_n)$，迭代序列

$\{x_n\}$，在x_n收敛的情况下，极限点x_0是F的不动点。要注意的是，x_0的存在性一般不能由定理6·46导出，原因是F一般不满足定理6·46的条件。

压缩映象存在不动点的定理，我们将在后面用它证明隐函数存在定理、微分方程解的存在唯一性定理。至于寻求更一般的不动点定理，用以研究各种方程的解的存在性，已构

成现代分析的重要内容。

习　题

1. 设$f: x \to \frac{1}{4}(1-x-\frac{1}{10}x^5)$，$x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.对$g(x)=x+f(x)$应用不动点定理（定理6·46）证明$f$于$I$中有零点存在，作出一迭代过程，并求其前三项。

2. 研究函数$f: x \to \sqrt{1+x^2}$　$x \in I = \{x: 0 \leqslant x < \infty\}$.证明$|f(x)-f(y)|<|x-y|$对一切$x \neq y$成立，但$f$没有不动点。由此说明定理6·46在$K=1$时结论不真。

3. 证明定理6·46的推论。

4. 设$f: (x, y) \to (x', y')$，是$R_2 \to R_2$的映象

(a)
$$x' = \frac{1}{4}x + \frac{1}{3}y - 2$$
$$y' = \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y + 3$$

(b)
$$x' = \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos y + 2$$
$$y' = \frac{1}{6}\cos x + \frac{1}{2}\sin y - 1.$$

证明f有不动点。

5. 设f是完备距离空间S到S内的映象，如果f^2满足定理6·46的条件（即f^2是$S \to S$的压缩映象），证明f有唯一不动点。如果∃自然数n_0，f^{n_0}是压缩映象结论如何？

7. 用牛顿法求$e^{-x}-5x=0$，在$I=\{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$内的根（精确到第三位小数）。

8. 用归纳法完成牛顿方法中x_n收敛性的证明（在假定$|f(x_1)|<1$，$M<1$的条件之下）。

9. 假如按公式：$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_1)}$ $n=1, 2, \cdots$ 给出一与牛顿法相似的迭代序列。试提出一使这一序列收敛的充分条件，并给出证明。

第七章　R_N内的微分

§7·1　偏　导　数

R_1上实值函数的导数概念对于R_N上函数推广为偏导数及全导数的概念。

用x，y，z等字母表示R_N的元素。x的分量表示为$(x_1, x_2, \cdots x_N)$。R_N伴之欧几里得距离$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$，本章采用符号$|x-y|$表示$d(x, y)$。$|x|$表示$d(x, 0)=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$，在$N=1$时$|x|$与$x$的绝对值一致。

定义　设$f: R_N\to R_1$，其定义域是R_N的开集。如下定义的N个函数$f_{,i}$称为f的一阶偏导数：

$$f_{,i}(x_1,x_2,\cdots,x_N)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,\cdots,x_i+h,\cdots,x_N)-f(x_1,\cdots,x_i,\cdots x_N)}{h}.$$

这里$f_{,i}$在上述极限存在的点有定义，称$f_{,i}$为f对第i个变量x_i的一阶偏导数。

$f_{,i}$是把f的其他变量$x_j(i\neq j)$当作常数a_j，对$R_1\to R_1$的函数

$$\varphi(x_i)=f(a_1,a_2,\cdots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\cdots,a_N) \tag{7·1}$$

求导数（在$x_i=a_i$点），得$f_{,i}$在$a=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$的值：

$$f_{,i}(a)=\varphi'(a_i). \tag{7·2}$$

表示偏导数的符号有$f_{,i}$，$D_i f$，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$，$f_{x_i}$等。我们将主要采用$f_{,i}$及$D_i f$这两种表示法。

我们知道，在R_N内联结$a=(a_1, a_2, \cdots, a_N)$及$a+h=(a_1+h_1, a_2+h_2, \cdots, a_N+h_N)$两点的线段之参数方程是

$$x_1=a_1+th_1,\ x_2=a_2+th_2,\ \cdots,\ x_N=a_N+th_N,$$

$$0\leqslant t\leqslant 1.$$

定理7·1 设τ_i是R_N内联结$(a_1,a_2,\cdots,a_N)$及$(a_1, a_2, \cdots, a_i+h_i\cdots, a_N)$的线段，$f:R_N\to R_1$的定义域包含$\tau_i$，且$f_{,i}$的定义域也包含$\tau_i$，那么$\exists\,\xi_i\in(a_i, a_i+h_i)$，满足

$$f(a_1,\cdots,a_i+h_i,\cdots,a_N)-f(a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_N)$$

$$=h_i f_{,i}(a_1,\cdots,\xi_i,\cdots,a_N) \tag{7·3}$$

证明 用（7·1）式来记（7·3）式之左端，它成为

$$\varphi(a_i+h_i)-\varphi(a_i).$$

对$\varphi(x_i)$这R_1上的函数应用微分中值定理（定理4·12）得到

$$\varphi(a_i+h_i)-\varphi(a_i)=h_i\,\varphi'(\xi_i),$$

即（7·3）式。

定理4·8，有如下的推广。

定理7·2（微分的基本引理） 设f，$f_{,i}(i=1,2,\cdots N)$的定义域含有以$a=(a_1,a_2,\cdots,a_N)$点为中心的某开球，且诸$f_{,i}$在a点连续，那么

(a) f在a连续。

(b) ∃在$x=0$连续的函数$\varepsilon_1(x)$，$\varepsilon_2(x)$，…，$\varepsilon_N(x)$，满足$\varepsilon_1(0)=\varepsilon_2(0)=\cdots=\varepsilon_N(0)=0$且

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{N}[f_{,i}(a)+\varepsilon_i(h)]h_i \qquad (7\cdot4)$$

对$h=(h_1,h_2,\cdots,h_N)$属于以$h=0$为中心r为半径的某一球$B(0,r)$成立。

证明 当$N=2$，应用恒等式

$$f(a_1+h_1,\ a_2+h_2)-f(a_1,\ a_2)$$

$$=[f(a_1+h_1,\ a_2)-f(a_1,\ a_2)]$$

$$+[f(a_1+h_1,\ a_2+h_2)-f(a_1+h_1,\ a_2)] \qquad (7\cdot5)$$

由$f,f_{,1}$与$f_{,2}$在以$a=(a_1,a_2)$为中心的一球内有定义。这恒等式在$h=(h_1,\ h_2)$属于以(0，0)为中心半径充分小的球内成立。对(7·5)右端方括号内的项应用定理7·1，∃$\xi_1(h_1,h_2)\in(a_1,a_1+h_1)$及$\xi_2(h_1,h_2)\in(a_2,a_2+h_2)$（图7·1）。对$(h_1,h_2)$属于以（0，0）为中心，$r$为半径的球内成立着

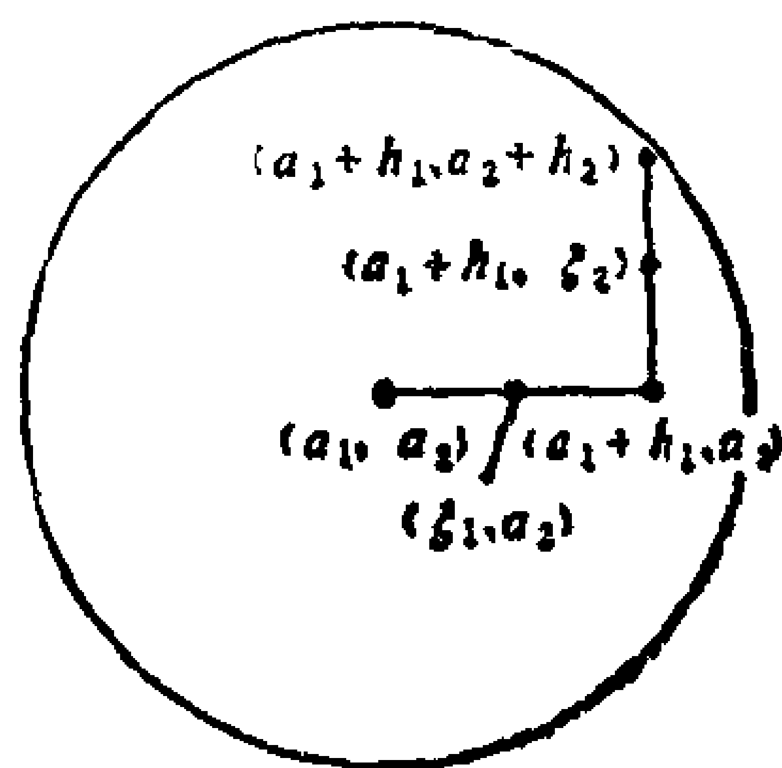


图 7·1

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2)-f(a_1, a_2)$$

$$=f_{,1}(\xi_1, a_2)h_1+f_{,2}(a_1+h_1,\xi_2)h_2. \tag{7·6}$$

定义

$$\varepsilon_1(h_1,h_2)=f_{,1}(\xi_1,a_2)-f_{,1}(a_1,a_2)$$

$$\varepsilon_2(h_1,h_2)=f_{,2}(a_1+h_1,\xi_2)-f_{,2}(a_1,a_2) \tag{7·7}$$

定理要求证明ε_1，ε_2在(0，0)点连续。对$\forall\varepsilon>0$，由$f_{,1}$与$f_{,2}$在(a_1, a_2)连续，$\exists\,\delta>0$，使当(x_1,x_2)属于以$a=(a_1, a_2)$为中心，δ为半径的球$B(a,\delta)$内有

$$|f_{,1}(x_1,x_2)-f_{,1}(a_1,a_2)|<\varepsilon,$$

$$|f_{,2}(x_1,x_2)-f_{,2}(a_1,a_2)|<\varepsilon. \tag{7·8}$$

综合（7·7）与（7·8），当h_1及h_2充分小（因而(ξ_1,ξ_2)逼近(a_1, a_2)），便有

$$|\varepsilon_1(h_1,h_2)|<\varepsilon, \quad |\varepsilon_2(h_1,h_2)|<\varepsilon.$$

此外显然$\varepsilon_1(0, 0)=0$，$\varepsilon_2(0, 0)=0$。把(7·7)式代入(7·6)式便得定理之(b)。至于f在(a_1, a_2)的连续性可立即从（7·4）式导出，即定理之(a)成立。

对$N>2$的一般情况，证明是相似的。

设映象$g:\mathbf{R}_M\to\mathbf{R}_N$，$f:\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$，且$g$的值域$R(g)$含于$f$的定义域$D(f)$内。对于$x=(x_1,x_2,\cdots,x_M)\in D(g)$，$g(x)=(g^1(x), g^2(x), \cdots, g^N(x))$，$g$的分量$g^i$是$\mathbf{R}_M\to\mathbf{R}_1$的函数。

如下定义的函数$H(x)$称为f与g的复合函数：

$$H(x)=f[g^1(x),g^2(x),\cdots,g^N(x)],\quad x\in D(g).\quad (7\cdot 9)$$

求复合函数偏导数的链法则是定理4.9的推广。

定理7·3（链法则） 设g^i对固定的j，$1\leqslant j\leqslant M$ 在$b=(b_1,b_2,\cdots,b_M)$点$g^i_{,j}$存在，$i=1,2,\cdots N$。f及其偏导数$f_{,i}$，$i=1,2,\cdots,N$，在点$a=(g^1_{(b)},\ g^2_{(b)},\ \cdots,\ g^N_{(b)})$ 处连续。那么（7·9）式给出的函数H于b点关于x_j可微并且

$$H_{,j}(b)=\sum_{i=1}^{N}f_{,i}[g^1_{(b)},g^2_{(b)},\cdots,g^N_{(b)}]g^i_{,j}(b).$$

证明 如下定义$\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$的函数：

$$\varphi(x_j)=H(b_1,\cdots b_{j-1},x_j,b_{j+1},\cdots,b_M)$$

$$\psi^i(x_j)=g^i(b_1\cdots,b_{j-1},x_j,b_{j+1},\cdots,b_M),$$

$$i=1,2,\cdots,N.$$

那么据（7·9）式有

$$\varphi(x_j)=f[\psi^1(x_j),\ \psi^2(x_j),\ \cdots,\ \psi^N(x_j)].$$

以h表示一实数，定义

$$\Delta\varphi=\varphi(b_j+h)-\varphi(b_j)$$

$$\Delta\psi^i=\psi^i(b_j+h)-\psi^i(b_j),\quad i=1,2,\cdots,N.$$

因为每一ψ^i在b_j连续，因而当$h\to 0$时，$\Delta\psi^i\to 0$，对φ应

用定理7·2的（7·4）式，且以$\Delta\psi^i$代替（7·4）式中h_i，得出

$$\Delta\psi=\sum_{i=1}^{N}\{f,_i[\psi^1(b),\cdots,\psi^N(b)]+\varepsilon_i\}\Delta\psi^i. \quad (7\cdot10)$$

(7·10)式中，$\varepsilon_i=\varepsilon_i(\Delta\psi^1,\cdots,\Delta\psi^N)$，且当$\Delta\psi^K\to0$时，$\varepsilon_i\to0$，$K=1, 2, \cdots, N$。

对充分小的$|h|$，把（7·10）式写成

$$\frac{\Delta\varphi}{h}=\sum_{i=1}^{N}\{f,_i[g'(b),\cdots,g^N(b)]+\varepsilon_i\}\frac{\Delta\psi^i}{h},$$

并令$h\to0$取极限便得链法则。

定义 设$D\subset R_N$，$f:D\to R_1$，对$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$和实数k，用kx表示$(kx_1,kx_2,\cdots,kx_N)$。称f是n次齐次函数$\Longleftrightarrow$(i) $x\in D$，有$kx\in D$，$k\neq0$；(ii) $f(kx)=k^nf(x)$。

函数f是正n次齐次的$\Longleftrightarrow$(i)，(ii)只对$k>0$，$x\in D$成立。

注 定义中之n不必是整数.例如$f:(x,y)\to x^{-\frac{1}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}$是$-\frac{1}{3}$次齐次函数.一个函数可能是正齐次而不是齐次的,例如$f:(x,y)\to\sqrt{x^2+y^2}$是1次正齐次但非齐次.

定理7·4（欧拉定理） 设$f:R_N\to R_1$是n次正齐次函数且$f,_1$，$\cdots$，$f,_N$在$a\neq0$点连续。那么

$$\sum_{i=1}^{N}a_if,_i(a)=nf(a). \quad (7\cdot11)$$

证明留给读者。

习 题

1. 设D是R_N内的连通开集。$f: D\to R_1$具有性质：$f_{,1}=f_{,2}=\cdots=f_{,N}=0$，$x\in D$。证明$f$在$D$内恒等于常数。
2. 设$f: R_N\to R_1$，$g^1, g^2, \cdots, g^N$是N个$R_M\to R_1$的函数，$h^1, h^2, \cdots, h^M$是M个从$R_p\to R_1$的函数。若定义$H(x)=f\{g^1[h^1(x),\ \cdots,\ h^M(x)],\ g^2[h^1(x),\ \cdots,\ h^M(x)],\ \cdots,\ g^N[h'(x),\ \cdots,\ h^M(x)]\}$，给出$H_{,i}(x)$的链法则的公式。
3. 对$N=3$写出定理7·2。

*4. 设$f: R_2\to R_1$，其定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,\ 0),\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$$

(a) 证明f在$x=0$，$y=0$点不连续。

(b) 证明$f_{,1}$，$f_{,2}$在$x=y=0$存在。

(c) 试问(a)，(b)是否与定理7·2相矛盾？

5. 设$f: R_N\to R_1$是0次齐次函数，通过直接计算验证f满足欧拉微分方程：$\sum_{i=1}^{N}x_i f_{,i}=0$。
6. 证明定理7·4。

§7·2 高阶偏导数和台劳定理

定义 设f是从R_N到R_1的函数。我们定义f的二阶偏导数$f_{,i;j}$是一阶偏导数$f_{,i}$对x_j的偏导数。三阶偏导数$f_{,i;j;K}$是$f_{,i;j}$对x_K的偏导数，四阶、五阶等更高阶偏导数同样归纳地定义。

自然地提出$i\neq j$时，$f_{,i;j}$与$f_{,j;i}$是否相等，即求导次序是否影响结果的问题。可以举出简单的例子说明求导次序不同结果不同（习题3）。下面定理给出可交换求导次序的充分条件。

定理7·5 设$f:R_N\to R_1$，f，$f_{,i}$，$f_{,i;j}$，$f_{,j;i}$在点a处都是连续的，那么

$$f_{,i;j}(a)=f_{,j;i}(a).$$

证明 对$N=2$，$i=1$，$j=2$证明定理。一般情况的证明完全类似。

记$a=(a_1, a_2)$，定义

$$\Delta_2 f=f(a_1+h, a_2+h)-f(a_1+h, a_2)$$

$$-f(a_1, a_2+h)+f(a_1, a_2). \qquad (7\cdot12)$$

我们将证明当$h\to0$，$\frac{\Delta_2 f}{h^2}$既以$f_{,1;2}(a_1, a_2)$，又以$f_{,2;1}(a_1, a_2)$为极限。由此得出$f_{,1;2}(a_1,a_2)=f_{,2;1}(a_1,$

a_2)。定义

$$\varphi(s)=f(a_1+s,a_2+h)-f(a_1+s,a_2), \qquad (7\cdot13)$$

$$\psi(t)=f(a_1+h,a_2+t)-f(a_1,a_2+t). \qquad (7\cdot14)$$

那么

$$\Delta_2 f=\varphi(h)-\varphi(0), \text{同时} \Delta_2 f=\psi(h)-\psi(0). \quad (7\cdot15)$$

对（7·15）右端应用微分中值定理便得

$\Delta_2 f=\varphi'(s_1)h$，$\Delta_2 f=\psi'(t_1)h$，（$s_1, t_1$都介于0与$h$间）． (7·16)

由（7·13），（7·14）导出

$$\varphi'(s_1)=f_{,1}(a_1+s_1,a_2+h)-f_{,1}(a_1+s_1,a_2), \quad (7\cdot17)$$

$$\psi'(t_1)=f_{,2}(a_1+h,a_2+t_1)-f_{,2}(a_1,a_2+t_1). \quad (7\cdot18)$$

对（7·17），（7·18）式右端应用微分中值定理得

$$\varphi'(s_1)=f_{,1;2}(a_1+s_1,\ a_2+t_2)h,$$

$\psi'(t_1)=f_{,2;1}(a_1+s_2,a_2+t_1)h$，$s_2, t_2$都介于0，$h$间。把上述等式代入（7·16）得到

$$\frac{1}{h^2}\Delta_2 f=f_{,1;2}(a_1+s_1,\ a_2+t_2)$$

$$=f_{,2;1}(a_1+s_2,\ a_2+t_1),$$

令$h\to0$注意到s_1，s_2，t_1及t_2都随h趋向于零，由$f_{,1;2}$及$f_{,2,1}$于a点连续便有

$$f_{,1;2}(a_1, a_2)=f_{,2;1}(a_1, a_2).$$

定义 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_N)\in R_N$，$\alpha_i$是非负整数，($i=1,2,\cdots N$) 称$\alpha$为多重指数。定义$\alpha$的次数$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N$。推广阶乘符号于多重指数$\alpha!=\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_N!$。若$\beta=(\beta_1, \beta_2,\cdots,\beta_N)$是另一多重指数，定义$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \cdots, \alpha_N+\beta_N)$。$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)\in R_N$，$x$的$\alpha$幂定义为$x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_N^{\alpha_N}$。

显然定义中x^α的次数为$|\alpha|$。R_N上n次多项式指形如

$$f(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant n} c_\alpha x^\alpha \tag{7·19}$$

的函数，α是多重指数，c_α是常数。

例1 设$f(x_1,x_2)=x_1^3+3x_1x_2^2-3x_1^2-3x_2^2+4$，把$f$写成(7·19)形式。

解 令$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$，因多项式是3次的，所以$|\alpha|\leqslant 3$，那么

$$f(x_1,x_2)=\sum_{|\alpha|\leqslant 3} c_{\alpha_1\alpha_2}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2},$$

其中 $c_{30}=1$, $c_{12}=3$, $c_{21}=c_{03}=0$, $c_{20}=-3$,

$c_{11}=0$, $c_{02}=-3$, $c_{10}=c_{01}=0$, $c_{00}=4$.

引理7·1（二项式定理） 设x, $y\in R_1$，n是自然数，那么

$$(x+y)^n=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x^{n-j}y^j.$$

引理容易由归纳法证明，把它留给读者。

多项式定理是二项式定理的推广，它将应用于函数的泰劳展开。

引理7·2（多项式定理） 设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)\in R_N$，$n$是自然数，那么

$$\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\right)^n=\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha!}x^\alpha=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_N=n}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_N!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_N^{\alpha_N}. \tag{7·20}$$

证明 对固定的整数n，对N用归纳法证明（7·20）式．当$N=1$，（7·20）成为

$$x_1^n=\sum_{|\alpha|=n}\frac{n!}{\alpha_1!}x_1^n=x_1^n,$$

显然为真。假定(7·20)对$N=K$成立，我们证明$N=K+1$成立。为此，先由二项式定理导出

$$(x_1+x_2+\cdots+x_{K+1})^n=[(x_1+\cdots+x_K)+x_{K+1}]^n$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}x_{K+1}^j(x_1+\cdots+x_K)^{n-j}. \tag{7·21}$$

从归纳假设，(7·21)右端成为

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_K=n-j}\frac{n!}{j!(n-j)!}\frac{(n-j)!}{\alpha_1!\cdots\alpha_K!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_K^{\alpha_K}x_{K+1}^j \tag{7·22}$$

令$\alpha_{K+1}=j$且约去$(n-j)!$，(7·22)成为

$$\sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{K+1}=n}\frac{n!}{\alpha_1!\cdots\alpha_K!\alpha_{K+1}!}x_1^{\alpha_1}\cdots x_K^{\alpha_K}x_{K+1}^{\alpha_{K+1}}$$

即(7·20)对$N=K+1$成立。按归纳法原理，定理获证。

设$\mathscr{G}$是R_N内的开集，且设$f:\mathscr{G}\to\mathrm{R}_1$的二阶偏导数在$\mathscr{G}$内连续，我们知道$f,_{i,j}=f,_{j,i}$对所有$i$，$j$成立。表示$f,_{i,j}=D_i[D_jf]=D_j\circ D_i(f)$。把$D_i$，$D_j$视为映象，$D_j\circ D_i$表$D_i$与$D_j$的复合映象。同样若$f$有三阶或更高阶的导数，那么

$$D_i\circ D_j\circ D_K(f)=D_i\{D_j[D_K(f)]\}$$

$$D_i\circ D_j\circ D_K\circ D_l(f)=D_i(D_j\{D_K[D_l(f)]\}).$$

等。当微分次序可以交换时，省略"∘"符号。微分映象的线性组合称为微分算子，如a,b,c,d是常数时，$aD_1D_2D_3+bD_2D_1D_1+cD_1D_3+dD_2$便是一个微分算子。微分算子可作用到$\mathrm{R}_N$内开集上具有所要求阶数的连续导数的函数上。对于$\mathrm{R}_N$内的形如

$$P(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_N)=\sum_{|\alpha|\leq n}C_\alpha\xi^\alpha \qquad (7\cdot23)$$

的多项式，我们对应一微分算子：

$$P(D_1,D_2,\cdots,D_N)=\sum_{|\alpha|\leq n}C_\alpha D^\alpha, \qquad (7\cdot24)$$

其中α是多重指数$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_N)$，那么$D^\alpha$是算子$D^\alpha=$

$D_1^{\alpha_1}D_2^{\alpha_2}\cdots D_N^{\alpha_N}$。$D^{\alpha}f$表示$f$先对$x_N$求$\alpha_N$次导数再对$x_{N-1}$求$\alpha_{N-1}$次导数，一直计算到$x_1$的$\alpha_1$次导数。微分算子(7·24)的阶数与多项式次数一致。多项式（7·23）称为算子(7·24)的伴随多项式。

例2 设f：$R_2 \to R_1$，$f(x_1,x_2)=x_1e^{x_1}\cos x_2$。设多项式$p(\xi_1,\xi_2)=\xi_1^4+2\xi_1^2\xi_2^2+\xi_2^4$，证明$p(D_1,D_2)f=0$。

解 $D_1(f)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=(x_1+1)e^{x_1}\cos x_2$；

$$D_1^2(f)=D_1[D_1(f)]=(x_1+2)e^{x_1}\cos x_2;$$

$D_1^3(f)=(x_1+3)e^{x_1}\cos x_2$； $D_1^4(f)=(x_1+4)e^{x_1}\cos x_2$；

$D_2(f)=-x_1e^{x_1}\sin x_2$； $D_2^2(f)=-x_1e^{x_1}\cos x_2$；

$D_1^2D_2^2(f)=-(x_1+2)e^{x_1}\cos x_2$； $D_2^4(f)=x_1e^{x_1}\cos x_2$。

于是

$$p(D_1,D_2)f=D_1^4(f)+2D_1^2D_2^2(f)+D_2^4(f)=0.$$

为了应用微分算子于台劳定理及讨论极值问题，引进关于微分算子代数运算的一些定义与简单性质。

定义 设$L_1,L_2,\cdots,L_K$是微分算子，C_1，$C_2,\cdots,C_K$是实数。$C_1L_1+C_2L_2+\cdots+C_nL_n$表示算子$L$，其定义为$L(f)=C_1L_1(f)+C_2L_2(f)+\cdots+C_KL_K(f)$，$f$属于诸$L_i$定义域的交集。$L_1L_2$定义为$L_1L_2(f)=L_1[L_2(f)]$，$L_1L_2$的定义域是使$L_2(f)$属于$L_1$的定义域内的$L_2$定义域中那些$f$组成。同样可定义$L_1L_2L_3$，$L_1L_2L_3L_4$等。

引理7·3 设L_1，L_2，…，L_K是微分算子，C_1，C_2，…，C_K是实数。设$p_i(\xi)$是L_i的伴随多项式，$i=1,2,\cdots,K$。那么

（i）$\sum_{i=1}^{K}C_iL_i$的伴随多项式是$\sum_{i=1}^{K}C_ip_i(\xi)$

（ii）$L_1L_2\cdots L_K$的伴随多项式

$$p(\xi)=p_1(\xi)p_2(\xi)\cdots p_K(\xi).$$

证明 （i）设n是诸L_i的次数之最大者。可以把L_i写为（允许$b_{i\alpha}$等于零）

$$L_i=\sum_{|\alpha|\leqslant n}b_{i\alpha}D^\alpha,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ K.$$

于是

$$L=\sum_{i=1}^{K}C_iL_i=\sum_{i=1}^{K}C_i\sum_{|\alpha|\leqslant n}b_{i\alpha}D^\alpha,$$

且与L相伴随的多项式是

$$\sum_{i=1}^{K}C_i\sum_{|\alpha|\leqslant n}b_{i\alpha}\xi^\alpha=\sum_{i=1}^{K}C_ip_i(\xi).$$

就$K=2$证明(ii)，一般结果借助归纳法导出。设

$$L_1=\sum_{|\alpha|\leqslant m}C_\alpha D^\alpha,\ L_2=\sum_{|\beta|\leqslant n}d_\beta D^\beta,\ L^1=L_1L_2.$$

那么

$$L^1(f)=\sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha D^\alpha \cdot \sum_{|\beta|\leq n} d_\beta D^\beta(f)=\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq n} C_\alpha d_\beta D^\alpha D^\beta f$$

$$P^1(\xi)=\sum_{|\alpha|\leq m}\sum_{|\beta|\leq n} C_\alpha d_\beta \xi^\alpha \xi^\beta = P_1(\xi)P_2(\xi).$$

定义 设$f:\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$是给定的函数，$a\in\mathbf{R}_N$，$b\in\mathbf{R}_N$且$|b|=1$。$f$沿方向$b$在$a$点的方向导数，表示为$d_bf(a)$其定义为

$$d_bf(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tb)-f(a)}{t}. \qquad (7\cdot 25)$$

注意(7·25)右端分子是f在$\mathbf{R}_N$内联结a与$a+b$的线段上点$a+tb$的值与在a点的值的差（图7·2）。$d_bf(a)$是$\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$的

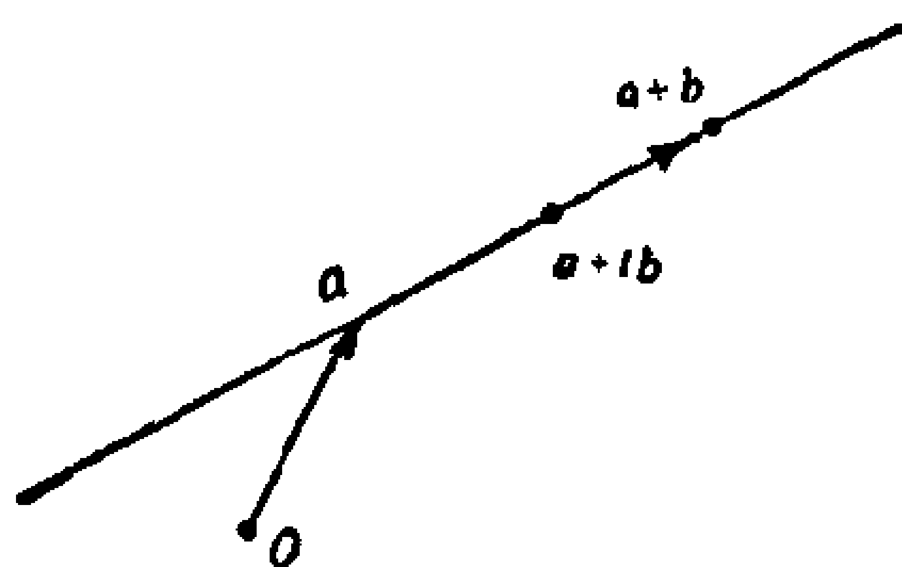


图 7·2

函数，$d_bf(a)$沿b在a点的方向导数$d_b[d_bf](a)$叫f沿b在a点的二阶方向导数记为$(d_b)^2f(a)$。同样可定义$(d_b)^nf(a)$。

引理7·4 设$f:\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$及其所有直到$n$阶偏导数在球$B(a, r)$内都连续，那么

$$(d_b)^n f(a) = \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} b^\alpha D^\alpha f(a) \qquad (7\cdot26)$$

n阶方向导数可符号地记成算子

$$(d_b)^n = \sum_{|\alpha| = n} \frac{n!}{\alpha!} b^\alpha D^\alpha.$$

证明　当$n=1$，令$\varphi(t)=f(a+tb)$那么$d_b f(a)=\varphi'(0)$。应用链法则求$\varphi'(t)$，记$b=(b_1, b_2, \cdots, b_N)$，便得

$$d_b f(a) = b_1 D_1 f(a) + \cdots + b_N D_N f(a),$$

即$d_b = b_1 D_1 + \cdots + b_N D_N$。对$n$用归纳法可得

$$(d_b)^n f = (b_1 D_1 + \cdots + b_N D_N)^n f,$$

再由多项式定理（引理7·2），便得（7·26）式。

定理7·6（单变量函数台劳定理）　设$f: \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1$在区间$I=\{x: |x-a|<r\}$上具有直到$n+1$阶的各阶导数。那么对每个$x \in I$，于$a$，$x$为端点的开区间内存在$\xi$，使

$$f(x) = \sum_{K=0}^{n} \frac{1}{K!} f^{(K)}_{(a)} (x-a)^K$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1} \qquad (7\cdot27)$$

证明　为了写起来简便，设$x>a$。对于开区间中固定

的x，定义 $R_n=f(x)-\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{K!}f^{(K)}_{(a)}(x-a)^K$。我们来证明 R_n 满足（7·27）式。为此于$[a, x]$上构造函数 φ：

$$\varphi(t)=f(x)-\sum_{=0}^{n}\frac{f^{(j)}(t)}{j!}(x-t)^j-R_n\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-a)^{n+1}},$$

$$t\in[a, x]。$$

容易根据R_n的定义算得 $\varphi(a)=\varphi(x)=0$。对 $\varphi(t)$ 应用罗尔定理（定理4·11），$\exists\xi$，$a<\xi<x$，使 $\varphi'(\xi)=0$。我们计算 $\varphi'(t)$：

$$\varphi'(t)=-f'(t)+\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1}$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{f^{(j+1)}(t)}{j!}(x-t)^j$$

$$+(n+1)R_n\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}。$$

将上式右端第二个和式之j换成$j-1$，可得

$$\varphi'(t)=-f'(t)+f'(t)+\sum_{j=2}^{n}\frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1}$$

$$-\sum_{j=2}^{n}\frac{f^{(j)}(t)}{(j-1)!}(x-t)^{j-1}-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$+(n+1)R_n\frac{(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}$$

$$=-\frac{(n+1)(x-t)^n}{(x-a)^{n+1}}\left[\frac{f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right.$$

$$\left.-R_n\right].$$

于$\varphi'(t)$中代$t=\xi$，并由$\varphi'(\xi)=0$便得

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

于是得到

$$f(x)=\sum_{K=0}^{n}\frac{1}{K!}f^{(K)}(a)(x-a)^K$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1},\xi\text{介于}a,x\text{间。}$$

注 (i)定理中使用了$f^{(0)}(x)=f(x)$的约定.

(ii)在$n=0$时，(7·27)式就是中值定理. (7·27)式中n次多项式 $\sum_{K=0}^{n}\frac{f^{(K)}(a)}{K!}(x-a)^K$称为$f(x)$在$a$点的台劳多项式，用台劳多项式来逼近$f(x)$，误差$\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$叫作余项.

现在基于定理7·6来证明$\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$函数的台劳定理，后者又是前者的推广。

定理7·7（带余项的台劳定理） 设$f:\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$连同它的直到$n+1$阶偏导数在球$B(a, r)$内连续，那么对每一$x\in$

$B(a, r)$，在联结a，x的线段内存在点ξ使

$$f(x)=\sum_{|\alpha|<n}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)(x-a)^{\alpha}$$

$$+\sum_{|\alpha|=n+1}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(\xi)(x-a)^{\alpha} \qquad (7\cdot28)$$

证明 若$x=a$结果显然。若$x\neq a$，定义$b=(b_1,b_2,\cdots,b_N)$其中$b_i=\dfrac{x_i-a_i}{|x-a|}$。注意到$|b|=1$，并定义$\varphi(t)=f(a+tb)$。这样，我们有$\varphi(0)=f(a)$，以及$\varphi(|x-a|)=f(a+|x-a|b)=f(x)$。由链法则及归纳法可知$\varphi$具有直到$n+1$阶连续的导数。现在应用定理7·6于$\varphi$。那么

$$\varphi(t)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)t^{j}+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\tau)t^{n+1} \qquad (7\cdot29)$$

其中τ介于0，t之间。据引理7·4，很明显

$$\varphi^{(j)}(t)=(d_b)^{j}f(a+tb)$$

$$=\sum_{|\alpha|=j}\frac{j!}{\alpha!}b^{\alpha}D^{\alpha}f(a+tb). \qquad (7\cdot30)$$

于(7·29)式中置$t=|x-a|$，得出

$$\varphi(|x-a|)=f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\varphi^{(j)}(0)|x-a|^{j}$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\tau)|x-a|^{n+1}.$$

将（7·30）代入上式，便有

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!}\Big[\sum_{|\alpha|=j}\frac{j!}{\alpha!}b^{\alpha}D^{\alpha}f(a)|x-a|^{j}\Big]$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\Big[\sum_{|\alpha|=n+1}\frac{(n+1)!}{\alpha!}b^{\alpha}D^{\alpha}f(\xi)|x-a|^{n+1}\Big].$$

按定义$|x-a|b_i=x_i-a_i$，因而$(x-a)^{\alpha}=b^{\alpha}|x-a|^{|\alpha|}$代入上面$f(x)$展开式，便得（7·28）。

单变量可微函数极值点的必要条件是满足$f'(x)=0$。当$x=a$，$f'(a)=0$成立，用$f''(a)$的正负能够判别a是$f(x)$的极值点。详细地说：若在a点$f'(a)=0$，$f''(a)<0$，a是f的极大值点；若$f'(a)=0$，$f''(a)>0$，a是f的极小值点。借助于台劳定理能够建立多变量函数的相应的结果。

定义 设$f:R_N\to R_1$是给定的。称函数f在a点有局部极大（小）值$\Longleftrightarrow\exists$球$B(a,r)$，使$x\in B(a,r)$有 $f(x)-f(a)\leqslant 0$ （$\geqslant 0$）。称函数f在a点有严格局部极大（小）值$\Longleftrightarrow\exists$球$B(a,r)$，使$x\in B(a,r)$，$x\neq a$有$f(x)-f(a)<0$（$>0$）。$a$点称为极大（小）值点。笼统地称为极值点。

若$f\ \exists$偏导数，称a点为临界点$\Longleftrightarrow D_if(a)=0$，$i=1$，…，$N$。

容易由定义导出，在f可微条件下，极值点是临界点。但临界点不必是极值点。

定理7·8（二阶导数判别法） 设$f: R_N \to R_1$及其直到二阶的偏导数在球$B(a, r)$内连续，a点是f的临界点。对$h=(h_1, h_2, \cdots, h_N)$，定义$\Delta f(a, h)=f(a+h)-f(a)$；并且定义

$$Q(h)=\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)h^{\alpha}=\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{N}D_iD_jf(a)h_ih_j \tag{7·31}$$

(a)若对$\forall h\neq 0$，$Q(h)>0$（即(7·31)是正定二次型），那么f在a点有严格局部极小值。

(b)若对$\forall h\neq 0$，$Q(h)<0$（即(7·31)是负定二次型），那么f在a点有严格局部极大值。

(c)若$Q(h)$有正的最大值及负的最小值，那么$\Delta f(a,h)$在球$B(a,\rho)$内变号，这里$0<\rho<r$。

证明 我们仅证明(a)，(b)及(c)可类似证明。

于台劳定理（定理7·7）中，取$n=1$，$x=a+h$，得

$$f(a+h)=f(a)+\sum_{|\alpha|=1}D^{\alpha}f(a)h^{\alpha}+\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(\xi)h^{\alpha}, \tag{7·32}$$

其中ξ位于联结a，$a+h$的线段上。由a是f的临界点。那么(7·32)式可写成

$$\Delta f(a,h)=\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}D^{\alpha}f(a)h^{\alpha}$$

$$+\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}[D^\alpha f(\xi)-D^\alpha f(a)]h^\alpha. \qquad (7\cdot33)$$

令

$$\varepsilon(h)=\sum_{|\alpha|=2}\frac{1}{\alpha!}[D^\alpha f(\xi)-D^\alpha f(a)]\frac{h^\alpha}{(|h|)^2},$$

(7·33) 式可写成

$$\Delta f(a,\ h)=Q(h)+(|h|)^2\varepsilon(h) \qquad (7\cdot34)$$

由f的二阶偏导数在a点邻域内连续，所以当$h\to0$时$\varepsilon(h)\to0$

同时

$$Q(h)=(|h|)^2\sum_{i,\ j=1}^{N}D_iD_jf(a)\frac{h_i}{|h|}\cdot\frac{h_j}{|h|}$$

$$=(|h|)^2Q_1(h),$$

之中的 $Q_1(h)$对h在R_N的单位闭球上连续。据(a)的假设条件，$Q_1(h)$在单位闭球上的最小值$m>0$，即对一切h

$$Q(h)\geqslant m(|h|)^2.$$

现取$|h|$使$|\varepsilon(h)|<\frac{m}{2}$. 将$Q(h)\geqslant m(|h|)^2$及$|\varepsilon(h)|<\frac{m}{2}$代入 (7·34) 式，得

$$\Delta f(a,\ h)>\frac{1}{2}(|h|)^2m$$

对充分小的$|h|$，$h\neq 0$成立。于是断定f在a点有严格局部极小值。

注 由（7·31）式给出的Q是个二次型.在线性代数中，我们知道：Q为正（负）定的$\Longleftrightarrow$矩阵$(D_iD_jf(a))$的所有特征值都是正（负）的．当矩阵$(D_iD_jf(a))$的特征值有正也有负时，Q的最大值为正，最小值为负.通常为了确定Q的正（负）定或不定的性质，不必求出矩阵的所有特征值，而是化二次型为平方和便能确定Q的性质.因此实际应用定理7·8时，要把二次型化为平方之代数和.

习　题

1. 设$f:\mathrm{R}_3\to\mathrm{R}_1$为$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{-1}{2}}$，$(x_1,x_2,x_3)\neq(0,0,0)$，证明$f$满足方程$f_{,1;1}+f_{,2;2}+f_{,3;3}=0$。
2. 设$f:\mathrm{R}_2\to\mathrm{R}_1$为$f(x_1,x_2)=x_1^4-2x_1^3x_2-x_1x_2$，$L_1(D)=2D_1-3D_2$，$L_2(D)=D_1D_2$。证明$(L_1L_2)(f)=(L_2L_1)(f)$。
3. 设$f:\mathrm{R}_2\to\mathrm{R}_1$，

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1x_2\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}, & x_1^2+x_2^2>0\\ 0 & x_1=x_2=0。\end{cases}$$

证明　$f_{,1;2}(0,0)=-1$，$f_{,2;1}(0,0)=1$。

4. 写出定理7·5一般情况的证明。
5. 证明二项式定理（引理7·1）。
6. 对函数$f:\mathrm{R}_2\to\mathrm{R}_1$及$n=2$写出$f$的台劳展开式。
7. 求函数$f(x_1,x_2)=x_1^3+3x_1x_2^2-3x_1^2-3x_2^2+4$的局部

极值。

8. 求函数f：$R_4 \to R_1$的临界点。

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_1x_4 - 2x_2x_4 + 4x_1 - 5x_2 + 7.$$

9. 给出定理7·8中(b)与(c)的证明。

习题10—12确定二次型Q：$R_3 \to R_1$是正定、负定或是不定的性质。

10. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_3$.

11. $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

12. $Q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3$.

§7·3 多变量函数的微分

函数f：$R_N \to R_1$的偏导数，作为单变量函数导数的推广，它有许多应用。然而使人不满意的是：它是从$x \to a$的各种方式中选取特殊方向上进行微分的。现在把单变量导数作为差商与$x \to a$的方式无关的极限推广到多变量函数。

设A是R_N的开集，f与g都是从A到R_1内的函数。以$d(x, y)$或$|x-y|$表示R_N中x，y间的欧几里得距离。

定义 称函数f与g在$a \in A$点相切$\Longleftrightarrow$(i)$f(a) = g(a)$且

(ii) $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{|f(x) - g(x)|}{d(x, a)} = 0.$$

由定义，易知若h与g也在a点相切，那么f与h在a点相

切。事实上，这由

$$\frac{|f(x)-h(x)|}{d(x,\ a)}\leqslant\frac{|f(x)-g(x)|}{d(x,\ a)}+\frac{|g(x)-h(x)|}{d(x,\ a)}$$

在$x\to a$时，右端两项趋向于零便知。

设$L:\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$是线性函数：

$$L(x)=b_0+\sum_{K=1}^{N}b_Kx_K,$$

其中b_0，b_1，b_2，…，b_N是常数。当函数f在a点与一线性函数相切，这线性函数是唯一的。

定理7·9 设L_1，L_2都是与函数f在a点相切的线性函数，那么$L_1\equiv L_2$。

证明 为了方便，把L_1，L_2写成

$$L_1(x)=C_0+\sum_{K=1}^{N}C_K(x_K-a_K),$$

$$L_2(x)=C_0'+\sum_{K=1}^{N}C_K'(x_K-a_K).$$

首先由相切条件(i)$L_1(a)=L_2(a)=f(a)\Longrightarrow C_0=C_0'$。此外，再由相切条件(ii)，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$x$满足$0<d(x,a)<\delta$，便有

$$|L_1(x)-L_2(x)|\leqslant\varepsilon d(x,\ a)=\varepsilon\cdot|x-a|. \qquad (7\cdot35)$$

即 $|L_1(x)-L_2(x)|=\left|\sum_{K=1}^{N}(C_K-C_K')(x_K-a_K)\right|$

$$\leqslant\varepsilon|x-a|。$$

除以$|x-a|$得

$$\left|\sum_{K=1}^{N}(C_K-C_K')\frac{x_K-a_K}{|x-a|}\right|\leqslant\varepsilon。$$

由此可以断定$C_1=C_1'$，$C_2=C_2'$，$\cdots C_N=C_N'$。事实上，取x满足$0<|x-a|<\delta$，且满足$x_1\neq a_1$，$x_2=a_2,\cdots x_N=a_N$，

那么 $\left|\sum_{K=1}^{N}(C_K-C_K')\frac{x_K-a_K}{|x-a|}\right|=|C_1-C_1'|\leqslant\varepsilon$，由$\varepsilon$的任意性，$C_1-C_1'=0$，即$C_1=C_1'$。同理$C_2=C_2'$，…，$C_N=C_N'$。

定义 设f：$A\to R_1$，A是R_N的开集，$a\in A$。称f在a点可微$\Longleftrightarrow\exists$线性函数$L$与$f$在$a$点相切。

定理7·10 若f在a点可微，那么f在a点连续。

定理7·10的证明留作习题。

如在§7·1中所见，函数f具有偏导数可以不连续。定理7·10、定理7·11表明函数可微性比存在偏导数要求具有更强的条件。

定理7·11 若f在a点可微，那么f在a点存在偏导数。

证明 设L是在a点与f相切的线性函数

$$L(x)=f(a)+\sum_{K=1}^{N}C_K(x_K-a_K).$$

由相切定义

$$\lim_{\substack{x\to a\\x\neq 0}}\frac{\left|f(x)-f(a)-\sum_{K=1}^{N}C_K(x_K-a_K)\right|}{d(x,\ a)}=0. \qquad (7\cdot36)$$

取$x=a+h$，$h=(0,0,\ \cdots0,\ h_i,\ 0,\ \cdots,\ 0)$，(7·36)成为

$$\lim_{\substack{h_i\to 0\\h_i\neq 0}}\frac{|f(a+h)-f(a)-C_ih_i|}{|h_i|}=0,$$

即
$$\lim_{\substack{h_i\to 0\\h_i\neq 0}}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h_i}-C_i\right|=0, \qquad (7\cdot37)$$

由(7·37)断定$f,_i(a)$存在且

$$C_i=f,_i(a),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

在补充$f,_i$连续性条件下有逆定理。

定理7·12 设$f,_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$在a点连续，那么f在a点可微。

定理7·12的证明容易由台劳定理取$n=0$得出。

定义 设$f:\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$，$a\in\mathrm{R}_N$，$f$在$a$点存在所有偏导数，称$\mathrm{R}_N$的元素$(f,_1(a),\ f,_2(a),\ \cdots,\ f,_N(a))$为$f$的梯度，表示

为∇f或$\mathrm{grad} f$。∇f也称为f的导数。

设A是R_N的子集，$f: A \to R_1$在A上可微，$h=(h_1, h_2, \cdots, h_N) \in R_N$，定义$f$的全微分$df$为$A \times R_N \to R_1$的函数

$$df(x,h)=\sum_{K=1}^{N} f_{,K}(x) h_K. \qquad (7\cdot 38)$$

用内积概念$df(x,h)$是R_N中元素∇f与h的内积，写作

$$df(x,h)=\nabla f(x)\cdot h.$$

注 等式(7·38)表明f的全微分是h的线性函数，它与相切的线性函数的差别仅在$x=a$，$h=0$时，$df(a,0)=0$，而相切的线性函数$L(a)=f(a)$。由定理7·11可知$L(a+h)=f(a)+df(a,h)$。

定理7·13 设g^1，g^2，…，g^N都是由R_M到R_1的函数，且都在点$b=(b_1, b_2, \cdots, b_M)$可微，$f: R_N \to R_1$在点$a=(g^1(b), g^2(b), \cdots\cdots g^N(b))$点可微。那么复合函数$H(x)=f[g^1(x), g^2(x), \cdots g^N(x)]$，在$b$点可微，且

$$dH(b, h)=\sum_{i=1}^{N} f_{,i}[g(b)] dg^i(b,h).$$

定理7·13的证明与定理7·3证明相似，把它留给读者。

习 题

1. 设f，g都是$R_N \to R_1$的函数，且在a点可微。证明$f+g$，αf（α是实数）在a点可微。
2. 设$f: R_3 \to R_1$，$f(x_1, x_2, x_3)=x_1 x_3 e^{x_1 x_2}+x_2 x_3 e^{x_1 x_3}+x_1 x_2 e^{x_2 x_3}$，求$\nabla f$及$df(x,h)$。
3. 设f，g都是$R_N \to R_1$的可微函数，α，β是实数，证明

$\nabla(\alpha f+\beta g)=\alpha\nabla f+\beta\nabla g$，$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$。

4. 设f：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$，$g$：$\mathrm{R}_1\to\mathrm{R}_1$，且$f$的值域含于$g$的定义域内。证明$\nabla[g(f)]=g'\nabla f$。

5. 若f：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$在$a$点可微，那么$f$在$a$点连续。

6. 若f：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$在$a$点处所有偏导数连续，证明$f$在$a$点可微（定理7·12）。

7. 设函数f：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$，$b\in\mathrm{R}_N$，$|b|=1$，$f$的偏导数在$a$点连续。证明$d_bf$在$a$点存在，且$(d_bf)(a)=\nabla f(a)\cdot b$。

8. 设A是R_N内的开集，f在A的每一点可微。把∇f的分量看作从R_N到R_1的映象在A的每一点可微。证明f的二阶偏导数在$a\in A$存在，且$D_iD_jf=D_jD_if$。

9. 证明定理7·13。

10. 设f，g是从R_N到R_M的映象，以d_N及d_M表R_N及R_M各自的欧氏距离。称f与g在a点相切$\Longleftrightarrow$ (i)$f(a)=g(a)$，且

$$\text{(ii)}\ \lim_{x\to a}\frac{d_M(f(x),g(x))}{d_N(x,a)}=0.$$

证明如果f与线性映象L：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_M$（代数中$L$称为线性变换）在$a$点相切，则$L$是唯一的。〔提示：将$L$写成$M$个线性函数，由定理7.9证明导出〕

11. 设f：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_M$，$f$的分量为$f^1$，$f^2$，…，$f^M$，利用习题10定义$f$的可微性。证明当$f$在$a$点可微，则$f^1$，$f^2$，…，$f^M$在$a$点存在偏导数。

*12. 设A是R_N的闭区域。f：$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$在含有$A$的区域上可微且$f$的最大值点$a\in\partial A$。那么在$a$点，$f$沿$\partial A$指向$A$内部的法线的方向导数$d_nf\leqslant 0$，

§7·4 单一方程的隐函数定理

在R_2中给出形如

$$F(x,\ y)=0 \tag{7·39}$$

的方程，它的解集定义了$R_1 \to R_1$的关系。如果在区间$I=\{x: x_0-h<x<x_0+h\}$上，对每个$x \in I$存在唯一的y满足$F(x,y)=0$，那么就说（7·39）定义了一个I上的隐函数。从图7·3所表示关系（7·39）的图象，可以看出在$F=0$的不包

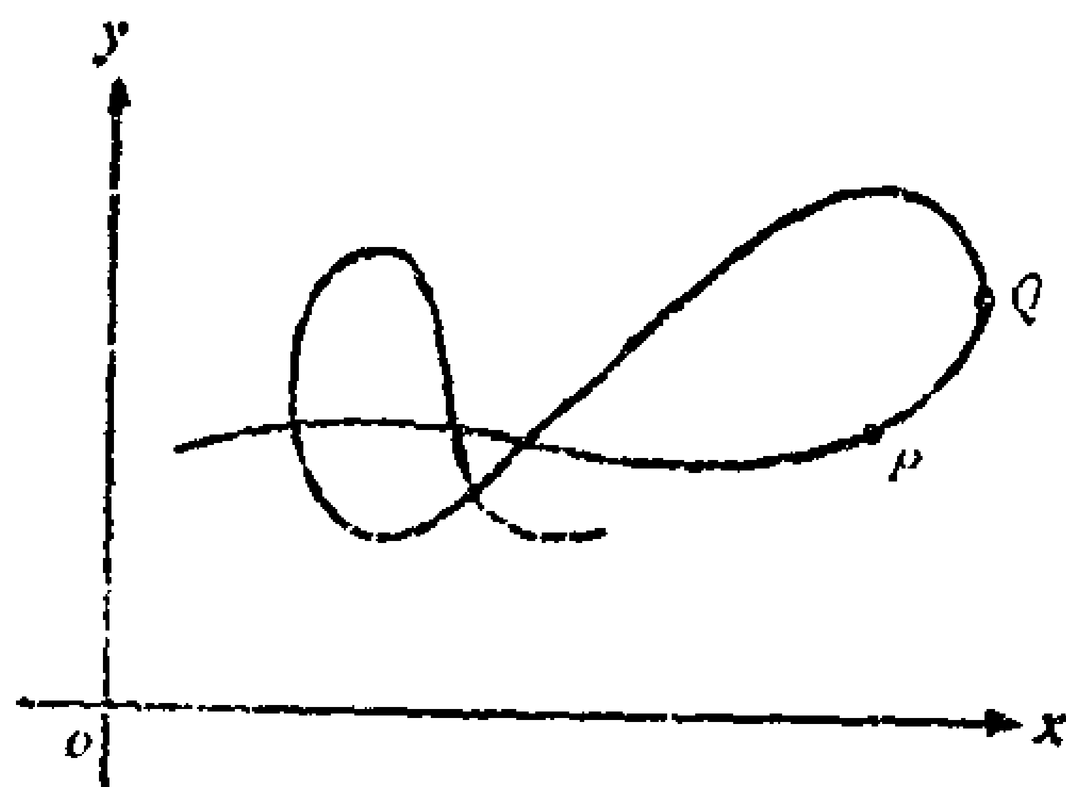


图 7·3

含Q的任一p点邻域内都定义一个函数$x \to y$；而在含有Q点的邻域内便不能确定一x的函数y。隐函数概念是局部意义的，即函数的定义域可能远小于关系（7·39）的定义域。$F(x,\ y)$应满足什么条件关系（7·39）在包含p的某邻域内确定一隐函数？

定理7·14（隐函数定理） 设F，$F_{,1}$，$F_{,2}$都在开集$A\subset R_2$上连续，$p(x_0, y_0)\in A$并且$F(x_0, y_0)=0$，$F_{,2}(x_0, y_0)\neq 0$。那么

（a）$\exists$正数h与K，矩形$R=\{(x, y): |x-x_0|<h, |y-y_0|<K\}$含于$A$内。对$\forall x\in I=\{x: |x-x_0|<h\}$，$\exists$唯一的$y$，$y\in J=\{y: |y-y_0|<K\}$满足方程$F(x,y)=0$。这些$(x,y)$点的全体构成一定义在$I$上，在$J$内取值的函数$f$。

（b）函数f及f'在I内连续。

证明 我们将给(a)两个证明。一个是基于连续函数的基本性质，另一个是应用不动点定理（定理6·46）。

(a)的第一个证明。不妨假定$F_{,2}(x_0, y_0)>0$，否则可用$-F$代替F进行讨论。因为$F_{,2}(x,y)$连续，那么$\exists$方形$S\{(x,y)\}: |x-x_0|\leqslant K, |y-y_0|\leqslant K\}$，$K$是某个（充分小）正数，$F_{,2}$在$S$上为正。对于每个满足$|x-x_0|<K$的$x$，$F(x, y)$作为$y$的函数是递增的。由$F(x_0,y_0)=0$显然有

$$F(x_0,y_0+K)>0,\quad F(x_0,y_0-K)<0.$$

又F在S上连续，$\exists$正数h（充分小），使在$I=\{x: |x-x_0|<h\}$上有$F(x,y_0+K)>0$及$F(x,y_0-K)<0$。固定$x\in I$，由$F(x,y)$关于y连续、单增且$F(x,y_0+K)>0$及$F(x,y_0-K)<0$，根据介值性定理（定理3·3），于y_0-K，y_0+K之间$\exists\ \overline{y}$，$(x, \overline{y})\in$矩形$R=\{(x,y): |x-x_0|<h, |y-y_0|<K\}$使$F(x, \overline{y})=0$。由$F_{,2}>0$，这样的$\overline{y}$是唯一的。$\overline{y}$与$x$相对应的函数$f$便是我们所求的函数（图7·4）。

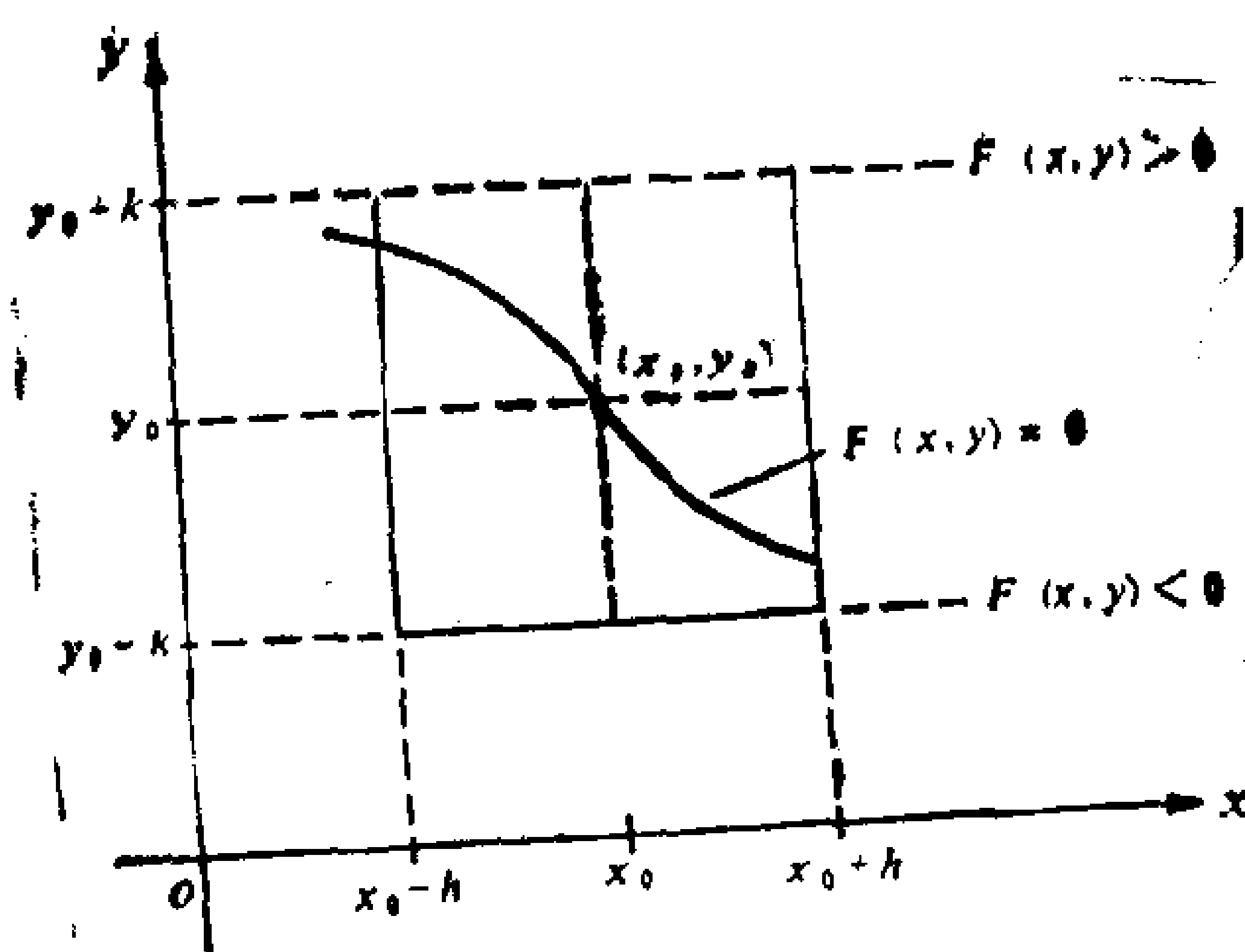


图 7·4

(b)为了证明f在x_0点连续，对$\forall\varepsilon>0$且$\varepsilon<K$.那么能以ε代替(a)证明中的K，这样的方形记作S_ε。那么$\exists\ 0<h'\leqslant h$，使f为$I'=\{x:|x-x_0|<h'\}$上的函数。因此，对$|x-x_0|<h'$的x有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即f在x_0点连续。在任意另外的点$x'\in I$，构造以$(x_1,f(x_1))$点为中心的矩形S_1，重复上述论证便得f在x_1点的连续性。

下面用微分基本引理（定理7·2）证明f'存在及连续性。设$x\in I$，选取ρ使$(x+\rho)\in I$。那么

$$F(x+\rho,\ f(x+\rho))=0,\quad F(x,\ f(x))=0.$$

记$\Delta f=f(x+\rho)-f(x)$，对$F(x,\ y)$用定理7·2，有

$$[F_{,1}(x,f)+\varepsilon_1(\rho,\Delta f)]\rho+[F_{,2}(x,f)$$

$$+\varepsilon_2(\rho,\Delta f)]\Delta f=0 \tag{7·40}$$

这里ε_1，ε_2当$\rho\to0,\Delta f\to0$时趋向于零。由（7·40）有

$$\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{f(x+\rho)-f(x)}{\rho}=-\frac{F_{,1}(xf(x))+\varepsilon_1(\rho,\Delta f)}{F_{,2}(x,f(x))+\varepsilon_2(\rho,\Delta f)}.$$

上式右端当$\rho\to 0$时，存在极限，即

$$f'(x)=-\frac{F_{,1}(x,f)}{F_{,2}(x,f)}. \qquad (7\cdot 41)$$

由定理假设，(7·41)右端连续，所以f'是连续的。

(*a*)的第二个证明。令

$$A=F_{,1}(x_0,y_0),\quad B=F_{,2}(x_0,y_0)$$

且定义 φ为：

$$\varphi(x,y)=F(x,y)-A(x-x_0)-B(y-y_0).$$

由假设$B=F_{,2}(x_0,y_0)\neq 0$，令

$$C=\frac{A}{B},\quad \psi(x,y)=\frac{1}{B}\varphi(x,y),G(x,y)=\frac{1}{B}F(x,y).$$

显然地

$$G(x,y)=(y-y_0)+C(x-x_0)+\psi(x,y).$$

由F有连续的偏导数，G，ψ同样有连续的偏导数，并由A、B的定义及$F(x_0,\ y_0)=0$可知

$$\psi(x_0,y_0)=0,\quad \psi_{,1}(x_0,y_0)=0,\quad \psi_{,2}(x_0,y_0)=0.$$

由连续性，$\exists K>0$，使当$(x,y)\in S=\{(x,y):|x-x_0|<K,\ |y-y_0|<K\}$，有

$$|\psi_{,1}(x,\ y)|\leqslant\frac{1}{2},\qquad |\psi_{,2}(x,\ y)|\leqslant\frac{1}{2}. \qquad (7\cdot42)$$

可以取K充分小，使S含于ψ的定义域内。对于$I_1=\{x: |x-x_0|<K\}$内的每个定点x，定义

$$T_x(y)=y_0-C(x-x_0)-\psi(x,y),$$

$$y\in J=\{y: |y-y_0|<K\}.$$

现在$F(x,y)=0\Longleftrightarrow G(x,y)=0\Longleftrightarrow T_x(y)=y$。换句话说对$I_1$内固定的$x$，$F(x,y)=0$的解是$y=T_x(y)$的不动点。我们来证明$\exists x_0$的邻域，在其中的$x$，$T_x$有不动点存在。设$0<h\leqslant K$且$|x-x_0|\leqslant h$，那么由（7·42）

$$|T_x(y)-y_0|\leqslant|C|h+\frac{1}{2}h+\frac{1}{2}h.$$

当选取h这样小，能使$(1+|C|)h\leqslant K$，这时

$$|T_x(y)-y_0|\leqslant K,$$

即$T_x(y)$是映象J到J内的。令$I=\{x: |x-x_0|<h\}$，对$\forall x\in I$，及$y_1, y_2\in J$，据微分中值定理（定理4·12）有

$$|T_x(y_1)-T_x(y_2)|=|-\psi(x,\ y_1)+\psi(x,y_2)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|y_1-y_2|.$$

因此，对$\forall x\in I$，T_x是J到J内的压缩映象，于是J内存在唯一的y，使$T_x(y)=y$，即对于y有$F(x,y)=0$成立。所以y是

由$F(x,y)=0$定义的x的函数。

上述定理7·14首先能推广为$\mathrm{R}_{N+1}\to\mathrm{R}_1$的关系$F(x_1,x_2,\cdots,x_N,y)=0$，来定义$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$的隐函数$y=f(x_1,x_2,\cdots x_N)$。

定理7·15 设F，$F_{,1}$，$F_{,2},\cdots,F_{,N+1}$在R_{N+1}的开集A内连续，$P(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_N^0,y^0)\in A$。记$x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，$x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots x_N^0)$并设$F(x^0,y^0)=0$，$F_{,N-1}(x^0,y^0)\neq 0$。那么

(a)存在正数h及K，确定一含于A内的R_{N+1}中的方格$R=\{(x,y):|x_i-x_i^0|h,\ i=1,2,\cdots,N,\ |y-y^0|<K\}$，使对$x\in$方格$I_N=\{x:|x_i-x_i^0|<h,\ i=1,2,\cdots,N,\}$ ∃唯一的$y\in J=\{y:|y-y^0|<K\}$，满足方程$F(x,y)=0$，即y是x的函数$y=f(x)$。f的定义域含有I_N，值域在J内。

(b)函数f及其偏导数$f_{,1}$，$f_{,2}\cdots$，$f_{,N}$在I_N上连续。

定理7·15的证明可仿照定理7·14写出，两者仅是叙述形式上有点不同，证明的细节留给读者。

第四章关于反函数的定理4·17、定理4·18可以看作定理7·14中$F(x,y)=y-f(x)=0$的特例。

推论（反函数定理） 设f是定义在R_1内的开集A上的实值函数，且设f'在A内连续，$f(x_0)=y_0$，$f'(x_0)\neq 0$。那么存在一包含y_0的区间I，在I上存在f的反函数f^{-1}，f^{-1}有连续导数且

$$[f^{-1}(y)]'=\frac{1}{f'(x)} \tag{7·43}$$

其中$y=f(x)$。

因为$f^{-1}(f(x))=x$，可用链法则得(7·43)。但是(7·43)

也可由（7·41）取$F(x,y)=y-f(x)$得出：

$$[f^{-1}(y)]'=-\frac{F_{,2}}{F_{,1}}=-\frac{1}{-f'(x)}=\frac{1}{f'(x)}.$$

例1 设关系

$$F(x,y)=y^3+2x^2y-x^4+2x+4y=0, \qquad (7\cdot44)$$

证明在R_1上定义一个的函数y.

解 因为 $F_{,2}=3y^2+2x^2+4$对$(x,y)\in R_2$都不小于4，对于任一固定的x，$F(x,y)$是y的递增函数。并由（7·44）可知当$y\to-\infty$时$F(x,y)\to-\infty$；当$y\to+\infty$时$F(x,y)\to+\infty$. F对y是连续的。因此对$\forall x$，相应地仅有一y值能使$F(x,y)=0$。根据定理7·14我们断定$\exists R_1$上的函数f，$f(x)$是R_1上的连续可微函数，满足

$$F(x,f(x))=0.$$

例2 设关系

$$F(x,y)=x^3+y^3-6xy=0, \qquad (7\cdot45)$$

分别求x值（y值）使（7·45）在x点（y点）的某邻域内定义y是x（x是y）的函数。

解 关系（7·45）的图象如图7·5所示。求得

$$F_{,1}=3x^2-6y, \qquad F_{,2}=3y^2-6x.$$

我们应当找出$F(x,y)=0$图象上使$F_{,1}$或$F_{,2}$等于零的点。容易看出$(0,0)$点处$F_{,1}=F_{,2}=0$.此外，当$F_{,2}=0$即$x=\frac{1}{2}y^2$，把它代入（7·45），求得$x=2\sqrt[3]{4}$，$y=2\sqrt[3]{2}$，在图7·5中表示为p点，此处曲线的切线平行于y轴。据定理7·14除$x=$

0，$x=2\sqrt[3]{4}$之外，对$\forall x$，在它的某邻域内y可表示为x的函数，同理，除原点及$Q=(2\sqrt[3]{2},2\sqrt[3]{4})$点之外，对$\forall y$，在它的某邻域内$x$可表示为$y$的函数。

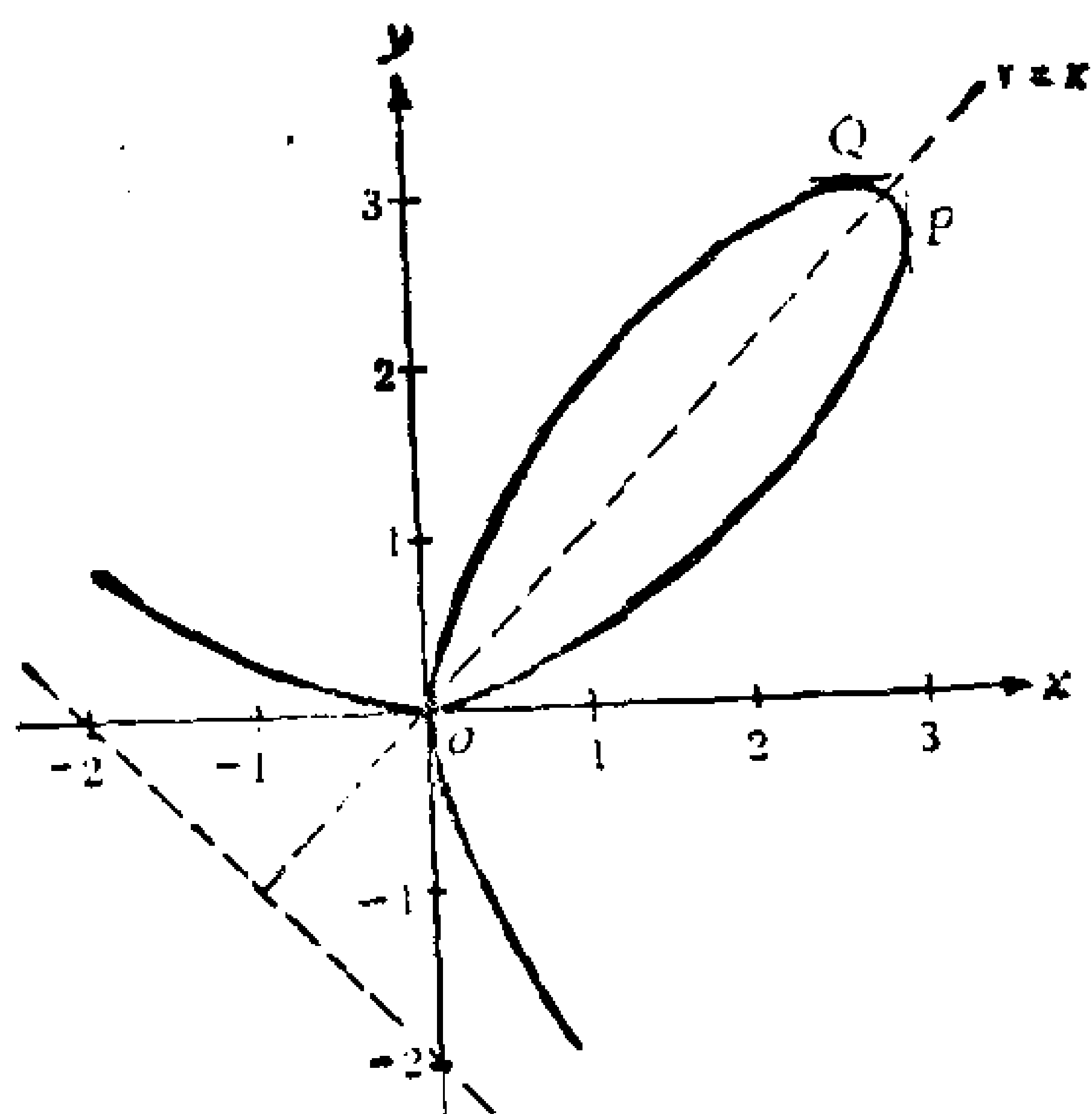


图 7·5

习　　题

习题1—4，证明关系$F(x,y)=0$在包含x_0的某区间I上y是x的函数，以f表示这一函数，求$f'(x)$。

1． $F(x,y)=y^3+y-x^2=0$；　　$(x_0,y_0)=(0,\ 0)$．

2． $F(x,\ y)=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-4=0$，$(x_0,y_0)=(1,\ 3\sqrt{3})$．

3． $F(x,\ y)=xy+2\ln x+3\ln y-1=0$，$(x_0,y_0)=(1,\ 1)$．

4． $F(x,y)=\sin x+2\cos y-\dfrac{1}{2}=0$，$(x_0,y_0)=\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$．

5． 给出一关系$F(x,y)=0$，使$F(x_0,y_0)=0$，$F_{,2}(x_0,y_0)$

$=0$但在x_0的某邻域内y是x的函数。这样的例子说明定理7·14的条件是充分非必要的。

习题6—9。证明在给定点$p(x_1^0,x_2^0,y^0)$的某邻域内关系$F(x_1,x_2,y)=0$ 定义y为(x_1, x_2)的函数。以f表示这一函数，计算$f_{,1}$及$f_{,2}$在p点的值。

6. $F(x_1,x_2,y)=x_1^3+x_2^3+y^3-3x_1x_2y-4=0$,

$p(x_1^0,x_2^0,y^0)=(1, 1, 2)$.

7. $F(x_1,x_2,y)=e^y-y^2-x_1^2-x_2^2=0$,

$p(x_1^0,x_2^0,y^0)=(1,0,0)$.

8. $F(x_1,x_2,y)=x_1+x_2-y-\cos(x_1x_2y)=0$,

$p(x_1^0,x_2^0,y^0)=(0,0,-1)$.

9. $F(x_1,x_2,y)=x_1+x_2+y-e^{x_1x_2y}=0$,

$p(x_1^0,x_2^0,y^0)=\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

10. 证明定理7·15。

11. 设F是$R_2\to R_1$的函数，记为$y=F(x_1,x_2)$。指出F满足什么条件能保证x_2是x_1，y的函数。

12. 设$F(x,y,z)=0$，按隐函数定理$z=f(x,y)$，$x=g(y,z)$，$y=h(z,x)$都存在。证明

$f_{,1}\cdot g_{,1}\cdot h_{,1}=-1$。(习惯上写作

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1)。$$

13. 举出一关系$F(x_1, x_2, y)=0$在点$p(x_1^0, x_2^0, y^0)$处有$F(x_1^0,x_2^0,y^0)=F_{,3}(x_1^0,x_2^0,y^0)=0$。而在$p$点某一邻域内$y$是$(x_1,x_2)$的函数。

14. 设$F(x,y)=0$满足隐函数定理的条件，定义了$y=f(x)$,

用F的偏导数表示f'，f''。

15. 设$F(x_1, x_2, y)=0$满足隐函数定理条件，定义了$y=f(x_1,x_2)$，用F的偏导数表示$f_{,1;1}$，$f_{1;2}$，$f_{,2;2}$。

§7·5 关于方程组的隐函数定理

把隐函数定理推广为方程组的情况。R_m中的点$x=(x_1, x_2,\cdots,x_m)$也称为矢，即称x为以$x_1,x_2,\cdots,x_m$为分量的m维矢。R_n中的矢y其分量表示为$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$。把R_{m+n}中的矢记为(x,y)。研究R_{m+n}到R_n的矢函数$F(x, y)$，F有n个分量

$$F^1(x,y),\ F^2(x,y),\ \cdots,\ F^n(x,y),$$

每一F^i是R_{m+n}到R_1的函数。

现在的问题是：由$F(x,y)=0$在什么条件下，能确定$\mathrm{R}_m\to\mathrm{R}_n$的映象$f$，使$F(x,f(x))=0$。用分量写出来是$n+m$个未知量，$n$个方程的方程组

$$F^1(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots y_n)=0$$

$$F^2(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots y_n)=0$$

$$\cdots\cdots$$

$$F^7=(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)=0$$

在$F^1,F^2,\cdots,F$ 满足什么条件下，能解出n个函数

$$y_1=f^1(x_1,x_2,x_m),\ y_2=f^2(x_1,x_2,\cdots,x_m),\ \cdots$$

$$y_n=f^1(x_1,x_2,\cdots,x_m)$$呢？

为了能与定理7·14相类比，用矢量关系来叙述。在这里$F(x,y)=0$，等号右端是R_n中的0矢。与定理7·14中$F_{,1}$，$F_{,2}$相当的是如下定义的矩阵。

定义 设G是R_{m+n}内的开集，$F:G\to R_N$具有连续的一阶偏导数（指F^i有一阶连续偏导数$F^i{}_{,j}$，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m+n$），定义$n\times m$矩阵$\nabla_x F$及$n\times n$矩阵$\nabla_y F$，分别是

$$\nabla_x F=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}F^1, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial x_m}F^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}F^n, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial x_m}F^n \end{pmatrix},$$

$$\nabla_y F=\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1}F^1, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial y_n}F^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y_1}F^n, & \cdots, & \frac{\partial}{\partial y_n}F^n \end{pmatrix}.$$

容易验证当$m=n=1$，$F(x,y)$是两个变量的函数时，$\nabla_x F$，$\nabla_y F$分别就是$F_{,1}$，$F_{,2}$。为了得到$\nabla_x F$，$\nabla_y F$的性质需要若干线代数的知识。

定义 设A是$m\times n$的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1^1, & a_2^1, & \cdots, & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^m, & a_2^m, & \cdots, & a_n^m \end{bmatrix}$$

定义A的模$|A|=\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_j^i)^2\right]^{\frac{1}{2}}$. 对于矢可看作$1\times n$的矩阵，它的模就是它的欧几里得长度.

引理7·5 设A是$m\times n$的矩阵；$\zeta=(\zeta^1, \zeta^2, \cdots\zeta^n)$是$n\times 1$的矩阵即$n$个分量的列矢，$\eta=(\eta^1, \eta^2, \cdots, \eta^m)$是$m$个分量的列矢，且满足

$$\eta = A\zeta$$

或等价地

$$\eta^i=\sum_{j=1}^{n}a_j^i\zeta^j \qquad i=1, 2, \cdots, m. \qquad (7\cdot46)$$

那么

$$|\eta|\leqslant|A||\zeta| \qquad (7\cdot47)$$

证明 固定（7·46）中的i，两端平方并对右端应用许瓦兹不等式（§6·1）得

$$(\eta^i)^2=\left(\sum_{j=1}^{n}a_j^i\zeta^j\right)^2\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(a_j^i)^2\right]\left[\sum_{j=1}^{n}(\zeta^j)^2\right].$$

把这一不等式对i求和并取平方根便是（7·47）.

引理7·6 设b是$R_1\to R_n$在区间$I=\{t: \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$上连续的矢函数，$\zeta$是一列矢，其定义为

$$\zeta=\int_\alpha^\beta b\,dt \quad 即 \quad \zeta^i=\int_\alpha^\beta b^i dt, \qquad i=1,2,\cdots,n.$$

其中b^i：$\mathrm{R}_1\to\mathrm{R}_1$是$b$的分量。那么

$$|\zeta|\leqslant\int_\alpha^\beta|b|dt.$$

证明 不妨设$|\zeta|\neq0$，令 $\lambda_i=\frac{\zeta^i}{|\zeta|}$，按$|\zeta|$定义，便有

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\zeta^i=\sum_{i=1}^n\frac{(\zeta^i)^2}{|\zeta|}=\frac{1}{|\zeta|}\sum_{i=1}^n(\zeta^i)^2=|\zeta|.$$

于是

$$|\zeta|=\sum_{i=1}^n\lambda_i\zeta^i=\sum_{i=1}^n\lambda_i\int_\alpha^\beta b^i dt=\int_\alpha^\beta\sum_{i=1}^n\lambda_i b^i dt.$$

应用引理7·5，$\left|\sum_{i=1}^n\lambda_i b^i\right|\leqslant|\lambda|\,|b|$，并注意$|\lambda|=1$可得

$$|\zeta|\leqslant\int_\alpha^\beta|\lambda|\,|b|dt=\int_\alpha^\beta|b|dt.$$

引理7·7 设G是R_{m+n}内的开集且$F：G\to\mathrm{R}_n$是具有连续一阶偏导数的矢函数．L是联结G内$(\bar{x},\ \bar{y})$及$(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})$点的直线段，并且∃正数$M_1$，$M_2$使$(x,\ y)\in L$，有 $|\nabla_x F|\leqslant M_1$及$|\nabla_y F|\leqslant M_2$．那么

$$|F(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})-F(\bar{x},\ \bar{y})|\leqslant M_1\cdot|\bar{\bar{x}}-\bar{x}|+M_2|\bar{\bar{y}}-\bar{y}|.$$

证明 联结$(\bar{x},\ \bar{y})$与$(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})$的闭线段上的点可表示为$(\bar{x}+t(\bar{\bar{x}}-\bar{x}),\ \bar{y}+t(\bar{\bar{y}}-\bar{y}))$，$0\leqslant t\leqslant1$．定义函数

$$f(t)=F(\bar{x}+t(\bar{\bar{x}}-\bar{x}),\ \bar{y}+t(\bar{\bar{y}}-\bar{y}))$$

并用等式

$$f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(t)dt.$$

因为$f(1)=F(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})$，$f(0)=F(\bar{x},\ \bar{y})$，上式化成

$$F(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})-F(\bar{x},\ \bar{y})$$

$$=\int_0^1 \frac{d}{dt}F(\bar{x}+t(\bar{\bar{x}}-\bar{x}),\ \bar{y}+t(\bar{\bar{y}}-\bar{y}))dt.$$

对每一分量F^i用链法则，可得

$$F^i(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})-F^i(\bar{x},\ \bar{y})$$

$$=\int_0^1\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}(F^i)(\bar{\bar{x}}_j-\bar{x}_j)+\sum_{K=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_K}(F^i)(\bar{\bar{y}}_K-\bar{y}_K)\right\}dt$$

写成矩阵表示式为

$$F(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})-F(\bar{x},\ \bar{y})$$

$$=\int_0^1[\nabla_x F\cdot(\bar{\bar{x}}-\bar{x})+\nabla_y F\cdot(\bar{\bar{y}}-\bar{y})]dt$$

由引理7·6及引理7·5有

$$|F(\bar{\bar{x}},\ \bar{\bar{y}})-F(\bar{x},\ \bar{y})|$$

$$\leqslant\int_0^1 |\nabla_x F(\overline{\overline{x}}-\overline{x})+\nabla_y F\cdot(\overline{\overline{y}}-\overline{y})|dt$$

$$\leqslant\int_0^1 [|\nabla_x F|\cdot|\overline{\overline{x}}-\overline{x}|+|\nabla_y F|\cdot|\overline{\overline{y}}-\overline{y}|]dt$$

$$\leqslant M_1\cdot|\overline{\overline{x}}-\overline{x}|+M_2|\overline{\overline{y}}-\overline{y}|.$$

注　上述引理7·7是最普遍形式的近似的中值定理.我们将用它证明方程组的隐函数定理.

引理7·8　设B是$n\times n$的矩阵，且$|B|<1$。I表示恒等矩阵，$A=I-B$，那么A是非奇异的。

证明　考察$R_n\to R_n$的映象$y=Ax$，$x\in R_N$。证明这一映象是1—1的，因而它是非奇异的。

设x_1，$x_2\in R_n$。按$A=I-B$，有

$$Ax_1-Ax_2=(x_1-x_2)-(Bx_1-Bx_2).$$

并且

$$|Ax_1-Ax_2|\geqslant|x_1-x_2|-|Bx_1-Bx_2|$$
$$\geqslant|x_1-x_2|-|B|\cdot|x_1-x_2|$$
$$\geqslant|x_1-x_2|(1-|B|).$$

因此当$x_1\neq x_2$时，$|Ax_1-Ax_2|>0$，即$Ax_1\neq Ax_2$.可见A是1—1的映象，它是非奇异的。

有了上述准备，现在来证明隐函数定理。先用不动点定理证明特殊情况的定理。

定理7·16　设G是n_{m+n}的开集，G包含原点，$\psi: G\to R_n$在G内包括它的所有一阶偏导数都连续，并且

$$\psi(0, 0)=0, \quad \nabla_x \psi(0, 0)=0, \quad \nabla_y \psi(0, 0)=0 \tag{7·48}$$

再设C是$n\times m$的常数矩阵，且定义$F: G\to \mathrm{R}_n$为

$$F(x, y)=y-Cx-\psi(x, y).$$

那么

(a)存在正数h及K，使$B_m(0, h)\times B_n(0, K)$ ($B_m(0, h)$，$B_n(0, K)$分别表示以R_m，R_n的原点为中心，以h，K为半径的开球，$B_m(0, h)\times B_n(0, K)$是笛卡尔积)，含于$G$内且对$\forall x\in B_m(0, h)$，$\exists$唯一的$y\in B_n(0, K)$，满足

$$F(x, y)=0 \quad 或等价的 \quad y=Cx+\psi(x, y).$$

(b)若以g表示这一从$B_m(0, h)$到$B_n(0, K)$，由序偶(x, y)给出的函数，那么g及其所有一阶偏导数均在$B_m(0, h)$内连续。

证明 (a)由G是开集且ψ在G内连续，$\exists$正数K，使闭集$B=\overline{B_m(0, K)\times B_n(0, K)}$含于$G$内，且$\psi$在$B$上连续，由(7·48)式及$\psi$及其偏导数在$G$内连续，$K$可以选取得这样的小，使

$$|\nabla_x \psi|\leqslant\frac{1}{2}, \quad |\nabla_y \psi|\leqslant\frac{1}{2} \quad 在B上成立.$$

固定$B_m(0, K)$中的x，定义从$B_n(0, K)$到R_n内的映象：

$$T(y)=Cx+\psi(x, y). \tag{7·49}$$

应用引理7·7于$\psi(x, y)$，$(x, y)\in B_m(0, K)\times B_n(0, K)$，

$$|\psi(x, y)|=|\psi(x, y)-\psi(0, 0)|$$

$$\leqslant \max|\nabla_x\psi|\cdot|x-0|+\max|\nabla_y\psi|\cdot|y-0|$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|x|+\frac{1}{2}|y|.$$

因此，对$x\in B_m(0, K)$，$y\in B_n(0, K)$有

$$|T(y)|\leqslant|C|\cdot|x|+\frac{1}{2}|x|+\frac{1}{2}|y|. \qquad (7\cdot50)$$

C是常数矩阵，那么$\exists$正数M使$|C|\leqslant M$。现在选取正数h，让$h<\frac{K}{2M+1}$。把映象（7·49）限于$B_m(0, h)$内，那么对固定的$\forall x\in B_m(0, h)$及$y\in B_n(0, K)$，有

$$|T(y)|\leqslant\left(M+\frac{1}{2}\right)h+\frac{1}{2}K<\frac{1}{2}K+\frac{1}{2}K=K.$$

因此T映射$B_n(0, K)$到$B_n(0, K)$内，且对$y_1,y_2\in B_n(0,K)$

$$|T(y_1)-T(y_2)|=|\psi(x, y_1)-\psi(x,y_2)|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}|y_1-y_2|,$$

上式右端不等式由引理7·7导出。于是T是压缩映象，据定理6·46，对固定的$\forall x\in B_m(0, h)$，$\exists$唯一的$y\in B_n(0,K)$，使

$$y=T(y) \quad 或 \quad y=Cx+\psi(x, y).$$

以g表示使y与x对应的函数，$y=g(x)$满足

$$F(x, g(x))=0.$$

(b)证明g是连续的。设x_1，$x_2 \in B_m(0, h)$，$g(x_1)=y_1 \in B_n(0, K)$，$g(x_2)=y_2 \in B_n(0, K)$或

$$y_1 = Cx_1 + \psi(x_1, y_1), \qquad y_2 = Cx_2 + \psi(x_2, y_2).$$

那么由引理7·7及$|C|<M$，有

$$|y_1 - y_2| \leqslant |C(x_2 - x_1)| + |\psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)|$$

$$\leqslant M \cdot |x_2 - x_1| + \frac{1}{2}(|x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|).$$

或等价的

$$|y_2 - y_1| \leqslant (2M+1)|x_2 - x_1|,$$

即$|g(x_2) - g(x_1)| \leqslant (2M+1)|x_2 - x_1|$。因此$g$在$B_m(0, h)$内连续。

设g的分量为g^1，g^2，…，g^n，证明$\frac{\partial}{\partial x_p} g^i (1 \leqslant p \leqslant m)$存在且连续。在$R_m$内以$e^p$表示第$p$个单位矢，即$e^p = (e_1^p, e_2^p, \cdots, e_m^p)$，其中$e_p^p = 1$，$e_j^p = 0$，$j \neq p$。固定$\overline{x} \in B_m(0, h)$，并取一足够小的正数$t_0$，使对$|t| \leqslant t_0$，都有$\overline{x} + te^p \in B_m(0, h)$。现令$x = \overline{x} + te^p$，并记

$$g(x) = Cx + \psi(x, g(x)).$$

这等式的第i个分量为

$$g^i(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j^i x_j + \psi^i(x, g(x)),$$

其中C_j^i为矩阵C的分量。定义Δg^i为

$$\Delta g^i = g^i(\overline{x} + te^p) - g^i(\overline{x}).$$

由定理假设ψ的一阶偏导数连续，应用微分的基本引理（定理7·2），导出

$$\frac{\Delta g^i}{t} = C_p^i + \frac{\partial}{\partial x_p}\psi^i(\overline{x}, g(\overline{x})) + \overline{\varepsilon}_p^i(te^p, \Delta g)$$

$$+ \sum_{K=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial y_K}\psi^i(x, g(\overline{x})) + \overline{\overline{\varepsilon}}_K^i(te^p, \Delta g)\right]\frac{\Delta g^K}{t},$$

这里$\overline{\varepsilon}_p^i(\rho, \sigma)$及$\overline{\overline{\varepsilon}}_K^i(\rho, \sigma)$在$(0, 0)$点连续且在（0, 0）点为零。按$e^p$的定义，上式可以写成

$$\frac{\Delta g^i}{t} = \sum_{j=1}^{m} C_j^i e_j^p + \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi^i(\overline{x}, g(\overline{x}))e_j^p$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\overline{\varepsilon}_j^i(te^p, \Delta g)e_j^p$$

$$+ \sum_{K=1}^{n}\left[\frac{\partial}{\partial y_K}\psi^i(\overline{x}, g(\overline{x})) + \overline{\overline{\varepsilon}}_K^i(te^p, \Delta g)\right]\frac{\Delta g^K}{t}$$

(7·51)

这里$\overline{\varepsilon}_j^i(\rho, \sigma)$，$j = 1, 2, \cdots, m$，在（0, 0）点连续，在（0, 0）点值为零。定义矩阵

$$A_1(t) = C + \nabla_x\psi(\overline{x}, g(\overline{x})) + \overline{\varepsilon}(te^p, \Delta g),$$

$$A_2(t)=\nabla_y\psi(\overline{x},\ g(\overline{x}))+\overline{\overline{\varepsilon}}(te^p,\ \Delta g),$$

这里$\overline{\varepsilon}$的分量为$\overline{\varepsilon}^i_j$，$\overline{\overline{\varepsilon}}$ 的分量为 $\overline{\overline{\varepsilon}}^i_K$，$i$，$K=1$，$2$，$\cdots$，$n$，$j=1$，$2$，$\cdots$，$m$。那么（7·51）可以写成矢量方程：

$$\frac{\Delta g}{t}=A_1e^p+A_2\frac{\Delta g}{t}. \tag{7·52}$$

以I表$n\times n$单位矩阵，定义$B=I-A_2$，那么（7·52）成为

$$B\frac{\Delta g}{t}=A_1e^p. \tag{7·53}$$

根据（7·48）有$|A_2(0)|\leqslant\frac{1}{2}$。因此，据引理7·8矩阵 $B(0)$ 是非奇异的。因为g在$B_m(0,\ h)$内连续，当$t\to 0$，$\Delta g\to 0$。所以矩阵$A_1(t)$，$A_2(t)$，$B(t)$在$t=0$点连续。于是对充分逼近于0的t，$B(t)$是非奇异的。令（7·53）中的$t\to 0$，由此断定$\frac{\Delta g}{t}$在$t\to 0$时极限存在，且$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\Delta g}{t}=B^{-1}(0)A_1(0)e^p$。

可见

$$\frac{\partial}{\partial p}g^i=\lim_{t\to 0}\frac{\Delta g^i}{t}$$

存在且由上式它是连续的。

定理7·17（关于方程组的隐函数定理） 设G是R_{m+n}内的开集，点$(\overline{x},\ \overline{y})\in G$。$F:G\to\mathrm{R}_n$在$G$内有连续的一阶偏导数，且

$F(\overline{x},\ \overline{y})=0$，$\det\nabla_yF(\overline{x},\ \overline{y})\neq 0$（det为行列式符号），

那么∃正数 h 与 K，满足：(a) $\overline{B_m(\bar{x}, h)} \times \overline{B_n(\bar{y}, K)} \subset G$；(b)对 $\forall x \in B_m(\bar{x}, h)$，∃唯一的 $y \in B_n(\bar{y}, K)$，使 $F(x, y)=0$。若以 f 表示由序偶 (x, y) 的集所定义的从 $B_m(\bar{x}, h)$ 到 $B_n(\bar{y}, K)$ 的函数，那么 $F(x, f(x))=0$；并且 f 在 $B_m(\bar{x}, h)$ 内有连续的一阶偏导数。

证明 定义矩阵 $A=\nabla_x F(\bar{x}, \bar{y})$，$B=\nabla_y F(\bar{x}, \bar{y})$，并记 F 为

$$F(x, y)=A(x-\bar{x})+B(y-\bar{y})+\varphi(x, y). \qquad (7\cdot54)$$

φ 由（7·54）式定义，显然 φ 具有性质：

$$\varphi(\bar{x}, \bar{y})=0, \quad \nabla_x \varphi(\bar{x}, \bar{y})=0, \quad \nabla_y \varphi(\bar{x}, \bar{y})=0.$$

由假设 B 非奇异，存在 B^{-1}，以 B^{-1} 乘（7·54）得

$$B^{-1}F=B^{-1}A(x-\bar{x})+(y-\bar{y})+B^{-1}\varphi(x, y).$$

分别以 $B^{-1}F$，$(x-\bar{x})$，$(y-\bar{y})$，$-B^{-1}A$，$B^{-1}\varphi$ 为定理7·16中的 F，x，y，C，ψ，则定理7·16条件都被满足。于是定理结论对 $B^{-1}F$ 成立。而因 B^{-1} 是常数的非奇异矩阵，结果对 F 也成立。

注 隐函数 f 的一阶偏导数可由 F 的一阶偏导数表示出来.为此，设

$F=(F^1, F^2, \cdots, F^n)$，$f=(f^1, f^2, \cdots, f^n)$ 并记

$$F^i(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n)=0, \qquad (7\cdot55)$$

其中 $y_i=f^i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$。为了求 f^i 的偏导数，依链法则对（7·55）关于 x_p 求导数可得

$$\frac{\partial F^i}{\partial x_p}+\sum_{K=1}^{n}\frac{\partial F^i}{\partial y_K}\ \frac{\partial f^K}{\partial x_p}=0,\quad i=1,2,\cdots,n,\quad p=1,2,\cdots,m. \tag{7·56}$$

对固定的p，把$\frac{\partial f^K}{\partial x_p}$作为未知量，（7·56）是$n$元$n$个方程的线性方程组，其系数矩阵在$(\overline{x},\ \overline{y})$点的行列式$\det\nabla_y F(\overline{x},\ \overline{y})\neq 0$．由克莱姆法则，方程组有唯一的解．

例1 设$F(x,\ y)$是$R_4\to R_2$的函数：

$$F^1(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=x_1^2-x_2^2-y_1^3+y_2^2+4$$

$$F^2(x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2)=2x_1x_2+x_2^2-2y_1^2+3y_2^4+8.$$

$P(\overline{x},\ \overline{y})=(2,-1,\ 2,\ 1)$，验证$F(\overline{x},\ \overline{y})=0$，$\nabla_y F(\overline{x},\ \overline{y})\neq 0$，并求$F$在$p$点所定义的隐函数$y=f(x)$的偏导数。

解 $F(\overline{x},\ \overline{y})=0$显然成立。而

$$\frac{\partial F^1}{\partial y_1}=-3y_1^2,\quad \frac{\partial F^1}{\partial y_2}=2y_2,\quad \frac{\partial F^2}{\partial y_1}=-4y_1,\quad \frac{\partial F^2}{\partial y_2}=12y_2^3.$$

在p点

$$\det(\nabla_y F)=\frac{\partial F^1}{\partial y_1}\ \frac{\partial F^2}{\partial y_2}-\frac{\partial F^1}{\partial y_2}\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1}=-128\neq 0.$$

而 $$\frac{\partial F^1}{\partial x_1}=2x_1,\quad \frac{\partial F^1}{\partial x_2}=-2x_2,$$

$$\frac{\partial F^2}{\partial x_1}=2x_2,\quad \frac{\partial F^2}{\partial x_2}=2x_1+2x_2,$$

将它们在p点的值代入（7·56），得到分别以$\frac{\partial f^1}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f^2}{\partial x_1}$

这 $\frac{\partial f^1}{\partial x_2}$，$\frac{\partial f^2}{\partial x_2}$ 为未知量的两个二元一次线性方程组，解得

$$\frac{\partial f^1}{\partial x_1} = = \frac{3}{8},\quad \frac{\partial f^2}{\partial x_1} = \frac{7}{16},\quad \frac{\partial f^1}{\partial x_2} = \frac{5}{32},$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial x_2} = -\frac{1}{16}.$$

例2 设 $F: R_5 \to R_3$，

$$F^1(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3y_1^2 + 4y_1y_2 - y_2^2 + y_3^3$$

$$F^2(x_1, x_2, y_1, y_2, y_2) = x_1^2 + 3x_2 - 4x_1x_2 + 4y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2$$

$$F^3(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = x_1^3 - x_2^3 + 4y_1^2 + 2y_2 - 3y_3^2.$$

如果 $p(x, y)$ 是使 $F(x, y) = 0$，且 $\nabla_y F$ 非奇异的一个点。用 f 表示方程 $F(x, y) = 0$ 定义的隐函数，求 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 在 p 点的值。

解 根据（7·56）得线性方程组

$$(-6y_1 + 4y_2)\frac{\partial f^1}{\partial x_1} + (4y_1 - 2y_2)\frac{\partial f^2}{\partial x_1} + 3y_3^2\frac{\partial f^3}{\partial x_1} = -2x_1$$

$$8y_1 \quad \frac{\partial f^1}{\partial x_1} + \quad (-4y_2) \quad \frac{\partial f^2}{\partial x_1} + 2y_3\frac{\partial f^3}{\partial x_1} = 4x_2 - 1$$

$$8y_1 \quad \frac{\partial f^1}{\partial x_1} + \qquad 2\frac{\partial f^2}{\partial x_1} - 6y_3\frac{\partial f^3}{\partial x_1} = -3x_1^2.$$

解这一方程组得$\frac{\partial f^1}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f^2}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f^3}{\partial x_1}$的表示式。同理可以求出$\frac{\partial f^1}{\partial x_2}$，$\frac{\partial f^2}{\partial x_2}$，$\frac{\partial f^3}{\partial x_2}$，细节请读者完成。

定义 设G是R_m内的开集，$F:G\to R_n$是给定的矢函数，K是自然数，称F属于$C^K(G)$类$\Longleftrightarrow F$在G上有直到K阶的连续的偏导数。

定理7·15的推论（关于反函数定理）很自然地推广到矢函数。

定理7·18（反函数定理） 设G是R_m内包含$\overline{x}$点的开集。假定$f:G\to R_n$属于$C^1(G)$类且

$$\overline{y}=f(\overline{x}),\qquad \det\nabla_x f(\overline{x})\neq 0.$$

那么$\exists$正数h与K，使球$B_m(\overline{x},\ K)\subset G$及对$\forall y\in B_n(\overline{y},\ h)$，$\exists$唯一的点$x\in B_m(\overline{x},\ K)$，满足$f(x)=y$。若以$g$表示由序偶$(y,\ x)$的集所定义的$f$的反函数，$g$是由$B_n(\overline{y},\ K)$到$B_m(\overline{x},\ K)$内的$C^1$类的函数，且$f(g(y))=y$对$y\in B_n(\overline{y},h)$成立。

证明 在定理7·16中取$F(x,\ y)=y-f(x)$，便得定理7·17。

注 单变量函数的反函数定理具有性质：函数的导数在函数的定义域内不为零，函数在整个定义域上是1—1的。在定理7·17中，条件$\det\nabla_x f\neq 0$不能保证反矢函数在其定义域上是1—1的。例如，函数$f:R_2\to R_2$其定义为

$$f^1=x_1^2-x_2^2,\quad f^2=2x_1x_2, \tag{7·57}$$

定义域是$G\{(x_1,x_2):r_1<(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}<r_2\}$，$r_1,r_2$为正数.计算出

$$\nabla_x f=\begin{pmatrix}2x_1, & -2x_2\\ 2x_2, & 2x_1\end{pmatrix}$$

$\det\nabla_x f=4(x_1^2+x_2^2)$在$G$上恒为正.可是，由（7·57）$y=f(x)$对同一$y$的值相应地有两个不同的$x$，即在整个$G$上对应于每一给定的$y=(y_1,y_2)$，有两不同的$x=(x_1,x_2)$与$y$相对立．$y=f(x)$的逆关系在整个$G$上不是函数，而在$G$内的充分小的球内是函数

习　　题

习题1—4，对给定的F及点p，验证隐函数定理成立。以f表示这一隐函数，求f在p点的各个一阶偏导数。

1．$F=(F^1,\ F^2)$，$P=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$，

$F^1=2x_1-3x_2+y_1-y_2$，$F^2=x_1+2x_2+y_1+2y_2$．

2．$F=(F^1,\ F^2)$，$P=(0,\ 0,\ 0,\ 0)$，

$F^1=2x_1-x_2+2y_1-y_2$，$F^2=3x_1+2x_2+y_1+y_2$．

3．$F=(F^1,\ F^2)$，$P=(3,\ -1,\ 2,\ 1)$，

$F^1=x_1-2x_2+y_1+y_2-8$，

$F^2=x_1^2-2x_2^2-y_1^2+y_2^2-4$．

4．$F=(F^1,\ F^2)$，　$p=(2,\ 1,\ -1,\ 2)$，

$F^1=x_1^2-x_2^2+y_1y_2-y_2^2+3$，

$F^2=x_1+x_2^2+y_1^2+y_1y_2-2$．

5．设$x=(x_1,\ x_2)$，$y=(y_1,\ y_2)$，$F:R_4\to R_1$，F在(x,y)点满足隐函数定理条件，以f表示由$F(x,y)=0$定义的隐函数，求用F的一阶偏导数表示$\frac{\partial f^1}{\partial x_1}$，$\frac{\partial f^1}{\partial x_2}$，$\frac{\partial f^2}{\partial x_1}$，

$\frac{\partial f^2}{\partial x_2}$的公式。

6. 设$F(x, y)$是$R_{m+2} \to R_2$的函数 $x=(x_1, \cdots, x_m)$, $y=(y_1, y_2)$满足隐函数定理的条件，以f表示$F(x, y)=0$定义的隐函数。用F的一阶偏导数表示 $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}$, $i=1,2$, $j=1, 2, \cdots, m$。

7. 完成例2的解。

8. 设$F: R_2 \to R_2$, $F=(F^1, F^2)$ 其 $F^1=e^{2x+y}$, $F^2=(4x^2+4xy+y^2+6x+3y)^{\frac{2}{3}}$。证明不存在$x$的值，对这一$x$能满足隐函数定理。求$F^1$与$F^2$之间的一个关系。

习题9—12，对给出的矢函数$f: R_2 \to R_2$，验证反函数定理成立并求出反函数。

9. $y_1=x_1$, $y_2=x_1^2+x_2$

10. $y_1=2x_1-3x_2$, $y_2=x_1+2x_2$.

11. $y_1=x_1/(1+x_1+x_2)$ $y_2=x_2/(1+x_1+x_2)$,
$x_1+x_2>-1$.

12. $y_1=x_1\cos(\pi x_2/2)$, $y_2=x_1\sin(\pi x_2/2)$,
$x_1>0$, $-1<x_2<1$.

13. 设函数$f: R_3 \to R_3$, $f^1=e^{x_2}\cos x_1$, $f^2=e^{x_2}\sin x_1$, $f^3=2-\cos x_3$。求反函数定理成立的点$p(x_1, x_2, x_3)$。

14. 设函数$f: R_2 \to R_2$满足反函数定理，以$x=g(y)$来记这一反函数。求用f^1, f^2的偏导数表示g^1, g^2的偏导数的公式，并求$\frac{\partial^2 g^1}{\partial y_2^2}$的公式。

15. 给定$F: R_4 \to R_2$，对所有满足$F(x,y)=0$的$x=(x_1, x_2)$

及$y=(y_1,y_2)$，叙述方程$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_1}+\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$
$=0$成立的充分条件。

§7·6 条件极值与拉格朗日乘数法

在§7·2给出了$f: \mathbf{R}_m\to\mathbf{R}_1$的局部极值点的必要条件是$f_{,i}=0$，$i=1, 2, \cdots, m$。还证明了用二阶导数的判别法（定理7·8）。在很多应用中，要求的是对f的定义域给定一定限制条件——称为f的约束——之下的局部极值。约束通常用方程组给出：

$$\begin{gathered}\varphi^1(x_1, \cdots, x_m)=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi^K(x_1, \cdots, x_m)=0\end{gathered} \tag{7·58}$$

(7·58)称为约束条件或边界条件、附加条件。

假定f，φ^1，$\cdots$，φ^K都是从$\mathbf{R}_m$的开集D上到$\mathbf{R}_1$的C^1类函数，并且$K<m$。这里假定$K<m$的理由，在于当$K\geqslant m$时，（7·58）可能无解或其解集只含有一个点，那么满足约束条件（7·58）的f的可能取值不多于一个，无需讨论f的极值了。还假定$K\times m$矩阵

$$\begin{pmatrix}\varphi^1_{;1}, & \varphi^1_{;2}, & \cdots, & \varphi^1_{;m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi^K_{;1}, & \varphi^K_{;2}, & \cdots, & \varphi^K_{;m}\end{pmatrix}$$

的秩是K，即上述矩阵至少有一$K\times K$的子式的行列式在D

的各点的值异于零。不失一般性，设矩阵的前K列上的方阵在D内各点行列式的值不为零（如有必要可交换列的次序）。在这些假设条件下，据隐函数定理，在$\forall \bar{x} \in D$的某邻域内用X_{K+1}，X_{K+2}，…，X_m表示x_1，x_2，…，x_K，即$\exists$ C^1类函数g^1，g^2，…，g^K，（7•58）可写成

$$
\begin{aligned}
x_1 &= g^1(x_{K+1}, \cdots, x_m) \\
x_2 &= g^2(x_{K+1}, \cdots, x_m) \\
\cdots & \qquad \cdots \\
x_K &= g^K(x_{K+1}, \cdots, x_m)
\end{aligned}
\tag{7•59}
$$

求函数f满足约束条件（7•58）的局部极值，可首先从（7•58）解出x_1，x_2，…，x_K得到(7•59)，然后把(7•59)代入f得到x_{K+1}，…，x_m的函数

$$
\begin{aligned}
&H(x_{K+1}, \cdots, x_m) \\
&= f[g^1(x_{K+1}, \cdots, x_m), g^2(x_{K+1}, \cdots, x_m)\cdots, \\
&\quad g^K(x_{K+1}, \cdots, x_m), x_{K+1}, \cdots, x_m].
\end{aligned}
$$

最后按§7•2的方法求x_{K+1}，…，x_m的函数H的（无条件）极值。即求出方程组

$$
H,_i = \sum_{j=1}^{K} f,_j g,_i^j + f,_i = 0 \quad i = k+1, k+2\cdots, m. \tag{7•60}
$$

的解x_{K+1}，…，x_m，将x_{K+1}，…，x_m的值代入（7•59）求出x_1，x_2，…x_K得到满足约束（7•58）的临界点。再由二

阶导数判别是否是极大值或极小值点。

拉格朗日乘数法则是使用一种简单的技巧，求满足约束条件极值的方法。这种方法在（7·58）不能或难于解成（7·59）的g^1，g^2，…，g^K时，就更显出它的优越性。

拉格朗日法则是引进K个新的参数，表示为$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_K)$，并构造$m+K$个变量的函数

$$F(x,\lambda)=F(x_1, \cdots x_m, \lambda_1, \cdots, \lambda_K)$$

$$=f(x)+\sum_{j=1}^{K}\lambda_j\ \varphi^j(x).$$

对F来求$x\in D$，$\lambda\in \mathbf{R}_K$的临界点。即解如下$m+K$个方程的联立方程组：

$$F_{,i}=0, \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,$$

$$F_{,j}=0, \qquad j=m+1,\ \cdots,\ m+K. \tag{7·61}$$

要证明由解（7·61）得到的$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$的集包含（7·60）的解。

设D内满足约束条件（7·58）的一切点的集为D_0，即$D_0=\{x: x\in D$，且$\varphi^i(x)=0, i=1, 2, \cdots K\}$。$f$在$D_0$的点$x^0$取极小值，并且假定$\exists$函数$g=(g^1, g^2, \cdots, g^m)$是从$I=\{t: -t_0<t<t_0\}$到$\mathbf{R}_m$的$C^1$类函数，$g$具有性质：

$$g(0)=x^0, \quad \varphi^j[g(t)]=0, \ j=1,2,\cdots,K, \ t\in I. \tag{7·62}$$

定义$I\to \mathbf{R}_1$的函数φ，

$$\varphi(t)=f[g(t)], \qquad t\in I. \tag{7·63}$$

这样定义的 φ在$t=0$处取极小值。由取极值的必要条件应当有 $\varphi'=0$，对（7·63）微分并令$t=0$得

$$\sum_{i=1}^{m} f,_{i}(x^{0})\frac{d^{i}g(0)}{dt}=0. \qquad (7\cdot64)$$

对（7·62）微分并令$t=0$可得

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi,_{i}^{j}(x^{0})\frac{dg^{i}(0)}{dt}=0, \quad j=1,2,\cdots,K. \qquad (7\cdot65)$$

现设$h=(h_1, h_2, \cdots, h_m)$是$R_m$内的一个与$K$个矢$(\varphi,_{1}^{j}(x^0), \varphi,_{2}^{j}(x^0), \cdots, \varphi,_{m}^{j}(x^0))$ $(j=1, 2, \cdots, K)$相正交的矢。即h满足

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi,_{i}^{j}(x^{0})h_i=0 \quad 或 \quad \nabla^{j}\varphi(x_0)\cdot h=0,$$

$$j=1, 2, \cdots, K.$$

根据隐函数定理，（7·58）可解出$x_1, x_2, \cdots, x_K$都是$x_{K+1}, \cdots, x_m$的函数：

$$x_i=\mu^{i}(x_{K+1}, \cdots, x_m), \quad i=1,2,\cdots,K.$$

若记$x^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0)$，且定义

$$g^{i}(t)=\begin{cases}\mu^{i}(x_{K+1}^{0}+th_{K+1},\cdots,x_m^0+th_m) & i=1,2,\cdots,K,\\ x_i+th_i & i=K+1,\cdots,m.\end{cases}$$

那么$g=(g^1(t), g^2(t), \cdots, g^m(t))$满足条件（7·62），（7·64）及（7·65），于是证明了下面的引理。

引理7·9 设f，φ^1，φ^2，…，φ^K都是在$\mathbf{R}_m$的开集D上的C^1类函数，$x^0\in D$，且$\nabla\varphi^1(x^0)$，…，$\nabla\varphi^K(x^0)$是$\mathbf{R}_m$中的线性无关的K个矢，$D_0=\{x:x\in D,\ \varphi^i(x)=0,\ i=1,2,\cdots,K\}$，$x_0$为限制$f$在$D_0$上的相对极小值点。如果$h$是$\mathbf{R}_m$中与$\nabla\varphi^1(x^0)$，…，$\nabla\varphi^K(x^0)$正交的任一矢，那么

$$\nabla f(x^0)\cdot h=0.$$

下一引理是一简单的线代数定理，在证明拉格朗日法则时要用。

引理7·10 设b^1，b^2，…，b^K是矢空间$\mathbf{R}_m$中线性无关的矢组。若矢a具有性质：凡与b^1，…b^K正交的矢h，都和a正交。那么∃数λ_1，λ_2，…，λ_K，满足

$$a=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i b^i.$$

证明 设B是$\mathbf{R}_m$中由b^1，b^2，…，b^K所张成的子空间。那么存在矢c^{K+1}，c^{K+2}，…，c^m与b^1，b^2，…，b^K一起组成$\mathbf{R}_m$的一个基。若h正交于每一b^i，h在基$(b^1, b^2,\cdots, b^K, c^{K+1},\cdots, c^m)$之下的前$K$个分量都应当等于零，即$h_1=h_2=\cdots=h_K=0$。在这一基之下，凡与$b^1$，$b^2$，…，$b^K$正交的$h$都与$a=(a_1, a_2,\cdots, a_m)$正交，也即

$$\sum_{j=1}^{m}a_jh_j=\sum_{j=K+1}^{m}a_jh_j=0$$

对一切$h=(0, 0,\cdots, 0, h_{K+1},\cdots, h_m)$成立，$h_{K+1}$，$h_{K+2}$，

…，h_m可取一切数。因此必有$a_{K+1}=a_{K+2}=\cdots=a_m=0$。于是

$a=\sum_{i=1}^{K}a_ib^i$。取$a_i=\lambda_i$，便得$a=\sum_{i=1}^{K}\lambda_ib^i$。

定理7·19（拉格朗日乘数法则） 设f，φ^1，…，φ^K及x^0满足引理7·9的条件。定义

$$F(x,\lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\varphi^i(x).$$

那么存在数λ_1^0，λ_2^0，…，λ_K^0满足

$$F_{x_i}(x^0,\ \lambda^0)=0, \qquad (7\cdot66)$$

$$F_{\lambda_j}(x^0,\ \lambda^0)=0.$$

证明 由$F(x,\ \lambda)=f(x)-\sum_{i=1}^{K}\lambda_i\ \varphi^i(x)$，方程(7·66)就是

$$\nabla f(x^0)=\sum_{j=1}^{K}\lambda_j^0\nabla\ \varphi^j(x^0)\text{及}\ \varphi(x^0)=0,\quad j=1,2,\cdots K.$$

令$a=\nabla f(x^0)$，$b^j=\nabla\ \varphi^j(x^0)$。由引理7·9，凡与$b^j$ $(j=1,\ 2,\ \cdots,\ K)$正交的矢h与a正交。再由引理7·10 ∃λ_1^0，λ_2^0，…，λ_K^0使$\nabla f(x^0)=a=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^0b^i=\sum_{i=1}^{K}\lambda_i^0\nabla\ \varphi^i(x^0)$，也即（7·66）被满足。

注 这一定理说明f在约束$\varphi^i=0(i=1,2,\cdots,K)$之下的相对极小值点（或极大值点），包含在$F$的无约束的极小值点（极大值点）之中。

例　求函数$f=x_1+3x_2-2x_3$在球面$x_1^2+x_2^2+x_3^2=14$上的最大值。

解　设$F(x_1,x_2,x_3,\lambda)\equiv x_1+3x_2-2x_3+\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2-14)$。那么

$$F,_1=1+2\lambda x_1,\quad F,_2=3+2\lambda x_2,\quad F,_3=-2+2\lambda x_3,$$

$$F,_4=x_1^2+x_2^2+x_3^2-14.$$

令$F,_i=0$，$i=1$，2，3，4，解这一方程组得

$$x_1=-\frac{1}{2\lambda},\quad x_2=-\frac{3}{2\lambda},\quad x_3=\frac{1}{\lambda},\quad 14=\frac{14}{4\lambda^2}.$$

即方程组　$F,_i=0(i=1,2,3,4)$的解有两组：$\left(1,\ 3,\ -2,\ -\frac{1}{2}\right)$及$\left(-1,\ -3,\ 2,\ \frac{1}{2}\right)$。

因为$x_1^2+x_2^2+x_3^2=14$的球面是R_3中的有界闭集，f在这有界闭集上能达到最大值、最小值。因此（-1，-3，2）及（1，3，-2）点应当一个是最大值点，另一是最小值点。直接计算：$f(-1,-3,2)=-14$，$f(1,3,-2)=14$。由此可见（1，3，-2）为f在球面上的最大值点，而（-1，-3，2）为f在球面上的最小值点。

习　　题

用拉格朗日乘数法则解答下列问题。

1. 求$x_1^2+3x_2^2+2x_3^2$在约束条件　$2x_1+3x_2+4x_3-15=0$下的极小值。

2. 求$2x_1^2+x_2^2+2x_3^2$在约束条件$2x_1+3x_2-2x_3-13=0$下的极小值。

3. 求$x_1^2+x_2^2+x_3^2$满足约束条件：$\begin{cases}2x_1+2x_2+x_3+9=0\\2x_1-x_2-2x_3-18=0\end{cases}$

的极小值。

4. 求$4x_1^2+2x_2^2+3_3^2$ 满足约束$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3-9=0\\4x_1-2x_2+3x_3+19=0\end{cases}$

的极小值。

5. 求$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$满足约束 $2x_1+x_2-x_3-2x_4-5=0$

的极小值。

6. 求$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2$满足约束$\begin{cases}x_1-x_2+x_3+x_4-4=0\\x_1+x_2-x_3+x_4+6=0\end{cases}$

的极小值。

7. 求曲线$x_1^2+4x_1x_2+x_2^2=25$上到原点最近的点。

8. 求曲线$7x_1^2+6x_1x_2+2x_2^2=25$上到原点最近的点。

9. 求曲线$x_1^4+x_2^4+3x_1x_2=2$上到原点最远的点。

10. 设b_1，b_2，…，b_K是正数，求$\sum_{i=1}^{K}b_ix_i$满足约束$\sum_{i=1}^{K}x_i^2$

$=1$的最大值。

11. (a)求$x_1^2\cdot x_2^2\cdots x_n^2$满足约束$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$的最大值。

(b)若 $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$，证明$(x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}$.

(c)若a_1，a_2，…，a_n都是正数，证明

$$(a_1 \cdot a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

第八章　R_N内的积分

§8·1　R_N内的体积

为了在R_N内建立黎曼积分理论，首先要研究R_N内点集的体积理论。我们将把§5·4所给出的面积理论推广到R_N中的点集上来。

定义　设$a=(a_1,a_2,\cdots a_N)$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_N)$是R_N的两个点，$a_i<b_i$，$i=1,2,\cdots,N$。开方格$R=\{x: a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots,N\}$与闭方格$\overline{R}=\{x: a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1,2,\cdots N\}$的体积都定义为$(b_1-a_1)(b_2-a_2)\cdots(b_N-a_N)$。当$b_1-a_1=b_2-a_2=\cdots=b_N-a_N$成立时方格称为超立方。超立方的体积为$(b_1-a_1)^N$。

对应于$N=2$时所给出的理论，划分R_N为闭超立方：

$$\frac{K_i-1}{2^n}\leqslant x_i\leqslant\frac{K_i}{2^n},\qquad i=1,2,\cdots,N。\qquad(8\cdot1)$$

这里K_i $(i=1,2,\cdots,N)$是整数。每一超立方的体积为$\frac{1}{2^{nN}}$。

设S是R_N内包含于开方格$R=\{x: A_i<x_i<B_i, i=1,2,\cdots,N\}$中的有界集。为了方便，$A_1,A_2,\cdots A_N,B_1,B_2,\cdots,B_N$都取整数。

定义　R_N被划分为(8·1)式所给出的超立方称为n阶格。每个完全含于S内的n阶格的超立方称为S的内立方；包含S的点又非S的内立方的超立方称为S的边界立方；不含S点的超立方称S的外立方。

定义

$V_n^-(S)=2^{-Nn}$乘S的内立方数。

$V_n^+(S)=V_n^-(s)+2^{-Nn}$乘$S$的边界立方数。

类似于引理5·2，有下面引理。

引理8·1　设$R=\{x: A_i<x_i<B_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$是个开方格，$A_i$，$B_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$是整数，$S\subset R$。那么对于$R_N$的划分（8·1）所有$S$的内立方及边界立方都含于$R$内。

定理8·1　在引理8·1的假设下，有

（i）　$0\leqslant V_n^-(S)\leqslant V_n^+(S)\leqslant(B_1-A_1)(B_2-A_2)\cdots(B_N-A_N)$；

（ii）　$V_n^-(S)\leqslant V_{n+1}^-(S)$，　　$n=1,\ 2,\ \cdots$；

（iii）　$V_{n+1}^+(S)\leqslant V_n^+(S)$，　　$n=1,\ 2,\ \cdots$；

（iv）　序列$\{V_n^-(S)\}$及$\{V_n^+(S)\}$是收敛数列，记

$V^-(S)=\lim\limits_{n\to\infty}V_n^-(S)$，$V^+(S)=\lim\limits_{n\to\infty}V_n^+(S)$，那么

$$0\leqslant V^-(S)\leqslant V^+(S)\leqslant\prod_{i=1}^{N}(B_i-A_i)；$$

（v）　量$V_n^-(S)$，$V_n^+(S)$，$V^-(S)$，$V^+(S)$与R的选取无关。

定理8·1在$N=2$时就是定理5·19，定理8·1的证明与定理5·19的证明类似，把它留给读者。

定义 $V^-(S)$、$V^+(S)$分别称为S的内、外体积。当且仅当$V^-(S)=V^+(S)$时称S具有体积，它的体积就是这一共同值，记为$V(S)$或$V_N(S)$(N是维数)。$\mathbf{R}_N$内具有体积的点集称为图形。

定理8·2 设S_1与S_2是$\mathbf{R}_N$内的有界集。

(a)若$S_1\subset S_2$，那么$V^-(S_1)\leqslant V^-(S_2)$，$V^+(S_1)\leqslant V^+(S_2)$。

(b)$V^+(S_1\cup S_2)\leqslant V^+(S_1)+V^+(S_2)$。

(c)若S_1与S_2不含有共同内点，那么

$$V^-(S_1\cup S_2)\geqslant V^-(S_1+V^-(S_2).$$

(d)若S_1与S_2是图形且S_1，S_2不存在共同内点，那么

$$V(S_1\cup S_2)=V(S_1)+V(S_2).$$

(c)开方格$R=\{x: a_i<x_i<b_i,\quad i=1,2,\cdots,N\}$及闭方格$\overline{R}$都是图形，且$V(R)=V(\overline{R})=\prod_{i=1}^{N}(b_i-a_i)$.

当$N=2$时定理8·2成为定理5·20，两者的证明也相似。

定理8·3 设S_1，S_2都是$\mathbf{R}_N$内的图形，那么$S_1\cup S_2$，$S_1\cap S_2$及S_1-S_2都是图形。凡图形其边界的体积是零。

定理8·3的证明与定理5·21证明相似。定理8·2与定理8·3容易按归纳法推广到有限个S_1，S_2，…，S_K的情况。

习　题

1. 给出$\mathbf{R}_N$内的有界集S使$V^-(S)<V^+(S)$。

2. 研究开方格$R=\{x: a_i<x_i<b_i\}$, a_i, b_i都是无理数，$i=1, 2, \cdots, N$。证明对$\forall n$有$V_n^-(R)<V_n^+(R)$。

3. 证明引理8·1。若$\{A_i\}$和$\{B_i\}$是有理数。按（8·1）式给出的n阶格。对充分大的n，引理8·1的结果是否成立？

4. 给出一非空有界集$S\subset \mathbf{R}_N$使对$\forall n$有$V_n^-(S)=V_n^+(S)$。

5. 证明定理8·1

6. 叙述与证明相似于引理5·3的命题。

7. 举出$\mathbf{R}_N$的两个集S_1，S_2，它们不是图形，但其并$S_1\cup S_2$，交$S_1\cap S_2$是图形。S_1-S_2可能是图形吗？

8. 证明定理8·2。

9. 证明定理8·3

10. 证明若S_1，S_2，$\cdots$，S_K是$\mathbf{R}_N$内的图形，那么$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_K$及$S_1\cap S_2\cap\cdots\cap S_K$都是图形。若$S_1$，$S_2$，$\cdots$，$S_K$，$\cdots$是图形的无限族，那么$\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$还是图形吗？

§8·2　$\mathbf{R}_N$内的达布积分

我们可以平行于§5·1中$\mathbf{R}_1$内达布积分来建立$\mathbf{R}_N$内的达布积分。

定义　设$\mathbf{R}_N$中的有界集F是一个图形。F的一个划分是把F分解为有限个图形F_1，F_2，$\cdots$，F_n的族，任两个子图形不含有共同内点，即$\mathrm{Int}(F_i)\cap\mathrm{Int}(F_j)$ $(i\neq j)$是空集（Int表集的内部），且$F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n=F$。用$\Delta$来记$F$的

划分。

划分Δ'称为Δ的细分$\Longleftrightarrow\Delta'$的每个子图形整个地包含在$\Delta$的某子图形内。$F$的划分$\Delta_1$，$\Delta_2$，$\Delta_1=\{F_1, F_2, \cdots F_n\}$及$\Delta_2=\{G_1, G_2, \cdots G_m\}$。若$\Delta'$是一切非空的$F_i\cap G_j$（$i=1, 2, \cdots, n$, $j=1, 2, \cdots, m$）所组成的划分，那么称Δ'是Δ_1与Δ_2的共同细分。

显然，任何两个划分总存在共同细分。但要注意任给两个划分Δ_1，Δ_2，可能Δ_1不是Δ_2的细分，Δ_2也不是Δ_1的细分。

类似于R_1中的上和、下和定义，设D是R_N内的集，图形$F\subset D$，$f: D\to\mathrm{R}_1$在F上有界。对于F的划分$\Delta=\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$，$M_i$，$m_i$分别表示$f$在$F_i$上的上、下确界。即于$F_i$上

$$M_i=\sup f, \qquad m_i=\inf f.$$

定义 关于划分Δ，f的上和、下和分别为

$$S^+(f, \Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i V(F_i),$$

$$S_-(f, \Delta)=\sum_{i=1}^{n} m_i V(F_i).$$

定理8·4 设F是R_N内的图形，f在F上有界，$m\leqslant f(x)\leqslant M$。

(a) 若Δ是F的划分，那么

$$mV(F)\leqslant S_-(f, \Delta)\leqslant S^+(f, \Delta)\leqslant MV(F).$$

(*b*) 若Δ'是Δ的细分，那么

$$S_-(f,\Delta)\leqslant S_-(f,\Delta'),\ S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta).$$

(*c*) 若Δ_1，Δ_2都是F的划分，那么

$$S_-(f,\Delta_1)\leqslant S^+(f,\Delta_2).$$

证明 (*a*) 的证明与定理5·1 (*a*) 之证明相同。

(*b*) 设$\Delta'=\{F_1',F_2',\cdots F_m'\}$是$\Delta=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$的细分。以$F_1',F_2'\cdots,F_K'$表示含于$F_1$内的划分$\Delta'$的子图形。并记

$$m_1=\inf_{x\in F_1}f(x),\ m_i'=\inf_{x\in F_i'}f(x),\ i=1,2,\cdots,K.$$

因为$F_i'\subset F_1$，所以$m_1\leqslant m_i'$， $i=1,2,\cdots,K$.又因为$V(F_1)=V(F_1')+V(F_2')+\cdots+V(F_K')$，有

$$m_1V(F_1')\leqslant m_1'(F_1')+\cdots$$
$$+m_k'V(F_k').\tag{8·2}$$

对于F_2，F_3，…，F_n同样的不等式都成立。将这些不等式求和便得 $S_-(f,\Delta)\leqslant S_-(f,\Delta')$.类似可得$S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta)$.

(*c*) 若Δ_1，Δ_2是两个划分，Δ'是它们的共同细分。那么由 (*a*),(*b*) 可得

$$S_-(f,\Delta_1)\leqslant S_-(f,\Delta')$$
$$\leqslant S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta_2).$$

定义 设F是R_N内的图形，f是F上的实值有界函数.f的

上、下积分分别为

$$\overline{\int_F} fdV = \inf S^+(f, \Delta), \qquad \underline{\int_F} fdV = \sup S_-(f, \Delta),$$

这里下确界、上确界是对所有划分Δ取的。

当上、下积分相等时，称f达布可积，即

$$\overline{\int_F} fdV = \underline{\int_F} fdV = \int_F fdV.$$

为了标明积分是N维的，也把$\int_F fdV$记为$\int_F fdV_N$。

下列R_N积分的基本性质与R_1的积分相应的基本性质定理完全一样。其证明仅需将R_1中的区间改成R_N的图形便得。

定理8·5 设F是R_N内的图形。f，f_1，f_2都是定义在F上的实值有界函数。

(a) 若对$\forall x \in F$，$m \leqslant f(x) \leqslant M$，那么

$$mV(F) \leqslant \underline{\int_F} fdV \leqslant \overline{\int_F} fdV \leqslant MV(F).$$

(b) 若K是一正数，$g = Kf$，那么

$$\underline{\int_F} gdV = K\underline{\int_F} fdV, \qquad \overline{\int_F} gdV = K\overline{\int_F} fdV.$$

若K是一负数，$g=Kf$,那么

$$\underline{\int}_F g dV = K\overline{\int}_F f dV, \qquad \overline{\int}_F g dV = K\underline{\int}_F f dV.$$

(c) $$\underline{\int}_F (f_1+f_2) dV \geqslant \underline{\int}_F f_1 dV + \underline{\int}_F f_2 dV;$$

$$\overline{\int}_F (f_1+f_2) dV \leqslant \overline{\int}_F f_1 dV + \overline{\int} f_2 dV.$$

(d) 若$f_1(x)\leqslant f_2(x)$，对$\forall x\in$成立，那么

$$\underline{\int}_F f_1(x)dx \leqslant \underline{\int}_F f_2(x)dx, \quad \overline{\int}_F f_1(x)dx \leqslant \overline{\int}_F f_2(x)dx.$$

(e) 设G是$\mathbf{R}_N$内的另一图形，G与F无共同内点，若f在$F\cup G$上有定义且有界，那么

$$\underline{\int}_{F\cup G} f dV = \underline{\int}_F f dV + \underline{\int}_G f dV;$$

$$\overline{\int}_{F\cup G} f dV = \overline{\int}_F f dV + \overline{\int}_G f dV.$$

当定理8·5中的函数是达布可积的，那么(a)—(e)可以改成与定理5.3推论同样的定理8·5的推论。

定理8·6 设F是$\mathbf{R}_N$内的图形，f是F上的实值有界函数。

(a) f在F上达布可积$\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ F的划分Δ，使$S^+(f,\Delta)-S^-(f,\Delta)<\varepsilon$。

(*b*) 若f在F上一致连续，那么f在F上达布可积。

(*c*) 若f在F上达布可积，那么$|f|$在F上达布可积。

(*d*) 若f_1，f_2都在F上达布可积，那么$f_1 f_2$在F上达布可积。

(*e*) 若f是在F上达布可积的，H是含于F中的一个图形，那么f在H上达布可积。

对于$\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_1$的函数$f$，当$f$在区间$I$上非负，那么$\int_I f(x)dx$表示$y=f(x)$曲线的下方图形的面积。当$N \geqslant 2$，$F$是$\mathbf{R}_N$内一图形，$f$：$F \to \mathbf{R}_1$是非负的，那么$\int_F f dV$给出了"超曲面$f$之下"的$N+1$维的体积。严格地叙述为下面的定理8·8。

为了证明定理8·8，需要关于图形F与G直积体积的定理8·7，它是N维方格体积等于N个棱长之积的推广。

定理8·7 设F是$\mathbf{R}_N$内图形，G是$\mathbf{R}_M$内的图形，那么集$B=\{(x, y): x \in F, y \in G\} \subset \mathbf{R}_{N+M}$是$\mathbf{R}_{N+M}$内的图形，且

$$V_{N+M}(B) = V_N(F) \cdot V_M(G). \qquad (8\cdot3)$$

证明提要 将$\mathbf{R}_{N+M}$划分为边长为2^{-n}的超立方时，相应地F，G分别被划分为N维、M维的超立方。B的内超立方是F与G的内超立方的直积。于是有

$$V_n^-(B) = V_n^-(F) \cdot V_n^-(G),$$

令$n \to +\infty$求得$V^-(B) = V^-(F) \cdot V^-(G)$。同理可得$V^+(B) = V^+(F) \cdot V^+(G)$。因为$F$，$G$是图形，便得定理

的结论。

定理8·8 设F是$\mathbf{R}_N$内的图形，f是F上的实值有界函数。取常数C，使对$\forall x\in F$都有$f(x)>C$，并定义

$$G_1=\{(x,y):x\in F,\ y\in\mathbf{R}_1,\ C\leqslant y<f(x)\},$$

$$G_2=\{(x,y):x\in F,\ y\in\mathbf{R}_1,\ C\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

(a) $$\underline{\int}_F[f(x)-C]dV_N=V^{-}_{N+1}(G_1)\leqslant V^{+}_{N+1}(G_2),$$

$$\overline{\int}_F[f(x)-C]dV_N\geqslant V^{+}_{N+1}(G_2)\geqslant V^{+}_{N+1}(G_1)$$

(b) 若f与g在F上可积且对$\forall x\in F$，$f(x)\geqslant g(x)$。定义$G=\{(x,y):x\in F,\ 及f(x)\leqslant y\leqslant g(x)\}$，那么$G$是$\mathbf{R}_{N+1}$内的图形且

$$V_{N+1}(G)=\int_F[f(x)-g(x)]dV_N.$$

证明 因为$G_2\supset G_1$，(a)的不等式显然地成立。其余的部分可由达布上、下积分及$\mathbf{R}_N$内点集的内、外体积定义导出。

因为每一$V_{N+1}(G)$的体积元素是一N维超立方与一维长度的积（图8·1），由定理8·7导出（b）。

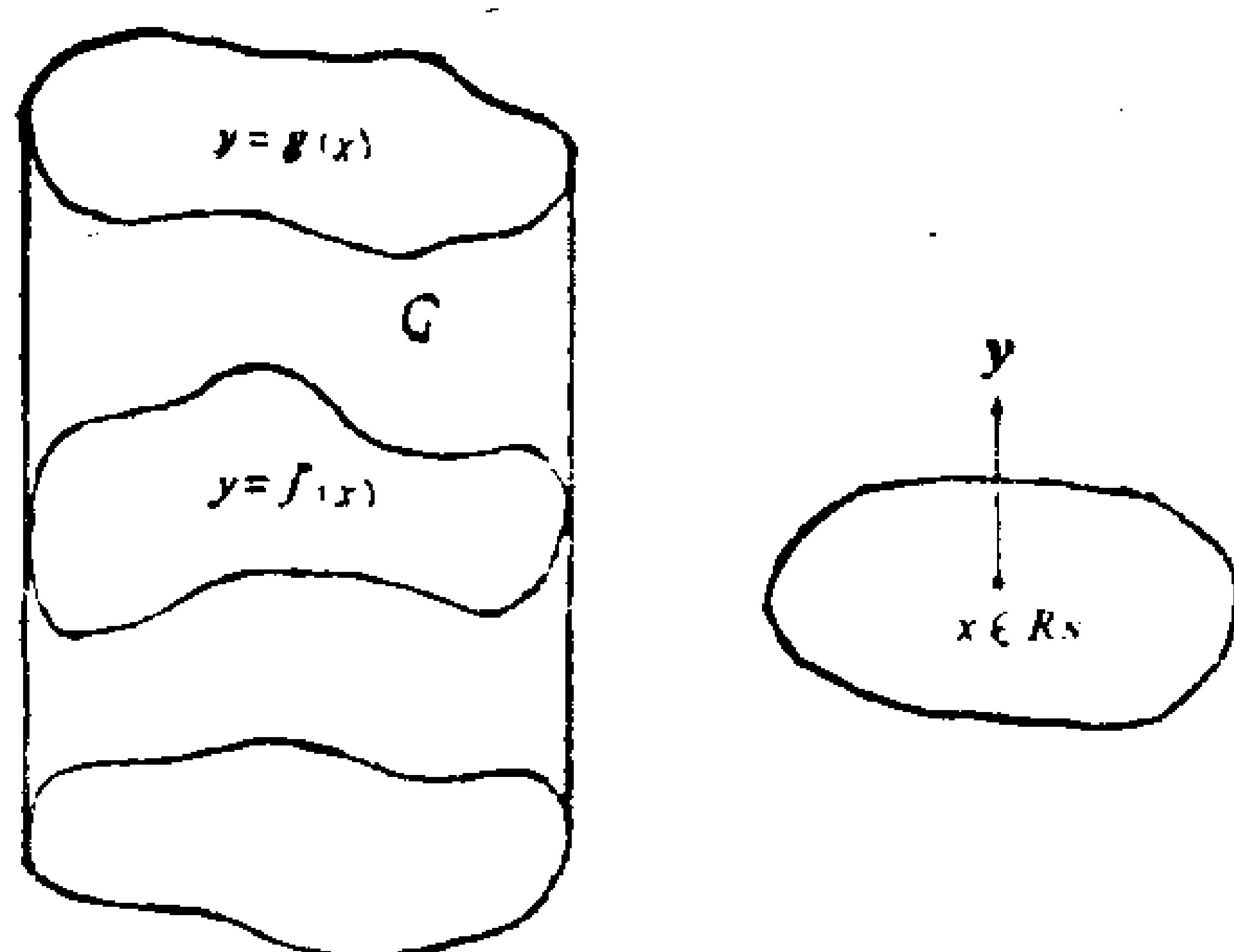


图 8·1

习 题

1．设F是R_N内的一图形，给出F上有界函数f，使得

$$\underline{\int}_F f dV \neq \overline{\int}_F f dV.$$

2．设F是R_N内的图形，f：$F \to R_1$于F上连续，Δ是F的划分，Δ'是Δ的任意的一细分，且$S_-(f,\Delta)=S_-(f,\Delta')$都成立，$f$具有何种性质？

3．写出定理8•4（a）的证明。

*4．设F是R_N内的图形，f：$F \to R_1$在F上一致连续。于R_{N+1}内定义集，$A\{(x, y): x\in F, y=f(x)\}$，证明

$$V_{N+1}(A)=0。$$

5．对f：$R_N \to R_1$证明与引理5•1同样的引理。

6．证明定理8•5。

7．证明定理8•6之（c），（d）及（e）。

8. 设F是R_N内的图形，$f: F\to R_1$在F上连续。如果对每一个F上连续的实值函数g，都有

$$\int_F fg dV=0, \text{ 证明在}F\text{上}f\equiv 0。$$

9. 完成定理8·7的证明。

10. 设$f: F\to R_1$是图形F上可积的函数，说明

$$\int_F f dV, \quad \int_F |f|\, dV \text{的几何意义。}$$

11. 写出定理8·8的详细证明。

12. 用公式（8·3）求R_5内图形$F=\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5): x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 1, x_4^2+x_5^2\leqslant 1\}$的体积。

§8·3　R_N内的黎曼积分

与上节推广达布积分类似，能把R_1中的黎曼积分推广到R_N。

定义　设A是具有距离$d(x, y)$的距离空间中的集，A的直径定义为，$\operatorname{diam} A=\sup\limits_{x, y\in A} d(x, y)$。

图形$F\subset R_N$的划分$\Delta=\{F_1, F_2, \cdots F_n\}$，划分的网孔$\|\Delta\|$定义为：$\|\Delta\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{diam} F_i\}$。

定义　设f是R_N内图形F上的函数。称f在F上黎曼可积$\Longleftrightarrow$ $\exists$一数L，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$相应于ε的δ，使当F的划分Δ的

网孔$\|\Delta\|<\delta$时，对$\forall x_i\in F_i$ $(i=1,2,\cdots n)$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(x^i)V_N(F_i)-L\right|<\varepsilon.$$

L称为f在F上的黎曼积分，记为$L=\int_F fdV$.

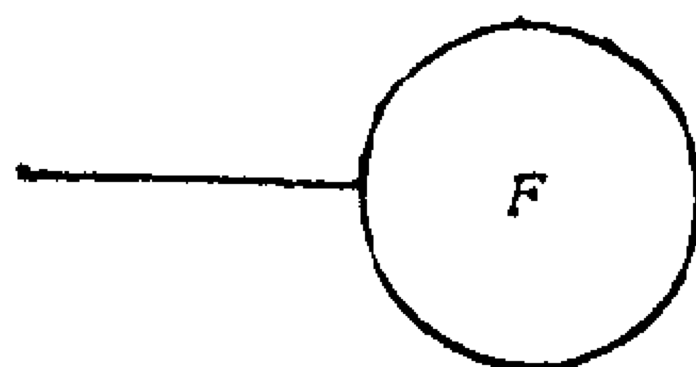
定理8·9 函数的黎曼积分是唯一的。

这是极限唯一性（定理2·1）的直接推论。

定义 称R_N内图形F是一正规的图形$\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，F具有划分$\Delta=\{F_1, F_2, \cdots F_n\}$，$\|\Delta\|<\varepsilon$且

$$V_N(F_i)>0, \qquad i=1, 2, \cdots, n.$$

注 与R_1中积分同样，若f在图形$F\subset R_N$上黎曼可积，改变f在体积为零的集之上的值，不影响f的可积性及积分值．图8·2所示R_2内F是一圆盘及伸出一线段．改变伸出线段上f的值不影响f的积分．这一图形是不正规的．我们使f的值在伸出线段上可以为无界的，也不影响f的可积性．对于正规图形仍有类似于定理5·10的定理．



F包含伸出的线段

图 8·2

定理8·10 设F是R_N内的正规图形。$f: F\to R_1$在F上黎曼可积，那么f在F上有界。

证明 设$L=\int_F fdV$.由可积定义，取$\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，使划分$\Delta=\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$在$\|\Delta\|<\delta$时，对$\forall x^i\in F_i$，

都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x^i)V(F_i)-L\right|\leqslant 1.$$

因此

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x^i)V(F_i)\right|\leqslant 1+|L|. \qquad (8\cdot 4)$$

设Δ是一个每一F_i都有$V(F_i)>0$ 的划分，$i=1,2,\cdots,n$。x^1是F_1中的点。由（8·4）式，有

$$|f(x^1)|V(F_1)\leqslant 1+|L|+\sum_{i=2}^{n}|f(x^i)|V(F_i),$$

或

$$|f(x^1)|\leqslant\frac{1}{V(F_1)}\left[1+|L|+\sum_{i=2}^{n}|f(x^i)|V(F_i)\right]. \qquad (8\cdot 5)$$

固定x^2，$x^3,\cdots,x^n$，让x^1在F_1中变化，（8·5）式表明f在F_1上有界。同理可证f在$F_i(i=2，3，\cdots，n)$上有界，从而f在F上有界。

定理8·11 设F是R_N内的正规图形，f：$F\leftarrow R_1$在f上黎曼可积，那么f在F上达布可积而且两种积分值相等。

定理的证明与定理5·11的证明相似，定理8·11的逆包含在下面的定理当中。

定理8·12 设F是R_N内的图形，且f是F上的实值有界函数。那么

(a) 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使当$\|\Delta\|<\delta$的划分Δ，都有

$$S^{+}(f, \Delta)<\overline{\int}_{F} f dV+\varepsilon, \quad S_{-}(f, \Delta)>\underline{\int}_{F} f dV-\varepsilon, \qquad (8\cdot6)$$

(b) 若f在F上达布可积，那么f在F上黎曼可积，并且两种积分值相等。

证明 注意到黎曼和介于$S_{-}(f, \Delta)$与$S^{+}(f, \Delta)$之间，因此当f达布可积，即$\overline{\int}_{F} f dV=\underline{\int}_{F} f dV$时，$f$黎曼可积，并且两种积分值相同。由此可见（b）是（a）的直接结果。

我们来证明（8·6）之第一不等式。后一不等式的证明类似可得。

由f在F上有界，$\exists M$，使对$\forall x\in F$，$|f(x)|<M$。设ε是给定正数，根据达布上积分定义，$\exists$划分$\Delta_0=\{F_1, F_2, \cdots, F_m\}$使

$$S^{+}(f, \Delta_0)<\overline{\int}_{F} f dV+\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8\cdot7)$$

以$F_i^{(0)}$表示F_i内点的集，对某些i，$F_i^{(0)}$可能为空集。对于每个非空的$F_i^{(0)}$选取含于$F_i^{(0)}$内的闭图形G_i，且满足

$$V(F_i-G_i)<\frac{\varepsilon}{4Mm}, \qquad i=1, 2, \cdots, m.$$

（图8·3是R_2内图形的示意图）。不难证明可选取$G_1, G_2,$

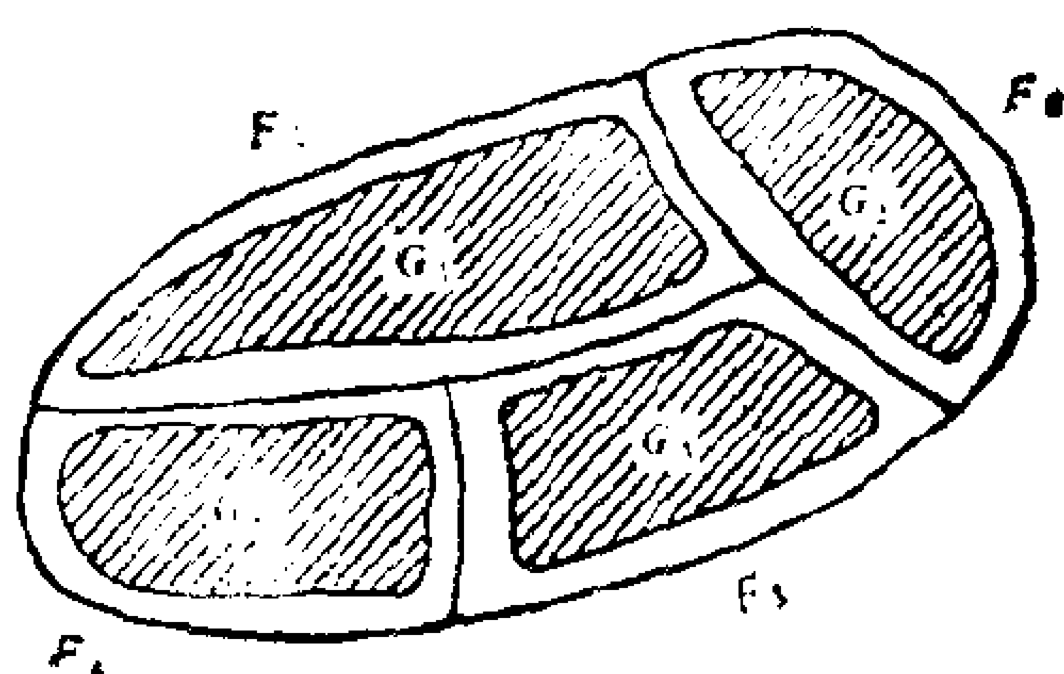


图 8·3

…，G_m为有界的。例如对充分小的网格，G_i取为 F_i 的闭的内超立方之并。

因为每个G_i是含于$F_i^{(0)}$内的有界闭集，G_i是紧集。由定理6·26，$\exists\delta>0$，对$\forall x\in G_i$，使球$B(x,\delta)\subset F_i^{(0)}$。现设$\Delta$是任意的$\|\Delta\|<\delta$的划分，证明对$\Delta$，(8·6) 的第一个不等式成立。

把Δ的子图形分成两类：J_1，J_2，…，J_n为包含某G_i点的子图形；K_1，K_2，…，K_q为某余的子图形。

以Δ'表示Δ与Δ^0的共同细分，由δ的选取方法，每一J_i整个地含于某一$F_K^{(0)}$之内。所以J_i是Δ'的子图形。Δ'其余的子图形为$K_i\cap F_j$，$i=1, 2, \cdots, q$；$j=1, 2, \cdots, m$。这样便有不等式

$$\sum_{K=1}^{q}V(K_k)<\sum_{i=1}^{m}V(F_i-G_i)<m\cdot\frac{\varepsilon}{4M\cdot m}=\frac{\varepsilon}{4M}.$$

引进记号

$$M_i=\sup_{x\in J_i}f(x),\quad M_i'=\sup_{x\in K_i}f(x),\quad M_{ij}=\sup_{x\in K_i\cap F_j}f(x)$$

由$S^+(f, \Delta)$及$S^+(f, \Delta')$定义：

$$S(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{n}M_iV(J_i)+\sum_{i=1}^{q}M_2'(K_i),$$

$$S^+(f,\Delta')=\sum_{i=1}^{n}M_iV(J_i)+\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}V(K_i\cap F_j).$$

显然

$$V(K_i)=\sum_{j=1}^{m}V(K_i\cap F_j).$$

由此

$$S^+(f,\Delta)-S^+(f,\Delta')$$

$$=\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}(M_i'-M_{ij})V(K_i\cap F_j)$$

$$\leqslant 2M\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{m}V(K_i\cap F_j)$$

$$\leqslant 2M\sum_{i=1}^{q}V(K_i)<\frac{\varepsilon}{2} \qquad (8\cdot8)$$

又据定理8·4的（b），有$S^+(f,\Delta')\leqslant S^+(f,\Delta_0)$.综合（8·7）与(8·8）便得

$$S^+(f,\Delta)<\overline{\int_F}fdV+\varepsilon,$$

这即（8·6）的第一个不等式.

下面定理是化多重积分为累次积分的基础.

定理8·13 设F是R_M内的图形，G是R_N内的图形．设f是定义在$F\times G$上的有界函数，那么

$$\overline{\int}_{F\times G} f dV_{M+N} \geqslant \overline{\int}_F \left[\overline{\int}_G f dV_N\right] dV_M;$$

$$\overline{\int}_{F\times G} f dV_{M+N} \geqslant \overline{\int}_G \left[\overline{\int}_F f dV_M\right] dV_N;$$

$$\underline{\int}_{F\times G} f dV_{M+N} \leqslant \underline{\int}_F \left[\underline{\int}_G f dV_N\right] dV_M;$$

$$\underline{\int}_{F\times G} f dV_{M+N} \leqslant \underline{\int}_F \left[\underline{\int}_G f dV_M\right] dV_N.$$

证明 各不等式的证明彼此类似，只证其中第一不等式。设$\varepsilon>0$是给定的，$\exists\,\delta>0$使当$F\times G$的划分Δ的$\|\Delta\|<\delta$，便有

$$S^+(f,\ \Delta) < \overline{\int}_{F\times G} f dV_{M+N} + \varepsilon. \tag{8·9}$$

现令$\{F_1,\ F_2,\ \cdots F_m\}$及$\{G_1,\ G_2,\ \cdots,\ G_n\}$分别是$F$及$G$的网孔小于$\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$的划分。那么由$F_i\times G_j$($i=1,2,\cdots,m$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)组成的$F\times G$的划分$\Delta$，其网孔小于$\delta$（参看定理 ·7）。

记 $M_{ij}=\sup\limits_{(x,y)\in F_i\times G_j} f(x,\ y)$，那么由定理8·7，

$$S^+(f,\ \Delta)=\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} M_{ij} V_{M+N}(F_i\times G_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} V_M(F_i) V_N(G_j).$$

又对$\forall x \in F_i$，都有

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} V_N(G_j) \geqslant \overline{\int}_G f(x, y) dV_N.$$

定义$M_i = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} V_N(G_j)$,便有

$$S^+(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{m} M_i V_M(F_i) \geqslant \overline{\int}_F \left[\overline{\int}_G f(x,y) dV_N\right] dV_M.$$

据此及（8•9）得

$$\overline{\int}_{F \times G} f dV_{M+N} + \varepsilon > \overline{\int}_F \left[\overline{\int}_G f(x,y) dV_N\right] dV_M.$$

由ε的任意性，便得

$$\overline{\int}_{F \times G} f dV_{M+N} \geqslant \overline{\int}_F \left[\overline{\int}_G f(x,y) dV_N\right] dV_M.$$

推论　设F是R_M的图形，对$\forall x \in F$有G_x是R_N的图形。定义$B = \{(x,y): x \in F, y \in G_x\}$，设$f: B \to R_1$在$B$上可积且对$\forall x \in F$，$f$在$G_x$上可积，那么

$$\varphi(x) = \int_{G_x} f(x,y) dV_N$$

在F上可积，并且

$$\int_B f(x,y)dV_{M+N}=\int_F\left[\int_{G_x} f(x,y)dV_N\right]dV_M.$$

注　图8·4是推论关于R_2内函数的具体说明. 设$B=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b, g(x)\leqslant y\leqslant h(x)\}, F=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}, Gx=\{y: g(x)\leqslant y\leqslant h(x), \forall x\in F\}$, 推论指出

$$\int_B f(x,y)dA=\int_a^b\left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right]dx.$$

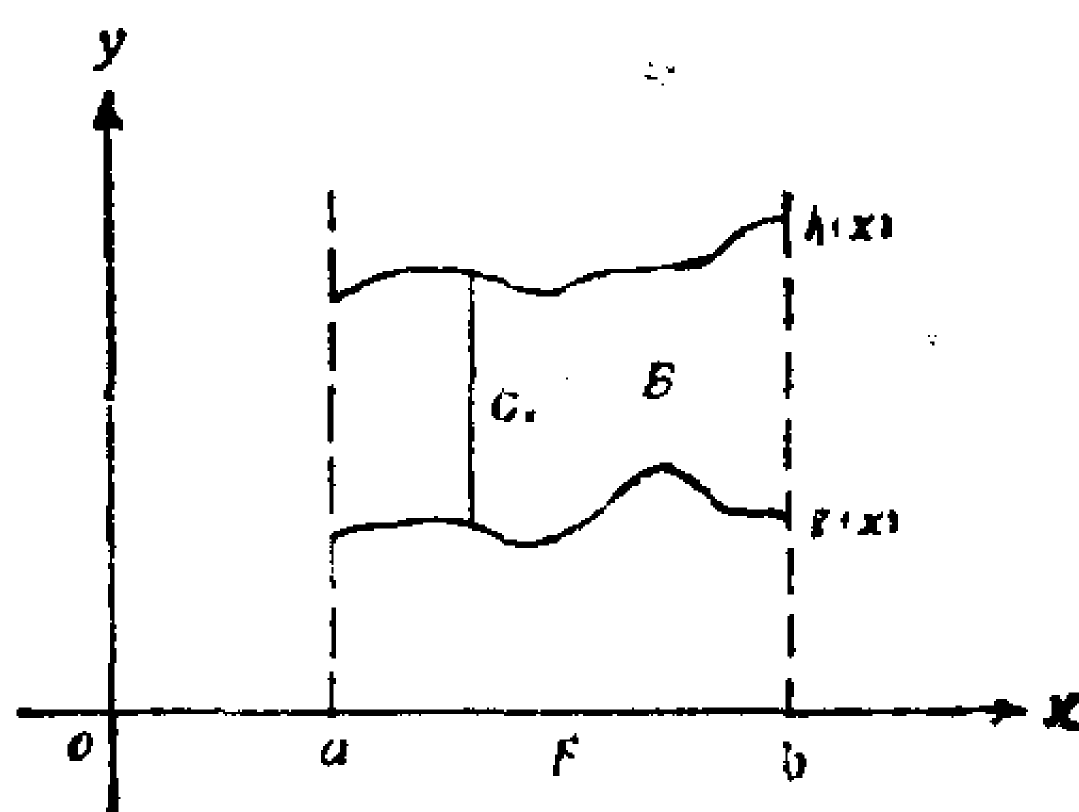


图　8·4

习　题

1. 证明R_N中函数的黎曼积分的唯一性（定理8·9）.
2. 证明两正规图形的并是正规的. 举例说明两正规图形的交、差不必是正规的.
3. 设F是R_N内的图形（$N\geqslant 2$），$f: F\to R_1$在F上黎曼可积. 证明f在F上可以是无界的（对照定理8·10）.
4. 设F是R_N内图形，f是定义在F上的非负、无界的函数. 定义

$$f_n=\begin{cases} f & \text{当 } |f|\leqslant n \\ 0 & \text{当 } |f|>n \end{cases}$$

且设对$\forall n$，f_n在F上可积，若$\lim\limits_{n\to\infty}\int_F f_n dV$存在，　定义

$$\int_F f dV=\lim_{n\to\infty}\int_F f_n dV.$$

现设$f(x,\ y)=\dfrac{1}{(x^2+y^2)^a}$，$F=\{(x,y):0\leqslant x^2+y^2\leqslant 1\}$，

证明：当$a<1$时，$\int_F fdV$存在；当$a\geqslant 1$时，$\int_F fdV$不存在。

5. 证明定理8·11：设F是R_N内正规图形，若f在L上黎曼可积则f在F上达布可积。

6. 设f定义于方形$S=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$上，

$$f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{当}x\text{是无理数} \\ 4y^3 & \text{当}x\text{是有理数。} \end{cases}$$

(a) 证明 $\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$存在且等于1。

(b) 证明 $\int_S f(x,y)dV$不存在。

7. 设方形$S=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$内的集$A$为

$A=\{(x,y):x,y$是有理数，且$x=\dfrac{p_1}{q_1}$，$y=\dfrac{p_2}{q_2}$时，

$q_1=q_2\}$，$f(x,y)=\begin{cases}0 & 当(x,y)\in A,\\ 1 & 当\ (x,y)\in(S-A).\end{cases}$

(a) 证明$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dy\right)dx$，$\int_0^1\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy$都存在且相等。

(b) 证明 $\int_S f(x,y)dV$不存在。

8. 写出定理8·13推论的证明。

§8·4 象集的体积及变量替换

对于单变量函数，形如$\int f(x)dx$ 的积分可通过“变量替换” $x=g(u)$，$dx=g'(u)du$化成 $\int f[g(u)]g'(u)\,du$，用以实际计算许多积分。对于多重积分相应的结果比较复杂，为了建立变量替换公式要用到一些线性代数的结果。我们假定读者熟悉矩阵及线性变换的基本知识。

定义 设G是R_n内的开集，$f:G\to\mathrm{R}_m$是C^1类的映象。即 $f=(f^1, f^2, \cdots, f^m)$，$f^i:G\to\mathrm{R}_1$是$C^1$类的函数，$i=1, 2, \cdots, m$. 称以$f^i_j$为第$i$行第$j$列元素的$m\times n$矩阵为

f的雅可比矩阵或梯度矩阵，以∇f表示之。

首先对f：$G\to R_m$的矢函数给出微分基本引理，链法则及反函数导数公式。

定理8·14 设G，G_1都是R_m内的开集，$\bar{x}\in G$，f：$G\to G_1$是C^1类矢函数。

(a) $$f^i(\bar{x}+h)-f^i(\bar{x})=\nabla f^i(x)h+\varepsilon^i(h)$$

$$=\sum_{j=1}^{m}f^i_{,j}h_j+\varepsilon^i(h),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m. \qquad (8\cdot10)$$

其中 $h=(h_1,h_2,\ \cdots,\ h_m)$，$\varepsilon(h)=(\varepsilon^1(h),\ \varepsilon^2(h)\cdots,\ \varepsilon^m(h))$，且

$$\lim_{|h|\to0}\frac{\varepsilon(h)}{|h|}=0.$$

(b) 设g_1：$G_1\to R_m$是C^1类矢函数，对$x\in G$定义$F(x)=g[f(x)]$，那么

$$\nabla F(x)=\nabla g[f(x)]\cdot\nabla f(x). \qquad (8\cdot11)$$

(c)设f是1—1的，在G上有$\det\nabla f(x)\neq0$。那么映象$f(G)=G_0$是开集，且$g_1=f^{-1}$在G_0上是1－1的C^1类矢函数，并有

$$\nabla g_1[f(x)]=[\nabla f(x)]^{-1},\qquad x\in G \qquad (8\cdot12)$$

或者

$$\nabla g_1(u)=(\nabla f[f^{-1}(u)])^{-1},\qquad u\in G_0.$$

证明 (*a*) 由定理7·2关于R_m内的函数的微分基本引理直接导出。

(*b*) 的(8·11)式由定理7·3关于偏导数的链法则得到。事实上∇F的每一分量由定理7·3写为

$$F^i_{;j}(x)=\sum_{k=1}^{m}g^i_{;k}[f(x)]f^k_{;j}(x),$$

这就是 (8·11)式。

(*c*) 因为 f是1－1的，f^{-1}显然是个函数。设$\overline{y}\in G_0$，这里$G_0=f(G)$，那么$\exists\,\overline{x}$，使$f(\overline{x})=\overline{y}$.因为$\det\nabla f(\overline{x})\neq 0$由反函数定理(定理7·18)，$\exists$正数$h$与$k$，使$B(\overline{x},k)\subset G$，对每一$y\in B(\overline{y},h)$，有唯一的$x\in B(\overline{x},K)$，使$f(x)=y$. 由序偶$(y,x)$的集所定义的函数$g_1(y)$是$B(\overline{y},h)$上的$C^1$类函数，且$g_1$的定义域包含了$B(\overline{y},h)$. 因此对$G_0$之任一点$\overline{y}$，$\exists\, B(\overline{y},h)\subset G_0$，即$G_0$是开集。

由$g_1[f(x)]=x$，及(8·11)式可得

$$\nabla x=\nabla g_1[f(x)]\cdot\nabla f(x)\quad 即$$

$$\nabla g_1[f(x)]=[\nabla f(x)]^{-1},\qquad x\in G.$$

或者

$$\nabla g_1(u)=[\nabla f[f^{-1}(u)])^{-1},\qquad u\in G_0$$

(8·12) 式成立。

本节的目的是证明如下的定理。

定理8.15（变量替换公式） 设 G 是 $\mathbf{R}_m$ 内的开集，$f: G\to\mathbf{R}_m$ 是1－1的 C^1 类矢函数，在 G 内 $\det\nabla f(x)\neq 0$，F 是 G 内的有界闭图形，而 $K: f(F)\to\mathbf{R}_1$ 是 $f(F)$ 上的连续函数。那么 $f(F)$ 是 $\mathbf{R}_m$ 中的图形；$K[f(x)]$ 在 F 上连续，且

$$\int_{f(F)} K(u)dV_m=\int_F K[f(x)]\cdot|J(x)|dV_m, \qquad (8\cdot 13)$$

其中 $J(x)=\det\nabla f(x)$。

证明这一定理的实质性步骤是把 f 化为一系列原始函数的复合，对原始函数定理8·15的结论是较为明显的。

定义 设 g 是 $\mathbf{R}_m$ 中开集 M 上到 $\mathbf{R}_m$ 的矢函数，$g=(g^1,g^2,\cdots g^m)$，如果对 $x\in M$，$x=(x_1,x_2,\cdots x_m)$，满足

$$g^j(x)=x_j \quad (j\neq j_0), \quad g^{j_0}(x)=\varphi(x),$$

这里 $\varphi(x)$ 是 M 到 $\mathbf{R}_1$ 的 C^1 类函数且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{j_0}}>0$。那么称 g 为原始函数。

注 直接计算可知 $\det\nabla g=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{j_0}}$。事实上由

$$\nabla g=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (\leftarrow\text{第 } j_0 \text{ 行})$$

这即得到 $\det\nabla g=\frac{\partial\varphi}{\partial x_{j_1}}$

定义 设$(i_1,i_2,\cdots,i_m)$是$(1,2,\cdots,m)$的置换.称$R_m\to R_m$的线性变换τ是简单的，如果

$$\tau(x_1,x_2,\cdots,x_m)=(\pm x_{i_1},\pm x_{i_2},\cdots\pm x_{i_m}).$$

由定义立即得到下面引理.

引理8·2 简单变换的积是简单的；简单变换的逆是简单的.

如果f_1,f_2都是$R_m\to R_m$的函数，f_2的值域含于f_1的定义域内，以$f_1\circ f_2$表示复合函数$f_1[f_2(x)]$.

下一引理给出分解$f:R_m\to R_m$为原始函数的复合函数的方法.

引理8·3 设G是R_m内的开集，$\overline{x}\in G$，$f:G\to R_m$是C^1类的函数，并且在G内$\nabla f(x)\neq 0$，那么$\exists$ G的包含$\overline{x}$的开子集G_1，f在G_1上可以分解成$(m+1)$个函数的复合函数

$$f=g_{m+1}\circ g_m\circ g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1, \tag{8·14}$$

其前m个函数$g_1,g_2,\cdots g_m$都是原始函数，g_i定义于R_m内的开集G_i内，$g_i:G_i\to G_{i+1}$，$g_i=(g_i^1,g_i^2,\cdots g_i^m)$且

$$g_i^j(x_1,x_2,\cdots,x_m)=x_j,\ (j\neq i\text{时；}\ g_i^i(x_1,x_2\cdots x_m)$$
$$=\varphi^i(x_1,\cdots x_m), \tag{8·15}$$

函数φ^i由f确定，φ^i在G_i上有$\varphi^i_i>0$。最后的g_{m+1}是简单变换.

证明 由$\nabla f(\overline{x})$是非奇异矩阵，$\exists$简单变换τ使$\nabla(\tau\circ f)$

的主子式在$\bar{x}$点都为正。以f_0表示$\tau\circ f$，$f_0=(f_0^1, f_0^2, \cdots, f_0^m)$。如下定义$m$个函数$h_1, h_2, \cdots, h_m$：

$$h_i=(f_0^1, f_0^2, \cdots, f_0^i, x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots x_m),$$
$$h_m=f_0. \qquad i=1, 2, \cdots, m-1$$

容易计算出$\det\nabla h_i(\bar{x})$恰好是∇f_0的一个主子式，因此$\nabla h_i(\bar{x})$是非奇异的矩阵，且$\det\nabla h_i(\bar{x})>0$。根据定理8·14的（c）及$h_i$的定义，对$\forall_i$，$\exists$一开集$H_i$，在$H_i$上有$\det\nabla h_i(x)>0$，$h_i$是从$H_i$到一开集的1－1映象。定义

$$G_1=H_1\cap H_2\cap\cdots\cap H_m,$$
$$G_{i+1}=h_i(G_i), \qquad i=1,2,\cdots,m.$$

下面限制$h_1, h_2, \cdots, h_m$的定义于G_1上。并定义

$$g_1=h_1, \quad g_i=h_i\cdot h_{i-1}^{-1}, \qquad i=2,3,\cdots,m. \quad (8\cdot16)$$

为定义g_{m+1}，来考察τ^{-1}，它与τ同样是简单变换，于G_{m+1}上定义

$$g_{m+1}=\tau^{-1}.$$

注意到每一g_i是从G_i到G_{i+1}的1－1映象，在G_i上$\det\nabla g_i(x)\neq0$。并且

$$g_{m+1}\circ g_m\circ\cdots g_2\circ g_1$$
$$=\tau^{-1}\circ h_m\circ h_{m-1}^{-1}\circ h_{m-1}\circ h_{m-2}^{-1}\circ\cdots\circ h_2\circ h_1^{-1}\circ h_1$$
$$=\tau^{-1}\circ h_m=\tau^{-1}\circ\tau\circ f=f.$$

因此要证明(8·14)式成立，还要证明每一g_i是(8·15)所给的形式。因为

$$g_1=h_1=(f_0^1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m),$$

显然g_1符合（8·15）的要求。而$g_2=h_2\circ h_1^{-1}$，且由$h_1^{-1}=(f_0^{-1},\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$，$h_2=(f_0^1,\ f_0^2,\ x_3,\ \cdots,\ x_m)$，可见

$$g_2=(x_1,\ f_0^2,\ x_3,\ \cdots,\ x_m).$$

同样地，对$\forall i$，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ m$，

$$g_i=(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ f_0^i,\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_m).$$

由∇f_0的所有主子式为正，可知$f_{0;i}^i>0$，由矢h_i，g_i的定义有$\varphi_{;i}^i=f_{0;i}^i>0$。

按引理8·3我们能把C^1的函数f。表示为简单变换与m个原始函数的复合。为了证明定理8·15，下一步于引理8·5来建立关于原始函数的替换定理。为此要用到引理8·4所述的简单结果。

引理8·4 设G是R_m的一个集，$\varphi: G\to R_1$为有界函数。若存在正数ε，使$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant\varepsilon$对$G$内的任何$x,y$成立。那么$M-m\leqslant\varepsilon$成立，其中$M=\sup\limits_{x\in G}\varphi(x)$，$m=\inf\limits_{x\in G}\varphi(x)$。

引理8·4留给读者去证明。

引理8·5 设G是R_m内的开集，$f: G\to R_m$是C^1类的1-1的原始函数：记$f=(u^1,u^2,\cdots,u^m)$，k为1与m之间的固定整数，$x=(x_1,x_2,\cdots x_m)$，当$i\neq k$时$u^i(x)=x_i$，$u^k=f^k(x)$，且在G上$f_{;k}^k(x)>0$。

(a) 若$F\subset G$，F是有界的图形，那么集$f(F)$也是R_m内

的图形。

(b) 若令$G_1=f(G)$且设$K: G_1\to \mathbf{R}_1$在G_1上一致连续，那么有如下变量替换公式成立：

$$\int_F K[f(x)]\,|J(x)|\,dx=\int_{f(F)} K(u)du, \qquad (8\cdot17)$$

其中$J(x)=\det\nabla f(x)$。

证明 (a)设G内的一闭长方格$R=\{x: a_i\leqslant x_i\leqslant b_i,\ x\in\mathbf{R}_m\}$.那么$f(R)=S$，$S$为$u=(u^1,\ u^2,\ \cdots u^m)$的如下的集：

$$a_i\leqslant u^i\leqslant b_i, \qquad i\neq k,$$

$$f^K(x_1,\cdots x_{K-1},\ a_K,\ x_{K+1},\ \cdots x_m)$$

$$\leqslant u^K\leqslant f^K(x_1,\ \cdots,x_{K-1},b_K,x_{K+1},\cdots x_m).$$

应用定理8·13的推论，S是$\mathbf{R}_m$内的图形且它的体积$V(S)=V[f(R)]$,计算：

$$V(S)=\int_{a_K'}^{b_K'}\Big[f^K(x_1,\cdots x_{K-1},b_K,x_{K+1},\cdots x_m)$$

$$-f^K(x_1,\cdots,x_{K-1},a_K,x_{K+1},\cdots,x_m)\Big]dx_1$$

$$\cdots dx_{K-1}dx_{K+1}\cdots dx_m,$$

$a_K'=(a_1,\cdots a_{K-1},a_{K+1},\ \cdots a_m)$，$b_K'=(b_1,\ b_{K-1},\ b_{K+1},\ \cdots b_m)$，上述积分是$m-1$维的。由微积分基本定理（定理

5·8），上面被积函数可以写成

$$\int_{a_K}^{b_K} f^K_{;K}\, dx_K.$$

于是

$$V(s)=\int_R f^K_{;K}(x)\,dV_m,$$

其中V_m是R_m中的体积元素。由f是原始函数，容易算出$|J(x)|=f^K_{;K}(x)$，因此得到

$$V[f(R)]=\int_R |J(x)|\,dV_m.$$

这样，当F是闭长方格R时，（a）被证明。现设F是$\overline{F}\subset G$的一个图形。对$\forall$自然数n，划分R_m为边长是2^{-n}的超立方的n阶格，以F_n^-表示含于F内的全体内超立方的并，以F_n^+表示全体内及边界超立方的并。由$\overline{F}$是有界闭集因而是紧的，据定理6·26 $\exists\,\rho>0$，使$\overline{F}$与G的边界距离$\geqslant\rho$。当n充分大，$F_n^+\subset G$，因为F_n^+的任两个超立方不含有公共内点，因此

$$V[f(F_n^+)]=\int_{F_n^+}|J(x)|\,dV,$$

同理，也有

$$V[f(F_n^-)]=\int_{F_n^-}|J(x)|\,dV.$$

分别以$V^-[f(F)]$、$V^+[f(F)]$表示$f(F)$的内、外体积，据定理8·2，有

$$\int_{F_n^-}|J(x)|\,dV=V[f(F_n^-)]\leqslant V^-[f(F)]$$

$$\leqslant V^+[f(F)]\leqslant V[f(F_n^+)]=\int_{F_n^+}|J(x)|\,dV. \qquad (8\cdot 18)$$

因为f是C^1类函数，函数$|J(x)|$对充分大的n，在F_n^+上一致连续。以M表示$|J(x)|$在F_n^+上的上界。那么

$$\int_{F-F_n^-}|J(x)|\,dV\leqslant M\cdot V(F-F_n^-),$$

$$\int_{F_n^+-F}|J(x)|\,dV\leqslant M\cdot V(F_n^+-F).$$

既然F是图形，当$n\to\infty$，上述两积分趋向于零。把这一结果应用于（8·18），便得

$$V^+[f(F)]=V^-[f(F)],$$

所以$f(F)$是图形，且

$$V[f(F)]=\int_F|J(x)|\,dV.$$

这里我们附带证明了(8·17)在$K(x)\equiv 1$的特殊情况下成立。

（b）设F是一图形且$\overline{F}\subset G$。因为f与$|J|$在$\overline{F}$上连续，且由$\overline{F}$是有界闭集它是紧的，所以f与$|J|$在$\overline{F}$上一致连续。

按照假设K在G_1上一致连续，所以$K[f(x)]|J(x)|$在$\overline{F}$上一致连续，因此$K[f(x)]|J(x)|$在F上可积。我们将以黎曼积分和来逼近（8·17）式两端的积分，当划分充分细时，两个积分和能任意地逼近，这样来证明公式（8·17）成立。

现对$\forall\varepsilon>0$，$\Delta=\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$是$F$的划分，选取$\xi_i\in F_i$ （$i=1, 2, \cdots n$），由可积性，$\exists\delta>0$，当$\|\Delta\|<\delta$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}K[f(\xi_i)]|J(\xi_i)|V(F_i)\right.$$

$$\left.-\int_F K[f(x)]|J(x)|dV_m\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (8\cdot19)$$

同样地，$\Delta_1=\{F_1', F_2', \cdots, F_n'\}$是$f(F)$的划分，$\|\Delta\|_1<\eta$，$\xi_i'\in F_i'(i=1, 2, \cdots, n)$，那么对充分小的$\eta$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}K(\xi_i')V_m(F_i')-\int_{f(F)}K(u)dV_m\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (8\cdot20)$$

记$M=\sup\limits_{u\in f(F)}|K(u)|$．由$f$及$|J|$在$F$上一致连续，我们能选取$\delta$如此之小，使当$|x'-x''|<\delta$时有

$$|f(x')-f(x'')|<\eta,$$

$$\big||J(x')|-|J(x'')|\big|<\frac{\varepsilon}{3MV_m(F)}. \qquad (8\cdot21)$$

现在假定δ还使（8·19）成立，不然可取δ更小些．选取

$\xi_i'=f(\xi_i)$及$F_i'=f(F_i)$ $i=1,2,\cdots,n$，那么 $\Delta_1=\{F_1',F_2',\cdots,F_n'\}$是$f(F)$的划分，由(8·21)之第一个不等式，有$\|\Delta_1\|<\eta$。这样（8·20）式成立。以下分别记$m_i=\inf\limits_{x\in F_i}|J(x)|$，$M_i=\sup\limits_{x\in F_i}|J(x)|$，那么从（$a$）的证明与积分中值定理导出

$$V_m(F_i')=\int_{F_i}|J(x)|\,dV_m=|J_i|\,V_m(F_i),\quad (8\cdot 22)$$

这里$|J_i|$是满足$m_i\leqslant|J_i|\leqslant M_i$的一个数。我们也有$m_i\leqslant|J(\xi_i)|\leqslant M_i$，再据引理8·4及（8·21）之第二个不等式，可得

$$\Big|\,|J_i|-|J(\xi_i)|\,\Big|\leqslant M_i-m_i$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3MV_m(F_j)}. \quad (8\cdot 23)$$

估计两黎曼积分和的差：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}K(\xi_i')\,V_m(F_i')-\sum_{i=1}^{n}K[f(\xi_i)]\,|J(\xi_i)|\,V_m(F_i)\right|, \quad (8\cdot 24)$$

用（8·22）及$\xi_i'=f(\xi_i)$，（8·24）等于

$$\left|\sum_{i=1}^{n}K(\xi_i')\,[\,|J_i|-|J(\xi_i)|\,]\,V_m(F_i)\right|.$$

将（8·23）代入，得到

$$\left|\sum_{i=1}^{n} K(\xi_i{}')V_m(F_i{}')\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{n} K[f(\xi_i)]\,|J(\xi_i)|\,V_m(F_i)\right|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{8·25}$$

综合（8·19），（8·20）及（8·25）便有

$$\left|\int_K K[f(x)]\,|J(x)|\,dV_m\right.$$

$$\left.-\int_{f(F)} K(u)dV_m\right|<\varepsilon.$$

由ε的任意性，所以公式（8·17）成立。

引理8·6 设$f: G\to G_1$是简单变换，那么引理8·5的结论成立。

证明 由f是简单变换，它把G内的长方格映象为G_1内的长方格（只可能方格的棱次序不同）．由f是简单变换，它的$|J(x)|=1$，且对G内任意两点x'，x''有

$$|f(x')-f(x'')|=|x'-x''|.$$

其他的细节可由读者完成。

引理8·3证明了f可表示成简单变换与原始函数的复合，引理8·5，及引理8·6建立了原始函数及简单变换的变量替换公式。现在综合这几个引理给出定理8·15的证明。

定理8·15（变量替换公式） 证明如下：

证明　$\forall x_0\in G$，由引理8·3，$\exists$开集$G_1\subset G$，$x_0\in G_1$，于G_1上，$f=g_{m+1}\circ g_m\circ g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1$，$g_i$为原始函数或简单变换，引理8·5，引理8·6建立了每个g_i的变量替换公式。

设F是G_1内的有界闭图形，K在$f(F)$上连续。集$f(F)=g_{m+1}\circ g_m\circ\cdots\circ g_1(F)$。应用引理8·6于简单变换$g_{m+1}$，可知$g_m\circ g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1(F)$是图形，定义这图形上的函数

$$K_1(u)=K[g_{m+1}(u)]\,|\det\nabla g_{m+1}(u)|.$$

那么K_1在$g_m\circ g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1(F)$上连续，且有

$$\int_{f(F)}K(u)dV_m=\int_{g_{m+1}\circ g_m\circ\cdots\circ g_1(F)}K(u)dV_m$$

$$=\int_{g_m\circ\cdots\circ g_1(F)}K_1(u)dV_m. \tag{8·26}$$

再应用引理8·5于g_m，定义图形$g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1(F)$上的函数

$$K_2(u)=K_1[g_m(u)]\,|\det\nabla g_m(u)|,$$

注意到$K_2(u)$在$g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1(F)$上连续，由引理8·5，有

$$\int_{f(F)}K(u)\,dV_m=\int_{g_m\circ\cdots\circ g_1(F)}K_1(u)dV_m$$

$$=\int_{g_{m-1}\circ\cdots\circ g_1(F)}K_2(u)dV_m.$$

由代入，得

$$K_2(u)=K_1[g_m(u)]\,|\det\nabla g_m(u)|$$

$$= K[g_{m+1}(g_m(u))]\,|\det\nabla g_{m+1}[g_m(u)]\,|\det\nabla g_m(u)|.$$

令$h_2(u) = g_{m+1}\circ g_m(u)$，上面等式成为

$$K_2(u) = K[h_2(u)]\,|\det\nabla h_2(u)|,$$

这里应用了行列式乘积的链法则．继续上述步骤，定义

$$h_p(u) = g_{m+1}\circ g_m\circ\cdots\circ g_{m-p+2}(u), \qquad p = 2,3,\cdots,m+1,$$

且$K_p(u) = K[h_p(u)]\cdot|\det\nabla h_p(u)|$．得出等式

$$\int_{g_{m+1}\circ\cdots\circ g_1(F)} K(u)dV_m$$

$$= \int_{g_1(F)} K[h_m(u)]\cdot|\det\nabla h_m(u)|\,dV_m$$

$$= \int_F K[h_{m+1}(u)]\,|\det\nabla h_{m+1}(u)|\,dV_m$$

$$= \int_F K[f(u)]\,|\det\nabla f(u)|\,dV_m.$$

这是对G_1内的图形F所要求证明的结果．

为了完成证明，设F是G内的任一有界闭图形，K在G上连续．由勒贝格定理（定理6·27），∃正数ρ，使中心为F的点x的球$B(x,\rho)$都位于某开集$G_1\subset G$之内．划分F为图形$F_1, F_2, \cdots, F_s$，使每一F_i含于唯一的球$B(x,\rho)$之内．对$i=1, 2, \cdots, s$，都有

$$\int_{f(F_i)} K(u)dV_m = \int_{F_i} K[f(x)]\,|\det\nabla f(x)|\,dV_m.$$

对i求和便得

$$\int_{f(F)} K(u)dV_m = \int_F K[f(x)]\,|\det\nabla f(x)|\,dV_m.$$

例 计算$\int_F x_1 dV_2(x)$， F是曲线$x_1=-x_2^2$，$x_1=2x_2-x_2^2$，$x_1=2-2x_2-x_2^2$所围的区域（图8·5(*a*)）.

用定理8·15，引进新变量(u_1, u_2)定义

$$f: x_1 = u_1 - \frac{1}{4}(u_1+u_2)^2, \quad x_2 = \frac{1}{2}(u_1+u_2) \tag{8·27}$$

解 由图8·5（*b*）所示的G是F在（u_1，u_2）平面上的象.从（8·27）解出u_1，u_2:

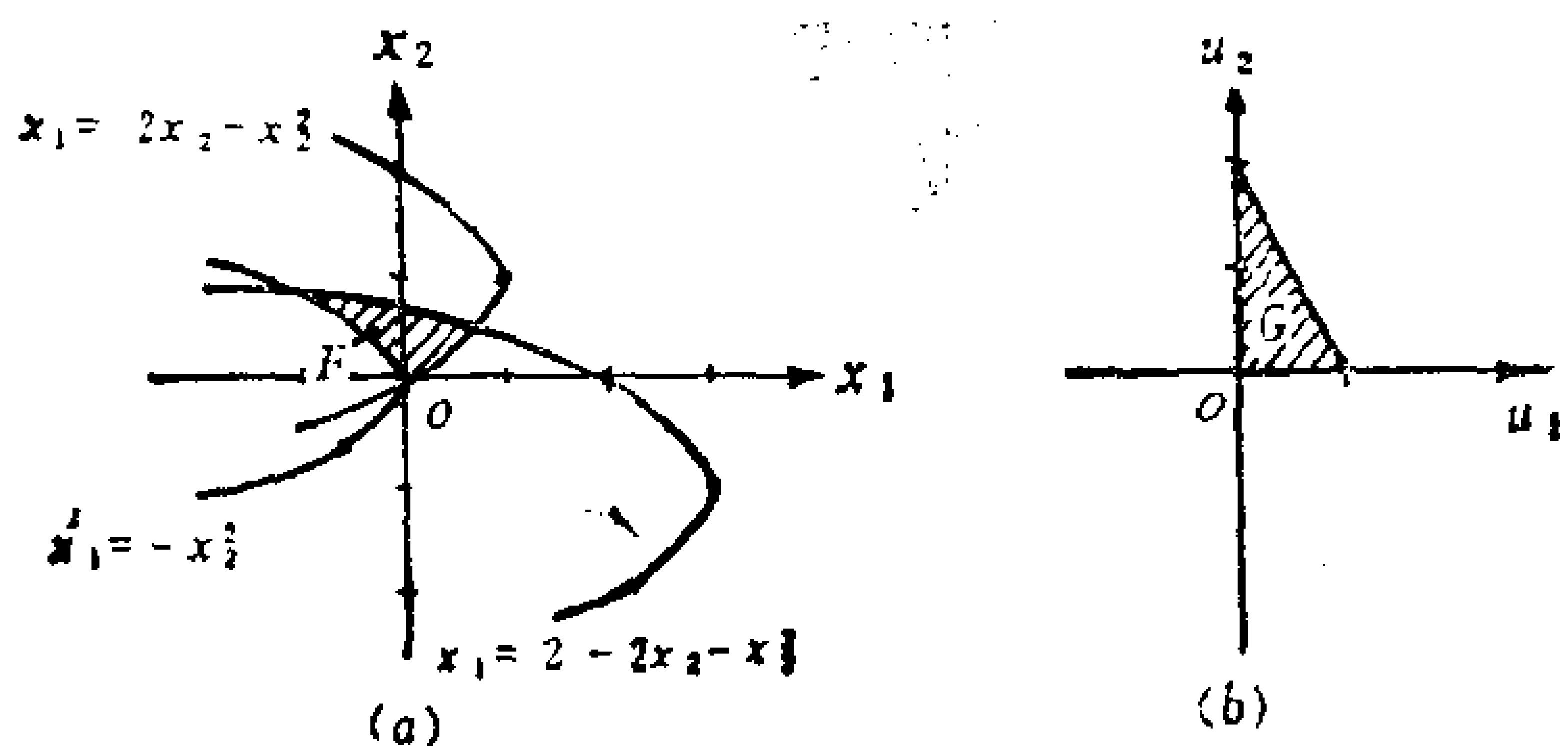


图 8·5

$$u_1 = x_1 + x_2^2, \quad u_2 = -x_1 + 2x - x_2^2,$$

可见f是$R_2 \to R_2$的1－1的变换，G的边界曲线为:

$$u_1=0, \quad u_2=0, \quad 2u_1+u_2=2.$$

f的雅可比行列式

$$\det\nabla f=\begin{vmatrix}1-\frac{1}{2}(u_1+u_2) & -\frac{1}{2}(u_1+u_2)\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}。$$

那么

$$\int_F x_1 dV_2(x)=\int_G\left[u_1-\frac{1}{4}(u_1+u_2)^2\right]\frac{1}{2}dV_2(u)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^{2-u_1}(u_1-\frac{1}{4}(u_1+u_2)^2)du_2\right]du_1$$

$$=\frac{1}{48}.$$

习　题

习题1—6，计算$\int_F K(x_1,x_2)dV_2(x)$，F的边界曲线方程已给定，按所指出的新变量u_1，u_2进行积分。求出所给变换的逆变换，画出F在$(u_1,\ u_2)$平面上的相应的区域。

1．$K(x_1,\ x_2)=x_1\cdot x_2$。F的边界为$x_2=3x_1$，$x_1=3x_2$及$x_1+x_2=4$。映象$x_1=3u_1+u_2$，$x_2=u_1+3u_2$。

2．$K(x_1,\ x_2)=x_1-x_2^2$。F的边界为$x_2=2$，$x_1=x_2^2-x_2$，$x_1=2x_2+x_2^2$。映象$x_1=2u_1-u_2+(u_1+u_2)^2$，$x_2=u_1+u_2$。

3．$K(x_1,\ x_2)=x_2$。F的边界为$x_1+x_2-x_2^2=0$，$2x_1+x_2$

$-2x_2^2=1$，$x_1-x_2^2=0$。映象$x_1=u_1-u_2+(u_1-2u_2)^2$，$x_2=u_1+2u_2$。

4．$K(x_1,x_2)=(x_1^2+x_2^2)^{-3}$，$F$的边界为$x_1^2+x_2^2=2x_1$，$x_1^2+x_2^2=4x_1$，$x_1^2+x_2^2=2x_2$，$x_1^2+x_2^2=6x_2$，映象

$$x_1=\frac{u_1}{(u_1+u_2)^2},\qquad x_2=\frac{u_2}{(u_1+u_2)^2}.$$

5．$K(x_1,x_2)=4x_1x_2$，F的边界为$x_1=x_2$，$x_1=-x_2$，

$(x_1+x_2)^2+x_1-x_2-1=0$。映象$x_1=\dfrac{1}{2}(u_1+u_2)$，

$x_2=\dfrac{1}{2}(-u_1+u_2)$，且设$x_1+x_2>0$。

6．$K(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2$。F是在第一象限由$x_1^2-x_2^2=1$，$x_1^2-x_2^2=2$，$x_1x_2=1$，$x_1x_2=2$所围的区域。其逆映象

$u_1=x_1^2-{}_2^2$，$u_2=2x_1x_2$。

7．证明引理8·4。

8．完成引理8·6的证明

9．通过球坐标变换：$x_1=\rho\cos\varphi\sin\theta$，$x_2=\rho\sin\varphi\sin\theta$，

$x_3=\rho\cos\theta$，计算积分$\int_F x_3dF$，这里F是由不等式

$$x_1^2+x_2^2\leqslant x_3^2,\quad x_1^2+x_2^2+{}_3^2\leqslant 1,\quad x_3\geqslant 0$$

所确定的区域。

第九章 无穷序列与无穷级数

§9·1 基础的定理

通常用式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,\ 或\sum_{n=1}^{\infty}u_n \tag{9·1}$$

表示无穷级数。u_n称为级数的项，而

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

称为级数的部分和。当级数收敛时，(9·1) 还表示级数的和。为了避免这种不确切性，以序偶来定义级数。

定义 两无穷序列的序偶$(\{u_n\},\{S_n\})$，当$\{S_n\}$之每一$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$时，称为无穷级数。u_n称为级数的项，S_n称为级数的部分和。若当$n\to\infty$，S_n收敛于数S，称级数是收敛的，它的和是S。若当$n\to\infty$，S_n不趋向于极限，称级数发散。级数被它的项组成的序列$\{u_n\}$唯一确定。

尽管上述定义在逻辑上是完善的，但在表示形式上较之习惯表示的 (9·1) 要麻烦。因此，在能够看出$\sum_{n=1}^{\infty}u$表示的是级数或是它的和的通常情况下，仍采用习惯的记法。

定理9·1 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$。

证明 对$\forall n>1$，有$u_n = S_n - S_{n-1}$.若以S表示级数的和，那么当$n\to\infty$时，$S_n\to S$，$S_{n-1}\to S$。因此，当$n\to\infty$时，$u_n\to S - S = 0$。

注 定理9·1给出级数收敛的必要条件，下面定理9·5推论表明，$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$不保证级数收敛。

设给定级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

那么去掉它的有限项可以得到新的级数，显然新级数收敛$\Longleftrightarrow$原级数收敛。

定理9·2 设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$是给定的级数且C是一非零的常数。

(a) 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$，$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$都是收敛的。且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(b) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，那么 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 是发散的。

证明 对$\forall$自然数n，有

$$\sum_{K=1}^{n}(u_K \pm V_K)=\sum_{K=1}^{n}u_K \pm \sum_{K=1}^{n}V_K,$$

$$\sum_{K=1}^{n}Cu_K = C\sum_{K=1}^{n}u_K.$$

由极限定理(§2·5)立即得出 (a) .为了证明 (b)，只要注意到：若 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 收敛，那么由(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{C}\right)(Cu_n)$，即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

级数

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

称为以r为公比的几何级数或等比级数。

定理9·3 $a\neq 0$的几何级数，当$|r|<1$时收敛；当$|r|\geqslant 1$时发散。在收敛情况下

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}.$$

证明 容易验证

$$S_n=a+ar+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

若 $|r|<1$，当 $n\to\infty$，$r^n\to 0$（参看§2·5．习题6）．因此

$S_n\to\dfrac{a}{1-r}$．若 $|r|\geqslant 1$，那么 $u_n\not\to 0$，由定理9·1级数发散．

定理9·4（比较判别法）　设 $u_n\geqslant 0$，$n=1, 2, \cdots$．

（a）若对 $\forall n$，都有 $a_n\geqslant u_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{收敛且} \sum_{n=1}^{\infty}u_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

（b）若对 $\forall_n$ 都有 $0\leqslant a_n\leqslant u_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，那么 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$

发散．

证明留给读者（习题11与习题12）．

设 f 在 $[a, \infty)$ 上连续．定义

$$\int_a^{\infty}f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{9·2}$$

当(9·2)右端极限存在时称积分为无限区间上的瑕积分收敛；否则称瑕积分发散．

定理9·5（积分判别法）　设 f 为 $[1,\infty)$ 上连续、非负、

不增的函数，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的项 $u_n=f(n)$，　那么

(*a*) 如果$\int_1^{\infty} f(x)dx$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。

(*b*) 如果$\int_1^{\infty} f(x)dx$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

证明 因为f是非负且不增的，对$n \geqslant 2$ 有

$$\sum_{j=2}^{n} u_j \leqslant \int_1^n f(x)dx \leqslant \sum_{j=1}^{n-1} u_j.$$

直观地如图（9·1）所示。定义

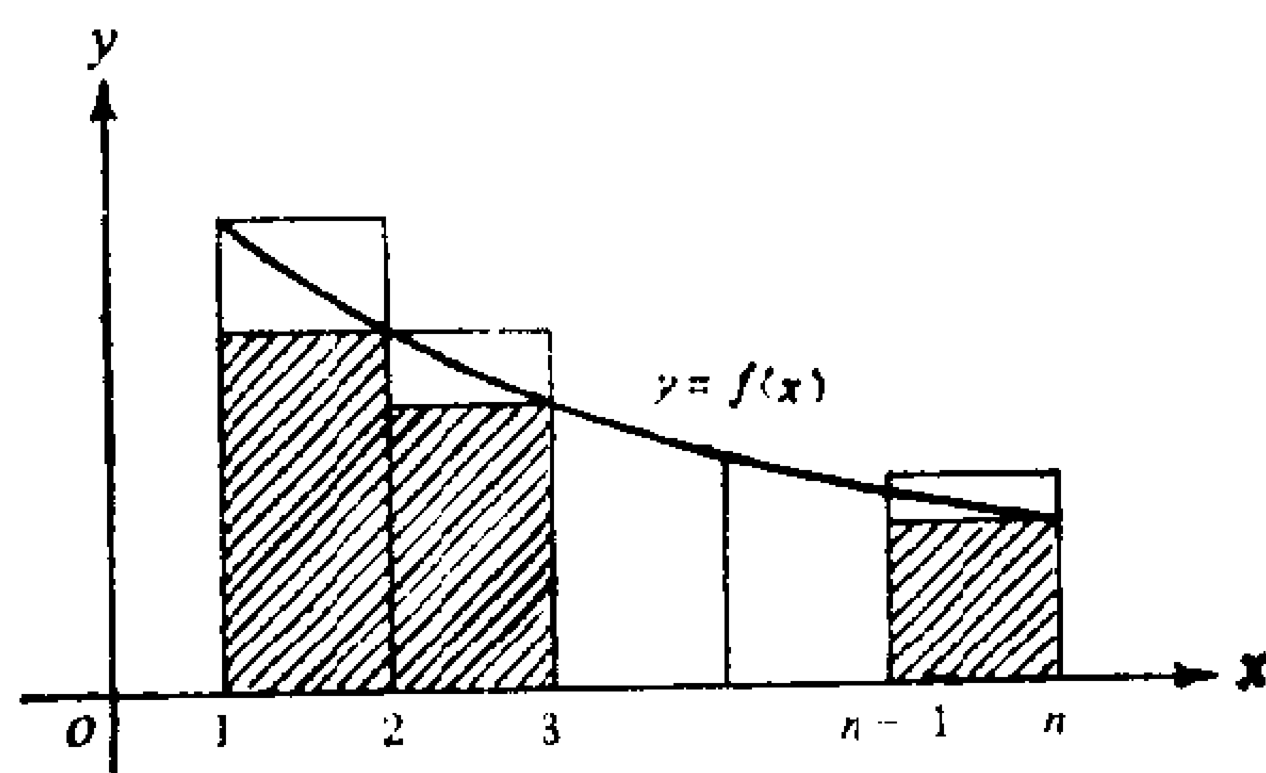


图 9·1

$$F(x) = \int_1^x f(x)dx.$$

当$\int_1^{\infty} f(x)dx$收敛时，那么$F(x)$这一不减函数，当$x \to \infty$时

$F(x)$趋向于极限，因此$F(n)$是不减的有界序列。

而$S_n=\sum_{j=2}^{n}u_j$，且有$S_n\leqslant F(n)$，因而S_n趋向于极限。于是(a)被证明。当积分$\int_1^{\infty}f(x)dx$发散，即$x\to\infty$，$F(x)\to+\infty$。所以$F(n)\to+\infty$。而由$F(n)\leqslant\sum_{j=1}^{n-1}u_j$，可以断定级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

定理9·5的推论　p—级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当$p>1$时收敛；当$p\leqslant 1$时发散。

取定理9·5中的$f(x)=\frac{1}{x^p}$立即得出推论。其细节留给读者。对于$0<p\leqslant 1$，虽然p级数的项u_n，在$n\to\infty$时$u_n=\frac{1}{n^p}\to 0$，但级数是发散的。这就表明定理9·1的逆是不成立的。可见由$u_n\to 0$不能断定$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的收敛性。

例　判别下面级数敛散性。

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\log(n+2)}$$

解　定义

$$f(x)=\frac{1}{(x+2)\log(x+2)},$$

注意f是正的不增的连续函数，$f(n)=\dfrac{1}{(n+2)\log(n+2)}$，

有

$$\int_1^a \frac{dx}{(x+2)\log(x+2)}=\int_3^{a+2}\frac{du}{u\log u}$$

$$=\int_3^{a+2}\frac{d\log u}{\log u}=\log[\log(a+2)]-\log[\log 3]$$

当$a\to\infty$时$\log[\log(a+2)]\to+\infty$，瑕积分发散，从而所给级数发散。

习　题

习题1—10，判别给定级数敛散性。

1．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n_3}}$；　　2．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$；

3．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+2)}$；　　4．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$

5．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$；　　6．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n+3}$；

7．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{n^3}$；　　8．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\log n}{n^{\frac{3}{2}}}$；

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$；　　　　10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{n!}$； p为正常数。

11. 证明定理9·4 (a) 〔提示：应用实数连续性公理〕

12. 证明定理9·4 (b)．

13. p取哪些值时$\sum_{n=1}^{\infty}\log n/n^p$收敛？

14. p取哪些值时$\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^p/n$收敛？

15. 证明定理9·5的推论。

§9·2　一般项级数，幂级数

当级数的每一项是非负的，比较判别法是判别级数敛散性的常用的有效工具。这一判别法也能应用于某些既有正项也有负项的所谓一般项级数。

定义　如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。

如果$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛而$\sum_{n=1}^{\infty}|n_n|$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$称为条件收敛。

定理9·6　若$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| .$$

证明 对$\forall n$，定义

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} .$$

那么有

$$u_n = v_n - w_n, \quad |u_n| = v_n + wu_n .$$

$$0 \leqslant v_n \leqslant |u_n|, \quad 0 \leqslant w_n \leqslant |u_n| .$$

由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} w_n$都收敛。因而$\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛。且

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (v_n + w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| .$$

注　条件收敛级数不能绝对收敛.下面定理证明$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$收敛，而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$是$p=1$的$p$—级数它是发散的.因此$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$是条件收敛

的.

定理9·7（交错级数定理） 设u_n满足条件：

（i）u_n正负交错；

（ii）对$\forall n$，$|u_{n+1}|<|u_n|$；

（iii）$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$。

那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。若以$S$表示它的和，那么对$\forall n$，$S$介于$S_n$与$S_{n+1}$之间。

证明 不妨设u_1为正，否则可从u_2开始，放弃一项并不影响收敛性。由（i），对$\forall n$，

$$u_{2n-1}>0,\ u_{2n}<0.$$

如下写出

$$S_{2n}=(u_1+u_2)+(u_3+u_4)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n}).$$

由（ii），对$\forall k$，$|u_{2K}|<u_{2K-1}$，每一括弧的项是正的，因而S_{2n}随n递增。另一方面

$$S_{2n}=u_1+(u_2+u_3)+\cdots+(u_{2n-2}+u_{2n-1})+u_{2n}$$

括弧的项及u_{2n}都小于零，因此对$\forall n$，$S_{2n}<u_1$。S_{2n}是有界、递增序列，它收敛于数S，且$S_{2n}<S$.注意到$S_{2n-1}=S_{2n}-u_{2n}>S_{2n}$，特别对$\forall n$，$S_{2n-1}>S_2$.这表明$S_{2n-1}$是有下界的。此外

$$S_{2n+1}=S_{2n-1}+(u_{2n}+u_{2n+1})<S_{2n-1},$$

S_{2n-1}还是递减的。当$n\to\infty$，S_{2n-1}有极限。由（iii），$u_{2n}\to 0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n-1}+u_{2n})=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}{}_{2n-1}=S$.

S_{2n-1}是递减的，因此$S_{2n-1}<S$。于是当p为奇数，$S_p\geqslant S$；当p为偶数，$S_p\leqslant S$。

下一定理对于判别级数是否绝对收敛很有用。

定理9·8（比值判别法） 设$u_n\neq 0$，$n=1, 2, \cdots$，且当$n\to\infty$时

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\rho, \text{ 那 } \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to+\infty.$$

那么

（i）若$\rho<1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛。

（ii）若$\rho>1$或$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to+\infty$，级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

（iii）若$\rho=1$，不能给出肯定结论。

证明 （i）设$\rho<1$，并选取ρ'，满足$\rho<\rho'<1$。由

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho$，$\exists N$，使当$n\geqslant N$便有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<\rho', \text{ 即 } |u_{n+1}|<\rho'|u_n|.$$

因此

$$|u_n|<\rho'|u_{n-1}|<(\rho')^2|u_{n-2}|<\cdots<(\rho')^{n-N}|u_N|.$$

把$\sum_{n=N}^{\infty}|u_n|$与几何级数$\sum_{n=0}^{\infty}(\rho')^n$相比较可知$\sum_{n=N}^{\infty}|u_n|$收敛，

因而$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛。

(ii) 若$\rho>1$，或$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to+\infty$，那么$\exists N$，使当$n\geqslant N$有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1,\ \text{即}\ |u_n|>|u_N|.$$

这样，当$n\to\infty$，u_n不能趋向于零。由定理9·1级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

(iii) p—级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，不论$p$取什么值都有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left(\frac{n+1}{n}\right)^p\to1,\qquad(n\to\infty).$$

这个例子说明$\rho=1$情况下，比值判别法失效。

形如

$$C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+\cdots+C_n(x-a)^n+\cdots,$$

的级数称为幂级数，这里a，C_i $(i=0,1,2,\cdots)$是常数。若x取定一个值，那么上面级数成为数项级数，可以考察它的敛散性。对$\mathbf{R}_1$中一切使幂级数收敛的x的值，让相应地级数的和与x相对应，便定义了一个函数$f: x\to\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$。

后面我们将要证明基本的初等函数，如三角函数，对数函数与指数函数等都是幂级数定义的函数。不仅如此，幂级数将被用来定义和研究许多的非初等的函数。

引理9·1 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，那么∃正数M，使对$\forall n$，有$|u_n|<M$成立。

定理9·9 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-a)^n$对$x=x_1$，$x_1\neq a$收敛，那么级数对所有满足$|x-a|<|x_1-a|$的$x$，绝对收敛。并且∃正数$M$，对满足$|x-a|<|x_1-a|$的$x$与一切$n$，有

$$|C_n(x-a)^n|\leqslant M\left(\frac{|x-a|}{|x_1-a|}\right)^n \qquad (9\cdot3)$$

证明 由引理9·1，∃M，使对$\forall n$，有

$$|C_n(x_1-a)^n|\leqslant M$$

又因为

$$|C_n(x-a)^n| = |C_n(x_1-a)^n|\cdot\frac{|(x-a)^n|}{|(x_1-a)^n|}$$

$$\leqslant M\left(\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|\right)^n,$$

(9·3) 式被证明。由$\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|<1$，几何级数$\sum_{n=0}^{\infty} M$

$\left(\left|\frac{x-a}{x_1-a}\right|\right)^n$收敛，由比较判别法$\sum_{n=0}^{\infty}|C_n(x-a)^n|$收敛。

定理9·10 设$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$是给定的幂级数，那么

（i）级数仅在$x=a$点收敛；

（ii）级数对一切x值收敛；

（iii）存在R，级数对$|x-a|<R$收敛，对$|x-a|>R$发散。

（i），（ii），（iii）有且仅有之一的情况出现。

证明 存在简单的例说明（i）或（ii）的情况可能出现.为了证明（iii），设$\exists x_1\neq a$，级数在$x=x_1$点收敛，也$\exists x_2$，级数在$x=x_2$点发散。定义

$$S=\{\rho：级数对|x-a|<\rho收敛\}，$$

由定理9·9，$|x_1-a|<|x_2-a|$且$|x_1-a|\in S$，$|x_2-a|$为S的上界，记$R=\sup S$.设$|x'-a|<R$，那么$\exists\rho\in S$使$|x'-a|<\rho<R$.仍由定理9·9，级数在$x=x'$收敛。于是幂级数对$|x-a|<R$收敛。现设$|x''-a|=\rho'>R$.若级数对x''收敛，那么$\rho'\in S$,这与$R=\sup S$相矛盾。因此，幂级数在x''点发散。

例 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{2^n n^2}$，求使它收敛的$x$的值。

解 应用比值判别法，

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{1}{2}|x-1|\frac{n^2}{(n+1)^2},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{1}{2}|x-1|\right|.$$

因此当$\frac{1}{2}|x-1|<1$，即$-1<x<3$时级数收敛。而对于$\frac{1}{2}|x-1|=1$，也即$x=-1$与$x=3$，级数的各项的绝对值构成一个$p=2$的p-级数，它是收敛的。于是所给幂级数收敛的x值满足$-1\leqslant x\leqslant 3$，而在其他的x值处级数发散。

习　题

判断习题1—12各个级数的敛散性。当级数收敛时确定它是绝对收敛还是条件收敛。

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(10)^n}{n!}$，　　2．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{(10)^n}$，

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{n^2+1}$，　　4．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\left(n-\frac{1}{2}\right)}$，

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^n}{n^4}$，　　6．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n!}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}$，

7．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{\sqrt[n]{n}}$，　　8．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\cdot4\cdot6\cdots2n}{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}$，

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n^2-3n+2)}{n^3}$,

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\log(n+1)}$,

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\log(n+1)}{n+1}$,

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\log n}{n^2}$.

习题13—20，求各幂级数收敛的x值。

13. $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[n]{n}}$,

15. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n x^n}{n+1}$,

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}(x+2)^n$,

17. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1\cdot3\cdots(2n-1)}(x-3)^n$,

18. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n^2+2n+1)}{2^n(n+1)^3}x^n$,

19. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n+1)2^n}{n+1}(x+1)^n$,

20. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\log n)2^{n}}{3^{n} n^{2}} x^{n}$.

21. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项收敛级数，证明对 $\forall p>1$，

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^p$ 收敛。

22. 求二项式展开的级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^{n} \quad (m\text{是常数})$$

的收敛区间。

23.* 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是满足定理9·7的条件收敛级数。设 A 是任一实数。证明交换级数的项之后能使新级数的和是 $(A-1, A+1)$ 中的一个数。

24. 证明引理9·1.

25. 举出定理9·10之情况（i）、（ii）的实例。

§9·3 一致收敛性

设 $\{f_n\}$ 的每一 f_n 都是定义域包含区间 $I\subset\mathbf{R}_1$ 的函数。对于 $\forall x\in I$ 可以研究 $\{f_n(x)\}$ 这一数列的收敛性。一致收敛性的概念是一个有关在 I 上每个点都收敛的序列 $\{f_n(x)\}$

的收敛性质的概念。这一概念在数学分析里有许多的应用，特别有意义的是如定理9·12指出的：设f_n在I上连续，若$\{f_n\}$一致收敛时，那么f_n的极限也是连续函数。

定义 称$\{f_n\}$在I上一致收敛于函数$f \Longleftrightarrow$对$\forall \varepsilon>0$。$\exists$与x无关的N，使当$n>N$时，$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，对一切$x\in I$成立。 (9·4)

一致收敛性与通常在每一点收敛性的区别在于整数N不依赖于x，即对I中一切x有共同的N。一致收敛性的几何意义如图9·2所示，若ε是某一正数，当$n>N$，$y=f_n(x)$的图象整个地介于$f(x)-\varepsilon$与$f(x)+\varepsilon$之间。

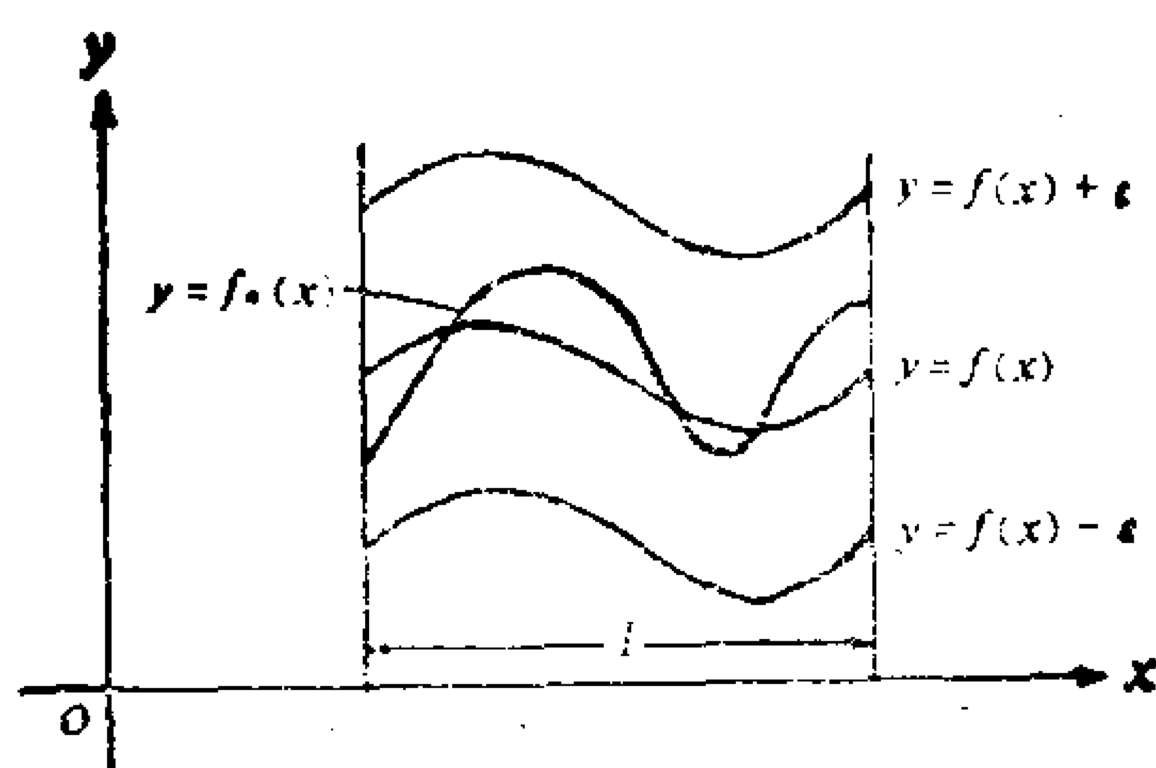


图 9·2

序列$\{f_n(x)\}$在I的每一点x都收敛于$f(x)$，而不一致收敛的例子如：

$$f_n: x \to \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad n=1, 2, \cdots,$$

$$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

$n=1, 2, 3, 4$的f_n的图形如图9·3所示。f_n可写为

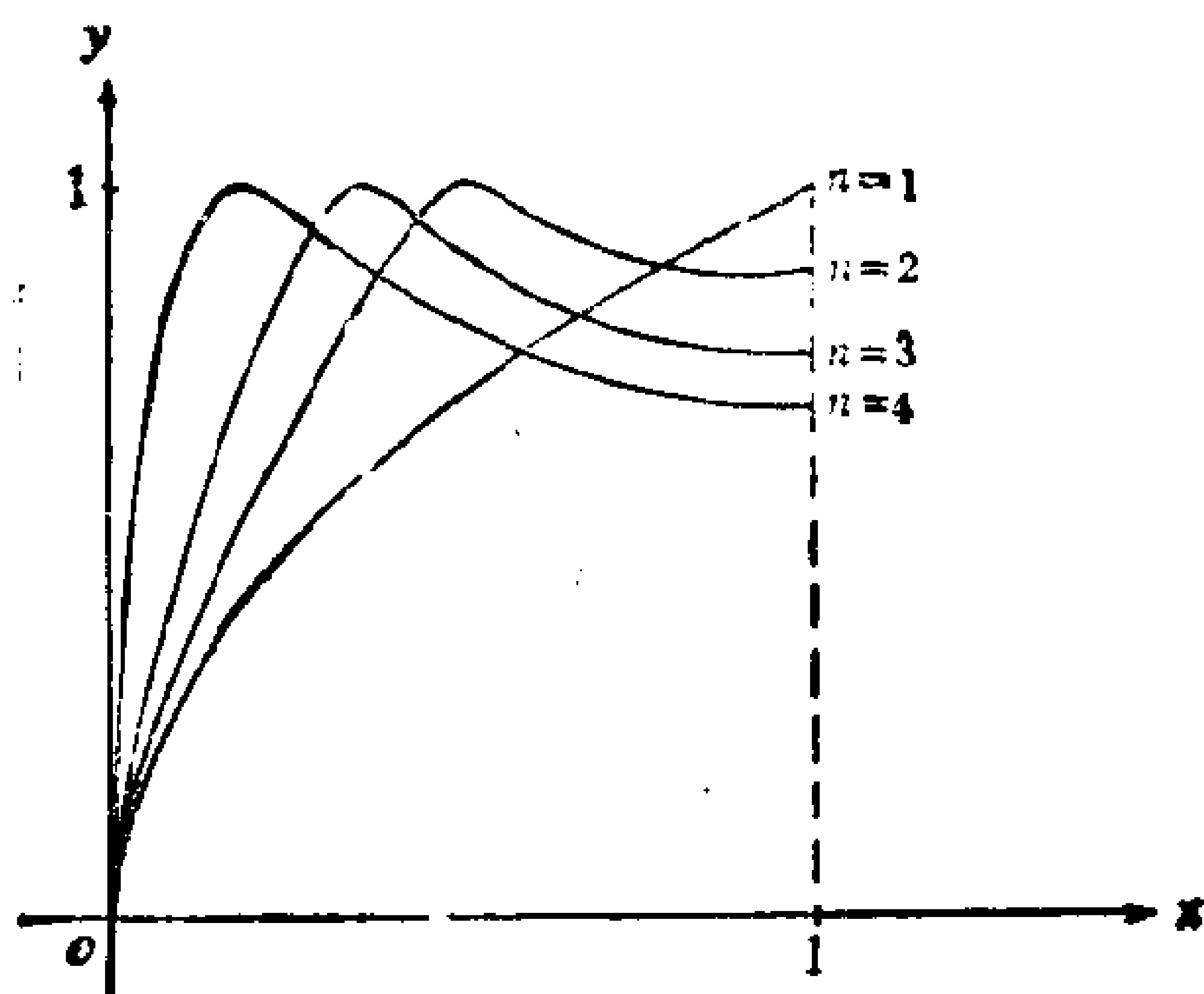


图 9·3

$$f_n(x)=\frac{\frac{2x}{n}}{x^2+\frac{1}{n^2}},$$

注意到$\forall x>0$，$f_n(x)\to 0(n\to\infty)$。当$x=0$，对$\forall n, f_n(0)=0$。因此$\forall x\in I$，$f(x)\equiv 0$，即对$\forall x\in I$，当$n\to\infty$时，$f_n(x)\to f(x)$。

$f_n(x)$在$x=\frac{1}{n}$点，取最大值$f\left(\frac{1}{n}\right)=1$（可由$f_n(x)$仅有临界点$x=\frac{1}{n}$断定$x\frac{1}{n}$为$f_n(x)$的最大值点）。若取$0<\varepsilon<1$，便不存在使当$n>N$有（9·4）成立的$N$；这是因为$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{1}{n}\right)\right|=1$对每一$n$都成立。

用定义判定给出的函数序列是否一致收敛往往是困难的，下一定理给出一致收敛性常用的简单的准则。

定理9·11 设$f_n(n=1, 2, \cdots)$及f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，那么$f_n$在$I$上一致收敛于$f \Longleftrightarrow$当$n\to\infty$时，

$$\varepsilon_n=\max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\to 0.$$

证明 (a) 首先假定收敛是一致的。那么对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$，对I中所有x都有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.因为$|f_n(x)-f(x)|$在$I$上连续，它在$I$的点$x_n$达到最大值$\varepsilon_n=|f_n(x_n)-f(x_n)|$.当然应当有$\varepsilon_n<\varepsilon$，对一切$n>N$成立。由$\varepsilon$的任意性，按极限定义，当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$.

(b) 假定当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$.那么对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使当$n>N$有$\varepsilon_n<\varepsilon$.由$\varepsilon_n=\max\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$，有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon_n<\varepsilon$$

对I中所有x成立，由定义f_n一致收敛于f.

例 设$f_n: x\to\dfrac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^2x^2}$，$x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$，

$n=1, 2, \cdots$.

证明对$\forall x\in I$，$f_n(x)\to 0(n\to\infty)$，并判定f_n是否一致收敛。

解 因为$f_n(0)=0$，对一切n成立，显然$f_n(0)\to 0$ $(n\to\infty)$.对于$x>0$，把f_n写成

$$f_n(x)=\frac{xn^{-\frac{1}{2}}}{x^2+\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$$

可知当$n\to\infty$，$f_n(x)\to 0$。$f_n(x)$的导数

$$f_n'(x)=\frac{n^{\frac{3}{2}}(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2},$$

当$x=\frac{1}{n}$时，且$f_n'\left(\frac{1}{n}\right)=0$，且$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}$为$f_n$最

大值。因此当$n\to\infty$，$\varepsilon_n=\frac{1}{2}n^{\frac{1}{2}}$不趋向于零，由定理

9·11，f_n不一致收敛。

定理9·11仅在f可知的情况下才能应用。

关于一致收敛性的重要作用可从下面的定理看到。

定理9·12 假设f_n，$n=1,2,\cdots$，在区间I上连续，且在I上一致收敛于f，那么f在I上连续。

证明 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使当$n>N$对I中所有x，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (9\cdot 5)$$

令x_0表示I的任一固定点，因f_{N+1}在I上连续，$\exists\delta>0$，使I中满足$|x-x_0|<\delta$的x有

$$|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (9\cdot 6)$$

由(9·5)与(9·6)，当$|x-x_0|<\delta$有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant|f(x)-f_{N+1}(x)|$$

$$+|f_{N+1}(x)-f_{N+1}(x_0)|+|f_{N+1}(x_0)-f(x_0)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

由连续性定义，f在$x_0\in I$连续。由x_0任意性，f在I上连续。

定理9·13（一致收敛序列的积分） 设序列f_n，$n=1$，2，…，在有界的区间I上连续且一致收敛于f，$c\in I$，并定义

$$F_n(x)=\int_c^x f_n(t)dt,\quad x\in I.$$

那么f在I上连续且$F_n(x)$在I上一致收敛于

$$F(x)=\int_c^x f(t)dt$$

证明 由定理9·12，f在I上连续。令I的长为L，对$\forall\varepsilon>0$，由f_n一致收敛于f，所以$\exists N$，使当$n>N$，对I中所有x有

$$|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{L}.$$

因此

$$|F_n(x)-F(x)|=\left|\int_c^x[f_n(t)-f(t)]dt\right|$$

$$\leqslant\left|\int_c^x|f_n(t)-f(t)|dt\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{L}|x-c|\leqslant\varepsilon,$$

当$n>N$对于I中所有x成立。即$F_n(x)$在I上一致收敛于$F(x)$。

定理9·14 设$\{f_n\}$的每一f_n在有界开区间I内具有连续导数，$f_n(x)$对$\forall x\in I$收敛于$f(x)$，f_n'在I上一致收敛于g。那么g在I上连续并且对$\forall x\in I$有

$$f'(x)=g(x)。$$

证明 由定理9·12可知g在I上连续。设c是I的任一点。对$\forall n$，及$\forall x\in I$，有

$$\int_c^x f_n'(t)\,dt=f_n(x)-f_n(c)。$$

因为$\{f_n'\}$一致收敛于g且$f_n(x)$收敛于$f(x)$，应用定理9·33得

$$\int_c^x g(t)\,dt=f(x)-f(c)。\qquad(9·7)$$

对(9·7)求导数便得

$$f'(x)=g(x),\qquad x\in I。$$

关于R_1内的实值函数序列的上述结果，有些可直接推广到定义在距离空间S的集A上的实值函数。

定义 设A是距离空间S内的集，$f_n: S\to R_1$，$n=1, 2, \cdots$，是函数序列。称$\{f_n\}$在A上一致收敛于函数$f: A\to R_1 \Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使$n>N$及一切$x\in A$，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

下一定理是定理9·12的推广。

定理9·15 设f_n是距离空间S上的实值函数，且f_n在S的集A上连续，若$\{f_n\}$在A上一致收敛于f，那么f在A上连续。

其证明与定理9·12的证明相似，留作习题。

定理9·13与9·14能推广到定义在N—维欧几里得空间的实值函数。

定理9·16 设F是R_N内的闭图形，$f_n: F\to R_1$，$n=1, 2, \cdots$，是在F上连续且一致收敛于f，那么f在F上连续且

$$\int_F f dV_N=\lim_{n\to\infty}\int_F f_n dV_N.$$

其证明与定理9·13的证明相似，留作习题。

定理9·17 设K是满足$1\leqslant K\leqslant N$的一整数，G是R_N内的开集，$f_n: G\to R_1$，f_n及$f_{n;K}$在G上连续，如果对$\forall x\in G$，$\{f_n(x)\}$收敛于$f(x)$且$\{f_{n;K}\}$在G上一致收敛于函数g，那么g在G上连续，且

$$f_{,K}(x)=g(x),\qquad x\in G.$$

其证明可仿照定理9·14作出，也留作习题。

连续函数序列$\{f_n\}$于每一点收敛于连续函数，可能$\int_F f_n dV$不趋向于$\int_F f dV$。举例如下：定义

$$f_n:\to\begin{cases} n^2x, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ -n^2x+2n, & \dfrac{1}{n}\leqslant x\leqslant\dfrac{2}{n},\\ 0, & \dfrac{2}{n}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

其图象如图9·4所示，容易看出对$x\in I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$ $f_n(x)\to f(x)\equiv 0$，但是，

$$\int_0^1 f_n(x)dx=1\nrightarrow\int_0^1 f(n)dx=0.$$

定理9·15、9·16、9·17能够进一步推广为定义域属于距离空间(S_1,d_1)，值域属于(S_2,d_2)的函数序列（参看习题19）。

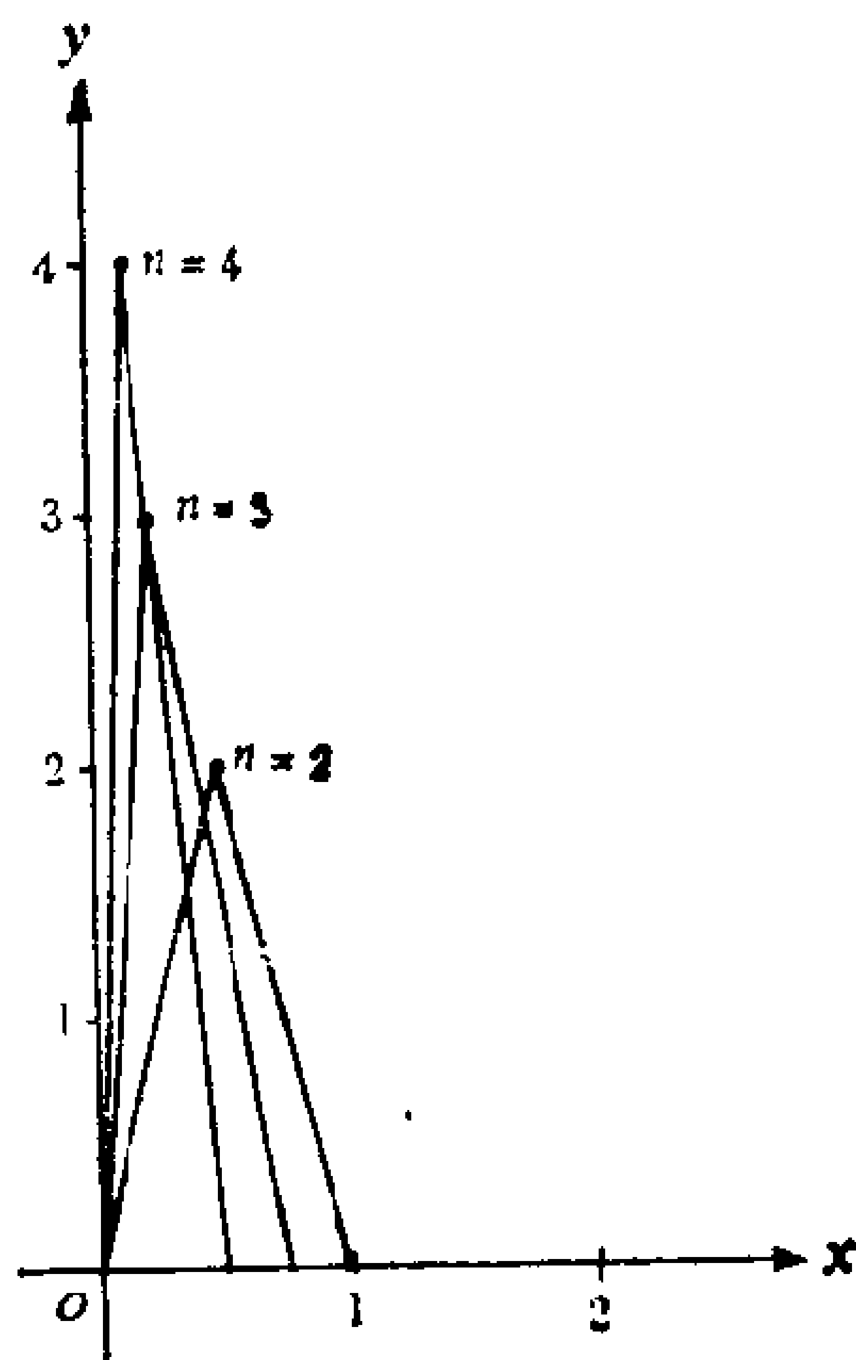


图 9·4

习　　题

习题1—10，证明$\{f_n(x)\}$收敛于$f(x)$ $(x\in I)$，并判定f_n是否在I上一致收敛于f。

1. $f_n: x\to\dfrac{2n}{1+nx}$，　$f(x)\equiv 0$，　$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$.

2. $f_n: x\to\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$，　$f(x)\equiv 0$，　$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$.

3. $f_n: x\to\dfrac{n^3x}{1+n^4x}$，　$f(x)\equiv 0$，　$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$.

4. $f_n: x\to\dfrac{n^3x}{1+n^4x^2}$，　$f(x)\equiv 0$，　$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$.

5. $f_n: x\to\dfrac{nx^2}{1+nx}$，　$f(x)=x$，　$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$.

6. $f_n: x \to \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{n} + \cos\left(\frac{1}{nx}\right)$, $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$,

$I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 2\}$.

7. $f_n: x \to \frac{\sin nx}{2nx}$, $f(x) \equiv 0$, $I = \{x: 0 < x < \infty\}$.

8. $f_n: x \to n^{\frac{1}{2}}x(1-x)$, $f(x) \equiv 0$, $I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

9. $f_n: x \to \frac{1-x}{1-x}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

$I = \{-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\}$.

10. $f_n: x \to nxe^{-nx^2}$, $f(x) \equiv 0$, $I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.

11. 证明序列$f_n: x \to x^n$，对$\forall x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$收敛但不一致收敛。

12. 设$f_n(x) = (n+2)(n+1)x(1-x)$及$f(x) \equiv 0$，$x \in I = \{x: 0 \leqslant x \leqslant 1\}$.证明当$n \to \infty$，$f_n(x) \to f(x)$，对$\forall x \in I$成立。判定是否有$\int_0^1 f_n(x)dx \to \int_0^1 f(x)dx \quad (n \to \infty)$？

13. 证明定理9·15。

14. 证明定理9·16。

15. 证明定理9·17。

*16. 举出一定义在集$A = \{(x, y): 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$上

的函数序列$\{f_n\}$，$\{f_n\}$在A的每一点收敛于f，但

$$\int_A f_n(x,y)dV \nrightarrow \int_A f(x,y)dV.$$

17．设$\{f_n\}$与$\{g_n\}$在距离空间的集A上分别一致收敛于f与g，证明$\{f_n+g_n\}$在A上一致收敛于$f+g$。

18．(a)设$\{f_n\}$，$\{g_n\}$于距离空间的集A上一致有界(∃M，使对一切n，及$x\in A$，有$|f_n(x)|<M$.)且分别一致收敛于f与g，证明$\{f_n\cdot g_n\}$在A上一致收敛于fg。

(b)举出$\{f_n\}$，$\{g_n\}$都一致收敛而$\{f_ng_n\}$不一致收敛的例子。

19．设f_n为由距离空间(S_1,d_1)到另一距离空间(S_2,d_2)的函数，$n=1,2,\cdots$．若$\{f_n\}$的每个f_n在$A\subset S_1$上连续，且f_n在A上一致收敛于f，那么f在A上连续。

*20．证明定理9·16的如下推广．设F是R_N内的图形且$f_n: F\to R_1$是在F上可积的函数，$n=1,2,\cdots$．当f_n在F上一致收敛于f，那么f在F上可积且

$$\int_F f dV_N=\lim_{n\to\infty}\int_F f_n dV_N.$$

〔提示：首先证明f的可积性。〕

§9·4 级数的一致收敛性，幂级数的一致收敛性

设$u_K(x)(K=1,2,\cdots)$是定义在距离空间S的集A上的

实值函数。

定义 设无穷级数 $\sum_{K=1}^{\infty} u_K(x)$ 的部分和为 $S_n(x)$，$S_n(x)=\sum_{K=1}^{n} u_K(x)$，称级数在集 A 上一致收敛于一函数 $S \Longleftrightarrow$ 部分和序列 $\{S_n\}$ 在 A 上一致收敛于 S。

上述定义表明级数 $\sum_{K=1}^{\infty} u_K(x)$ 的一致收敛性归结为它的部分和序列的一致收敛性。由部分和序列的有关定理得到关于级数的相应定理。

定理9·18（定理9·2的级数形式） 设 u_n，$n=1,2,\cdots$，在距离空间的集 A 上连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 A 上一致收敛于 $S(x)$，那么 $S(x)$ 在 A 上连续。

下一定理是定理9·13对级数形式的推广。

定理9·19（无穷级数的逐项积分） (a) 设 $u_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$ 是定义在 R_1 的区间 I 上的实值函数。设 u_n 在 I 上可积，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$。那么 S 在 I 上可积。若 $c \in I$，定义 U_n 及 S 为

$$U_n(x)=\int_c^x u_n(t)\,dt, \qquad S(x)=\int_c^x S(t)\,dt,$$

那么 $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$。

(b) 设$u_n(x)$，$n=1, 2, \cdots$，是定义在R_N的图形 F上的实值函数，$u_n(x)$在F上可积且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$F$上一致收敛于$S(x)$。那么$S(x)$在$F$上可积并且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_F u_n dV_N=\int_F SdV_N.$$

本定理的（b）与§9·3的习题20相联系。

定理9·20（无穷级数逐项微分） 设K是$1\leqslant K\leqslant N$的一整数，u_n及$u_{n;K}$($n=1, 2,\cdots$)是在R_N内的开集G上定义的实值连续函数，对$\forall x\in G$，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛于$S(x)$，而$\sum_{n=1}^{\infty}u_{n;K}(x)$在$G$上一致收敛于$t(x)$。那么对$x\in G$，有

$$S_{,K}(x)=t(x).$$

定理9·18，9·19，9·20与相应的关于序列的定理的证明是相似的。

下一定理给出一致收敛的有用的间接判别法，可应用于级数的和未知的情况。

定理9·21（外尔斯特拉斯M—判别法） 设u_n，$n=1,2,\cdots$是定义在距离空间的集A上的实值函数。若对$\forall n$，及A中所有点x，$|u_n(x)|<M_n$，而且常数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}M_n$收敛。那么$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$及$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$在$A$上一致收敛。

证明 据比较判别法(定理9·4),对$\forall x\in A$, $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$是收敛的。令

$$t_n(x)=\sum_{K=1}^{n}|u_K(x)| \text{ 及 } t(x)=\sum_{K=1}^{\infty}|u_K(x)|.$$

由定理9·6导出$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$收敛。令

$$S_n(x)=\sum_{K=1}^{n}u_K(x) \text{ 及 } S(x)=\sum_{K=1}^{\infty}u_K(x).$$

那么

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\sum_{K=n+1}^{\infty}u_K(x)\right|$$

$$\leqslant\sum_{K=n+1}^{\infty}|u_K(x)|=|t(x)-t_n(x)|$$

$$\leqslant\sum_{K=n+1}^{\infty}M_K.$$

由$\sum_{K=1}^{\infty}M_K$收敛,当$n\to\infty$, $\sum_{K=n+1}^{\infty}M_K\to 0$与$x$无关,我们断定$S_n(x)$一致收敛于$S(x)$。

下面关于幂级数一致收敛的定理是M—判别法的直接推论。

定理9·22 设级数$\sum_{n=1}^{\infty} C_n(x-a)^n$在$x=x_1, x_1 \neq a$收敛，那么级数在$I=\{x: a-h \leqslant x \leqslant a+h\}$区间上级数一致收敛，这里$h<|x_1-a|$，并且$\exists M$，使

$$|C_n(x-a)^n| \leqslant M \cdot \left(\frac{h}{|x_1-a|}\right)^n \qquad (9\cdot8)$$

对 $|x-a| \leqslant h < |x_1-a|$ 的x成立。

证明 不等式(9·8)是在定理9·9里所述不等式(9·3)的直接结果。而$\sum_{n=0}^{\infty} M\left(\frac{h}{|x_1-a|}\right)^n$是收敛的几何级数，由$M$—判别法导出$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$一致收敛。

注 (i)定理9·22里的h必须小于$|x_1-a|$才能保证级数在I上一致收敛。为说明这一点，研究

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n},$$

它在$x=1$收敛，但在$x=-1$发散。若级数在$|x|<1$一致收敛，那么它便在$|x| \leqslant 1$上一致收敛(读者可以证明这一事实)。这表明$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$不能在$|x|<1$上一致收敛。而对于$h<1$，它在$|x|<h$上是一致收敛的。

(ii)若定理9·22的级数对$x=x_1$绝对收敛，那么取$h=|x_1-a|$，级数在$I=\{x: |x-a| \leqslant |x_1-a|\}$上一致收敛。为证明这一点，只要注意到$|x-a| \leqslant |x_1-a|$时，有

$$|C_n(x-a)^n| \leqslant |C_n(x_1-a)^n|.$$

例1 求使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n \tag{9·9}$$

于$I=\{x: |x|\leqslant h\}$上一致收敛的h的值。

解 当$|x|\leqslant h$，有

$$|(n+1)x^n|\leqslant(n+1)h^n.$$

据比值判别法，当$0\leqslant h<1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)h^n$收敛。因此级数(9·9)当$h<1$时，在区间$I=\{x: |x|\leqslant h\}$上一致收敛。级数(9·9)当$x=\pm1$时发散，因此当且仅当$h<1$时，级数(9·9)在$I$上一致收敛。

例2 求使级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \tag{9·10}$$

于$I=\{x: |x|\leqslant h\}$上一致收敛的h的值。

解 当$|x|\leqslant h$，有

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{h^n}{n^2}.$$

按比较原则，及由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，可知当$h\leqslant1$时级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{h^n}{n^2}$

收敛。按比值判别法，当$x>1$时级数(9·10)发散。我们断定级数(9·10)在$I=\{x: |x|\leqslant 1\}$上一致收敛，即所求之h为不大于1的正数。

引理9·2 设级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n \tag{9·11}$$

对$|x-a|<R(R>0)$收敛，那么f与f'在$|x-a|<R$内连续，且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nC_n(x-a)^{n-1}. \tag{9·12}$$

证明 选取x_1，使$|x_1-a|<R$，再取h，$0<h<|x_1-a|$.由定理9·22，级数(9·11)在$I=\{x: |x-a|\leqslant h\}$上一致收敛，且存在$M$，使当$|x-a|\leqslant h$有

$$|C_n(x-a)^n|\leqslant M\left(\frac{h}{|x_1-a|}\right)^n.$$

由定理9·8，函数f在I上连续。此外，还有

$$|nC_n(x-a)^{n-1}|\leqslant n|C_n|h^{n-1}\leqslant\frac{nM}{h}\left(\frac{h}{|x_1-a|}\right)^n.$$

由比值判别法可知$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nM}{h}\left(\frac{h}{|x_1-a|}\right)^n$收敛，因而(9·12)的级数在$I$上一致收敛，由定理9·20，定理9·18可知(9·12)

式成立，并且f'在I上连续。因为h是任选的小于R的正数，因此f与f'在$|x-a|<R$内连续且（9·12）式成立。

借助于引理9·2可得幂级数逐项微分及逐项积分的定理。

定理9·23 设f为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n,\quad |x-a|<R(R>0).\qquad (9\cdot13)$$

（i）f在$|x-a|<R$内具有任意阶导数，对$\forall$自然数m，$f^{(m)}(x)$可由(9·13)逐项微分m次得到。

（ii）对$|x-a|<R$，定义F为

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

那么F可由（9·13）逐项积分得到。

（iii）系数

$$C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).\qquad (9\cdot14)$$

证明 由引理9·2及归纳法可得（i）的证明。应用定理9·19便得（ii）。为了证（9·14）式，把（9·13）逐项微分n次，并令$x=a$便得。

综合（9·13），（9·14）式，对于幂级数（9·13）所定义的函数$f(x)$，有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (9\cdot15)$$

一函数在某点的邻域内具有各阶连续的导数，则称函数在这一点是无限可微的。函数在某点a无限可微，但它可能并不等于$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. 例如

$$f: x\to\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{当}x\neq0,\\ 0 & \text{当}x=0.\end{cases}$$

对$x\neq0$求f的各阶导数：

$$f'(x)=2x^{-3}e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

$$f''(x)=x^{-6}(4-6x^2)e^{\frac{-1}{x^2}}.$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=x^{-3n}p_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

这里$p_n(x)$是一n次多项式．按照洛比达法则以及导数定义，对$\forall n$，$f^{(n)}(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f^{(n-1)}(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}f^{(n)}(x)=0$．按$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$写出来的幂级数恒等于零．但$f(x)$除$x=0$点

之外恒为正，即 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 这一在$x=0$点的幂级数并不等于$f(x)$。

定义 设$f: I\to \mathbf{R}_1$在$a\in I$点无限可微且有(9·15)式成立，而(9·15)的级数的收敛半径为正数，便称f在a点是解析的。称函数为解析的$\Longleftrightarrow$它在定义域的每一点都是解析的。

由上面例子可知，为了函数是解析的，f应当具有比无限可微还多的性质，带余项的台劳定理（定理7·6）是确定函数是否能展开成幂级数的基本工具。为了应用，把台劳定理复述为定理9·24。

定理9·24（带余项的台劳定理） 设f及其直到n阶的导数在包含$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$的区间上连续，且对$a<x<b$的每一$x$，$f^{(n+1)}(x)$存在，那么$\exists\,\xi$，$a<\xi<b$，满足

$$f(b)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j+R_n, \qquad (9\cdot16)$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

定理9·25 对于任意的a及x，有展开式

$$e^x=e^a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-a)^n}{n!} \qquad (9\cdot17)$$

成立。

证明 应用定理9·24于$f(x)=e^x, f^{(n)}(x)=e^x, n=1, 2, \cdots$，且令（9·16）中的$b=x$，得到

$$e^x = e^a \sum_{j=0}^{n} \frac{(x-a)^j}{j!} + R_n(a,\ x),$$

$$R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

这里ξ介于a与x之间。若$x>a$，则$a<\xi<x$，因而$e^{\xi}<e^x$；若$x<a$，则$x<\xi<a$，因而$e^{\xi}<e^a$。于是

$$R_n(a,\ x) \leqslant C(a,\ x)\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (9\cdot18)$$

$$C(a,x) = \begin{cases} e^x, & 当x \geqslant a, \\ e^a & 当x<a \end{cases}.$$

注意$C(a,x)$与n无关，按比值判别法级数(9·17)对$\forall x \in R_1$收敛。由(9·18)当$n\to\infty$，$R_n\to 0$。所以级数(9·17)对$\forall x$与a都收敛于e^x。

引理9·3 若$f(x)=\sin x$，那么$f^{(K)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$。

若$f(x)=\cos x$，那么$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$。

引理很容易用归纳法证明。

定理9·26 对$\forall a\in R_1$及$x\in R_1$，有

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n;$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(a+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!}(x-a)^n.$$

定理9·26的证明留作习题。

定理9·27 下列展开式对$|x|<1$成立：

$$\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n!},$$

$$\arctan x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}.$$

证明也留作习题。

定理9·28（幂级数的简单代换） (a) 若$f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(u-b)^n$，$|u-b|<R$，$R>0$，且$K\neq 0$，$b=KC+d$，那么对$|x-C|<\frac{R}{|K|}$，有

$$f(Kx+d)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nK^n(x-C)^n.$$

(b) 若$f(u)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(u-b)^n$，$|u-b|<R$，$R>0$，那么对$\forall$固定自然数$K$及$|x-C|<R^{\frac{1}{K}}$，有

$$f[(x-C)^K+b]=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-C)^{Kn}.$$

证明 (*a*) 若$u=Kx+d$，$b=KC+d$，那么$u-b=K(x-C)$，$C_n(u-b)^n=C_nK^n(x-C)^n$且$|u-b|<R\Leftrightarrow|x-C|<\dfrac{R}{|K|}$。

(*b*) 只要应用$u-b=(x-C)^K$的代换便得。

定理9·28很有用的特殊情况是$b=C=0$，这时

$$f(x^K)=\sum_{n=0}^{\infty}C_nx^{Kn}.$$

例如，由(9·17)，对$\forall x$有

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}.$$

应用带余项的台劳定理时，重要的是求得余项的确定的界数。下一定理给出余项R_n的积分形式，常常用来求出余项的这种界数。

定理9·29 (余项为积分形式的台劳定理) 设f在区间I上有直到$n+1$阶的连续导数，$a\in I$，那么对$\forall x\in I$

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}+R_n(a,\ x),\tag{9·19}$$

$$R_n(a,\ x)=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.\tag{9·20}$$

证明 对$\forall x\in I$，有

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)dt.$$

用部分积分法，于上面积分中令

$$u=f'(t),\quad v=-(x-t),$$

$$du=f''(t)dt,\quad dv=dt$$

可得

$$f(x)=f(a)-[(x-t)f'(t)]_a^x+\int_a^x(x-t)f''(t)dt$$

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\int_a^x(x-t)f''(t)dt.$$

对上式右端积分再应用部分积分法，令

$$u=f''(t),\qquad v=-\frac{(x-t)^2}{2},$$

$$du=f'''(t)dt,\quad dv=(x-t)dt$$

得出

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+$$

$$f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt.$$

重复这一过程并使用归纳法，便得到一般情况的（9·19），（9·20）成立。

初等微积分中一般不予证明的二项式展开，可用定理9·29得到证明。

定理9·30（二项式展开定理） 对$\forall m\in \mathbf{R}_1$，有

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

$$|x|<1. \qquad (9\cdot 21)$$

证明 对$f(x)=(1+x)^m$，取$a=0$应用定理9·29，得

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{K}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n$$

$$+R_K(0,x),$$

这里

$$R_K(0,x)=\int_0^x\frac{(x-t)^K}{K!}m(m-1)\cdots$$

$$(m-K)(1+t)^{m-K-1}dt.$$

我们希望证明对$|x|<1$，当$K\to\infty$时有$R_K\to 0$。为此，定义

$$C_m(x)=\begin{cases}(1+x)^{m-1}, & \text{当}m\geqslant 1, \quad x\geqslant 0,\\ 1 & \text{当}m\leqslant 1, \quad x\geqslant 0,\\ 1 & \text{当}m\geqslant 1, \quad x\leqslant 0,\\ (1+x)^{m-1} & \text{当}m\leqslant 1, \quad x\leqslant 0.\end{cases}$$

这样，对0，x之间的所有t都有$(1+t)^{m-1}\leqslant C_m(t)$。因此

$$|R_K(0,x)| \leqslant C_m(x) \frac{|m(m-1)\cdots(m-K)|}{K!}$$

$$\left|\int_0^x \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^K dt\right|.$$

定义

$$U_K(x) = C_m(x) \frac{|m(m-1)\cdots(m-K)|}{K!} |x|^{K+1}$$

并于积分$\int_0^x \left|\frac{x-t}{1+t}\right|^K dt$中令$t=xs$，得$\int_0^1 \frac{(1-s)^K}{(1+xs)^K} |x|^K x ds$，

因此

$$|R_K(0,x)| \leqslant u_K(x) \int_0^1 \frac{(1-s)^K}{(1+xs)^K} ds.$$

上式右端之积分$\int_0^1 \frac{(1-s)^K}{(1+xs)^K} ds$，当$|x| \leqslant 1$时不大于1．因而

$|R_K(0,x)| \leqslant u_K(x)$．用比值判别法不难得知当$|x|<1$时，

$\sum_{K=0}^{\infty} u_K(x)$收敛。由收敛的必要条件，$K\to\infty$时，$u_K(x)\to 0$。

因此对$|x|<1$及任何m，都有$R_K(0,x)\to 0\ (K\to\infty)$。

注 （ i ）若m是自然数，显然级数(9·21)仅有$(m+1)$项不等于零．

(ii)定理9·30中是用了R_K的积分形式．如果以定理9·24的余项形式

$$R_K(0,\ x) = \frac{m(m-1)\cdots(m-K)}{K!}(1+\xi)^{m-K-1} x^K,$$

其ξ界于0，x之间．当x在-1与$-\frac{1}{2}$之间时的最好的估计是

$$|R_K(0,\ x)| \leqslant C_m(x)\frac{|m(m-1)\cdots(m-K)|}{K!}\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^K.$$

但当$K\to\infty$，右端不趋向于零．

习　　题

习题1—10，确定h的值使级数在区间I上一致收敛。

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，　　$I=\{x:|x|\leqslant h\}$．

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$，　　$I=\{x:|x|\leqslant h\}$．

3．$\sum_{n=1}^{\infty}n(x-1)^n$，　　$I=\{x:|x-1|\leqslant h\}$．

4．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(5x)^n}{n!}$，　　$I=\{x:|x|\leqslant h\}$．

5．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{3^n(n+1)}$，　　$I=\{x:|x|\leqslant h\}$．

6．$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2(x-1)^n}{(2n)!}$，　　$I=\{x:|x-1|\leqslant h\}$．

7．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)\log(n+1)}$，　　$I=\{x:|x|\leqslant h\}$．

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)2^n x^n}{3^n n^{\frac{3}{2}}}$, $I=\{x: |x|\leqslant h\}$.

9. $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$, $I=\{x: |x|\leqslant h\}$.

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+nx^2)\sqrt{n}}$. $I=\{x: |x|\leqslant h\}$.

11. 若$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，证明$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$对所有$x$一致收敛。

12. 若$\sum_{n=1}^{\infty}n|b_n|$收敛，而$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin x$，证明$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos nx$对所有$x$一致收敛，且$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n\cos nx$。

13. 证明若$\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-a)^n$对$|x-a|<h$一致收敛，那么级数对$|x-a|\leqslant h$一致收敛。

14. 证明定理9·18。

15. 证明定理9·19。

16. 证明定理9·20。

17. 设$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & 当x\neq 0,\\ 0, & 当x=0.\end{cases}$ 用洛比达法则证明对$\forall n$,

当$x\to 0$时，$f^{(n)}(x)\to 0$。

18. 证明引理9·3。

19. 证明定理9·26。

20. 证明定理9·27。

21. 对于自然数n用归纳法写出定理9·29的完整的证明。

习题22—29求函数f关于$a=0$点的台劳展开式并证明展开式收敛于相应的函数，即f是解析函数。

22. $f: x\to(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$，　23. $f: x\to(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$，

24. $f: x\to(1-x)^{-2}$，　25. $f: x\to(1-x)^{-3}$，

26. $f: x\to \arcsin x$，　27. $f: x\to(1-x^2)^{-3}$。

28. $f: x\to \arctan x^2$，　29. $f: x\to \arcsin x^3$。

习题30—35求$f(x)$的近似值，用带余项的台劳定理保证精确到五位小数。

30. $e^{0.2}$。　31. $\sin(0.5)$。

32. $\log(0.9)$。　33. $(0.94)^{\sqrt{3}}$。

34. $(15)^{\frac{1}{4}}$。　35. $(63)^{\frac{1}{6}}$。

习题36—38，计算积分值，要求精确到五位小数。

36. $\int_0^{\frac{1}{2}}\exp(x^2)dx$。

37. $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x}dx$。

38. $\int_0^{0.3}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

§9·5 无 序 和

考察二重序列

$$U_{mn}=\cos^m\left(\frac{1}{n}\right),\quad m,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

当m与n都趋向于无穷时，U_{mn}的趋势不能确定。容易验证

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{m\to\infty}\cos^m\left(\frac{1}{n}\right)\right]=0,\quad \lim_{m\to\infty}\left[\lim_{n\to\infty}\cos^m\left(\frac{1}{n}\right)\right]=1.$$

当m与n保持特定关系同时趋向无穷时，也可能出现别的极限值。对于三重、四重以及多重序列的情况将更为复杂。

我们不采取逐一地分别讨论二重、三重、四重以及各多重序列的办法，而是提出一种综合的统一处理多重序列、多重级数收敛性的理论，把多重序列作为定义在集S上的实值函数来研究。S是R_2,R_3或R_N内的格点的集。所谓格点是指坐标是整数的点的集（图9·5）。那么二重序列$u_{m,n}$，三重序

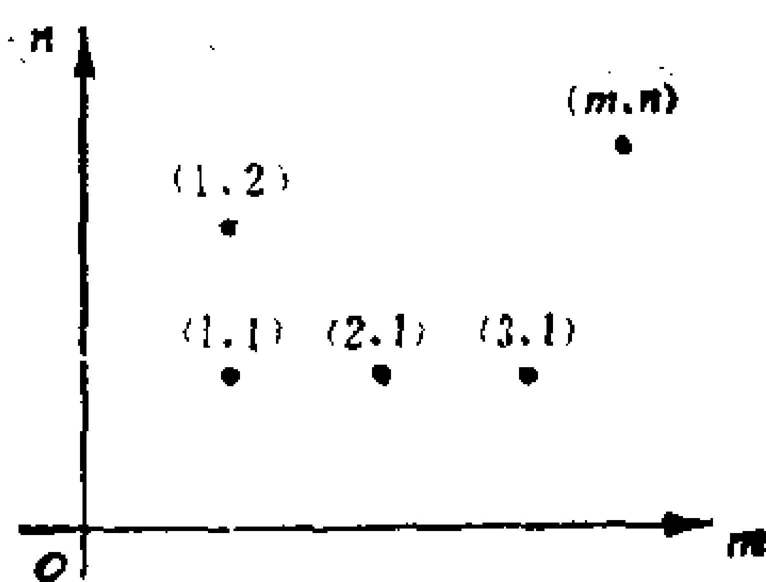


图 9·5

列$u_{l;m;n}$等都是相应特定的S上的函数。S也可以是有限个点的集。例如

$$S=\{(m,n):1\leqslant m\leqslant 4,\ 2\leqslant n\leqslant 5,\ m,n\text{为整数}\}$$

（图9·6所示）。本节所述的结果对于任意的集，也即不限于由格点组成的集，甚至不可列的集都有效。

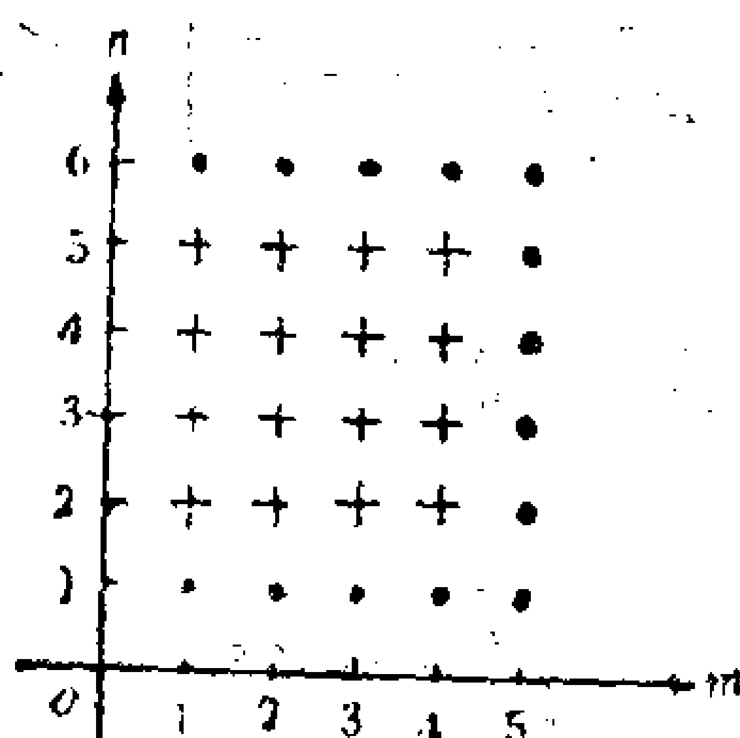


图 9·6

定义 设S是一有限集，$f:S\to \mathbf{R}_1$为给定的函数，当p取遍S，$f(p)$的和是$\sum\limits_{i=1}^{n} f(p_i)$。这里$p_1$，$p_2\cdots p_n$是$S$的所有元素的某一排列。因为有限项之和不依赖于$S$元素的排列顺序，我们把这一和表示成

$$\sum_{p\in S} f(p). \tag{9·22}$$

当函数f以确定的下标表示的时候，例如$\{U_{mn}\}$，$m=1,2,3$，$n=1,2,\cdots 7$。f是以$S=\{(m,n):1\leqslant m\leqslant 3,1\leqslant n\leqslant 7\}$为定义域以$u_{mn}$为函数值的函数。(9·22)可换记成

$$\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{7}u_{mn}.$$

定义 设S是无限集，$f: S\to R_1$是给定的函数．称f在S上有和$S\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$有限集$S'\subset S$，使S的每个包含S'的有限子集S''都有

$$\left|\sum_{p\in S''}f(p)-S\right|<\varepsilon.$$

当f在S上有和，仍记这一和为

$$\sum_{p\in S}f(p). \tag{9·22}$$

注 （ i ）一般说，定义中的子集S'与ε值有关．

(ii)我们用同样的符号$\sum_{p\in S}f(p)$表示在有限集或无限集上的和．有限和总有意义，无限集上的和仅在有和的情况下才能采用$\sum_{p\in S}f(p)$的表示．在和存在的情况下，即使S的值不指明，也以$\sum_{p\in S}^{\infty}f(p)$表示这个和．

(iii)把上面的定义与无穷级数收敛性相比较，$\sum_{K=1}^{\infty}a_K$收敛是指：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists n$，使$\forall m>n$有

$$\left|\sum_{K=1}^{m}a_K-S\right|<\varepsilon.$$

取集$\{1,2,\cdots,n\}$作为S'，集$\{1,2,\cdots n,\cdots m\}$相当于$S''$．但上述在集$S$上的

和的定义，并未限制如何选取S'.当S是所有自然数集时，S'不必选取前n个自然数的集.也就是说现在f在S上的和的定义允许选取S的任何的有限集.正因为这样，把（9·23）称为无序和.

定理9·31 设S是一无限集，$f: S\to R_1$为给定的函数，那么f在S上最多有一个和s。

证明 假定f在S上有两个和s_1, s_2，且$s_1<s_2$。我们取$\varepsilon=\frac{1}{2}(s_2-s_1)$。由定义$\exists S$的有限子集$S_1'$与$S_2'$，使对任何分别包含$S_1'$，$S_2'$的$S$的有限子集$S''$，$\overline{S}''$有

$$\left|\sum_{p\in S''} f(p)-s_1\right|<\varepsilon,\qquad \left|\sum_{p\in \overline{S}''} f(p)-s_2\right|<\varepsilon.$$

取S^*为含有$S_1'\cup S_2'$的S的有限子集，那么

$$\sum_{p\in S^*} f(p)<s_1+\varepsilon,\qquad s_2-\varepsilon<\sum_{p\in S^*} f(p).$$

由此便得

$$s_2-\varepsilon<s_1+\varepsilon,$$

这与ε的定义相矛盾。因此定理成立。

定理9·32 设f_1与f_2在S上都有和，C_1，C_2是实数。那么$C_1f_1+C_2f_2$在S上有和，并且

$$\sum_{p\in S}(C_1f_1(p)+C_2f_2(p))=C_1\sum_{p\in S}f_1(p)+C_2\sum_{p\in S}f_2(p).$$

证明 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists S$的有限子集S_1'，S_2'，使对含有S_1'，S_2'的有限集S''都有

$$\left|\sum_{p\in S''} f_i(p) - \sum_{p\in S} f_i(p)\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{1+|C_1|+|C_2|}, \qquad i=1,\ 2.$$

取$S' = S_1' \cup S_2'$，那么对包含S'的S的任何有限子集S''，都有

$$\left|\sum_{p\in S''}(C_1 f_1 + C_2 f_2) - \left(C_1 \sum_{p\in S} f_1 + C_2 \sum_{p\in S} f_2\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{2} |C_i| \left|\sum_{p\in S''} f_i(p) - \sum_{p\in S} f_i(p)\right|$$

$$\leqslant \frac{(|C_1|+|C_2|)\varepsilon}{1+|C_1|+|C_2|} < \varepsilon.$$

推论 设f_1，f_2，…，f_n在S上都有和，C_1，C_2，…C_n都是实数，那么$C_1f_1 + C_2f_2 + \cdots + C_nf_n$在$S$上有和，且

$$\sum_{p\in S}\left(\sum_{i=1}^{n} C_i f_i(p)\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i \sum_{p\in S} f_i(p).$$

定理9·33 设S是无限集，$f: S \to R_1$在S上有和，那么$\exists$数M使对S的任何有限集$\overline{S}$都有

$$\left|\sum_{p\in \overline{S}} f(p)\right| < M.$$

证明　设$S=\sum\limits_{p\in S}f(p)$，并取$\varepsilon=1$，那么∃有限集$S'$，使对任何含有$S'$的有限集$S''$都有

$$\left|\sum_{p\in S''}f(p)-S\right|<1. \tag{9·24}$$

由（9·24）可知

$$\left|\sum_{p\in S''}f(p)\right|<1+|S| \tag{9·25}$$

现设$\overline{S}$是S的任一有限子集．定义$S''=\overline{S}\cup S'$并注意(9·25)对这一S''成立，此外

$$\overline{S}=(\overline{S}\cup S')-(S'-\overline{S})\quad,$$

如图9·7所示，记$A=\sum\limits_{p\in S'}|f(q)|$．于是

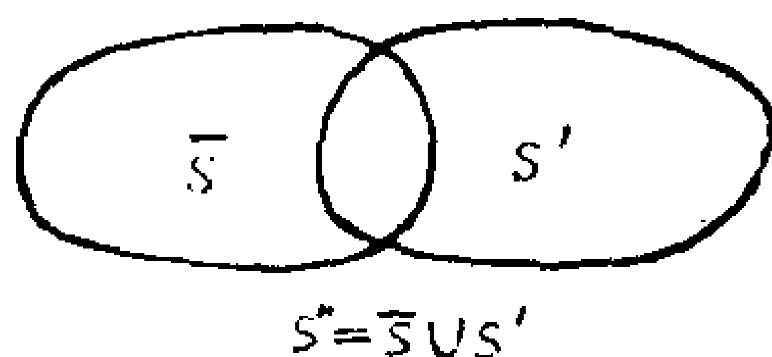


图 9·7

$$\sum_{p\in\overline{S}}f(p)=\sum_{p\in S''}f(p)-\sum_{p\in(S'-\overline{S})}f(p)$$

及

$$\left|\sum_{p\in\overline{S}}f(p)\right|\leqslant\left|\sum_{p\in S''}f(p)\right|+\sum_{p\in S'}|f(p)|$$

$$\leqslant 1+|S|+A.$$

取$M=1+|S|+A$，便满足定理的要求。

定理9·34 设$f: S\to \mathrm{R}_1$是给定的，且$\forall p\in S, f(p)\geqslant 0$。那么$f$在$S$上有和$\Longleftrightarrow \sum_{p\in S'} f(p)$对所有$S$的有限子集$S'$是一致有界的。

证明 由定理9·33，仅需证明当f的有限和一致有界，f在S上有和。

现在以S^*表示S的任一有限子集，定义

$$A=\sup_{S^*}\left\{\sum_{p\in S^*} f(p)\right\}, \tag{9·26}$$

这里上确界是对一切S的有限子集所取的。

对$\forall \varepsilon>0$，由上确界定义，$\exists$有限集S'，使

$$\sum_{p\in S'} f(p)>A-\varepsilon.$$

因为$f(p)\geqslant 0$，那么对每一含有S'的有限集S''都有

$$A\geqslant \sum_{p\in S''} f(p)>A-\varepsilon. \tag{9·27}$$

由（9·27）及（9·26），f在S上有和并且

$$\sum_{p\in S} f(p)=A.$$

推论 设$f: S\to \mathrm{R}_1$，$g: S\to \mathrm{R}_1$，且对一切$p\in S$成立着

$0 \leqslant f(p) \leqslant g(p)$。如果$g$在$S$上有和，那么$f$在$S$上有和，且

$$\sum_{p \in S} f(p) \leqslant \sum_{p \in S} g(p).$$

例1 设S是所有自然数序偶(m,n)的集。f是 S 上 的 函数：$f(m,n)=\frac{1}{m^2n^2}$。证明f在S上有和。

解 设S'是S的任一有限子集，分别以m', n'表 示 S' 内序偶(m,n)之m与n的最大数。那么

$$\sum_{(m;n)\in S'} \frac{1}{m^2n^2} \leqslant \sum_{m=1}^{m'} \sum_{n=1}^{n'} \frac{1}{m^2n^2}.$$

因为级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛（其和为$\frac{\pi^2}{6}$），有

$$\sum_{(m;n)\in S'} \frac{1}{m^2n^2} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^2 = \frac{\pi^4}{34} = A.$$

这表明f的有限和一致有界，据定理9·34，f在S上有和。

例2 设S与例1的S相同，$f: S \to R_+$，$f(m,n)=\frac{1}{m^4+n^4}$。证明f在S上有和。

解 因为对一切m，n，$2m^2n^2 \leqslant m^4+n^4$，

$$\frac{1}{m^4+n^4} \leqslant \frac{1}{2m^2n^2}.$$

令 $g(m,n)=\frac{1}{2m^2n^2}$，由例1，g在S上有和，据定理9·34推论f在S上有和。

定义 设$f: S\to R_1$，集$S^+=\{p: p\in S, f(p)\geqslant 0\}$；$S^-=\{p: p\in S, f(p)<0\}$。定义$f^+(p)=\frac{1}{2}[|f(p)|+f(p)]$，

$f^-(p)=\frac{1}{2}[|f(p)|-f(p)]$。

由定义立即得出：

$$0\leqslant f^+(p)\leqslant |f(p)|,\qquad 0\leqslant f^-(p)\leqslant |f(p)|$$

$$f^++f^-=|f|,\qquad f^+-f^-=f.$$

$$f^+(p)=\begin{cases} f(p) & \text{当}p\in S^+, \\ 0 & \text{当}p\in S^-; \end{cases}$$

$$f^-(p)=\begin{cases} f(p) & \text{当}p\in S^-, \\ 0 & \text{当}p\in S^+. \end{cases}$$

在研究变号级数时，提出了条件收敛与绝对收敛的概念。f在集S上的无序和的概念是绝对收敛概念的一般化。下面的定理就说明这一点。

定理9·35 f在S上有和$\Longleftrightarrow$ $|f|$在S上有和，当和存在时，有

$$\left|\sum_{p\in S} f(p)\right|\leqslant \sum_{p\in S}|f(p)| \qquad (9\cdot 28)$$

证明 设$|f|$在S上有和，那么由定理9·34的推论，f^+及f^-都在S上有和。用定理9·32，可得

$$\sum_{p\in S} f(p)=\sum_{p\in S} f^+(p)-\sum_{p\in S} f^-(p),$$

$$\sum_{p\in S} |f(p)|=\sum_{p\in S} f^+(p)+\sum_{p\in S} f^-(p).$$

于是 (9·28) 式成立。

现在设f在S上有和，证明$|f|$在S上有和。为此仅需f^+，f^-在S上都有和。若不然，假定f^+在S上没有和。据定理9·33，对于任一正数M，$\exists$一有限子集S'，使$\sum_{p\in S'} f^+(p)>M$。因为在S^-上$f^+(p)=0$，有

$$M<\sum_{p\in S'} f^+(p)=\sum_{p\in(S'-S^-)} f^+(p)$$

$$=\sum_{p\in S'\cap S^+} f^+(p)=\sum_{p\in S'\cap S^+} f(p),$$

由M的任意性，按定理9·33，f在S上不可能有和。这与f有和相矛盾，由此可见f^+在S上有和。而$f^-=f^+-f$，所以f^-在S上也有和，由$|f|=f^+-f^-$，可知$|f|$在S上有和。

下面显然的简单引理留作习题。

引理9·4 设$f:S\to R_1$在S上有和。若U是S的一个子集，那么f在U上有和。

在无穷级数问题里，有时要改变求和的集S。例如

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \text{ 与 } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}$$

求和的集一是 {1, 2, …}，另一则是 {0, 1, 2, …}，而两级数有同样的和。下一定理就这种变形的一般情况给出证明。

定理9·36 设S_0，S_1是给定的集，$T: S_0\to S_1$为1—1到上的映象。如果f在S_0上有和且$g: S_1\to R_1$，对$\forall q\in S_1$，$T(p)=q$，g按$g(q)=f(p)$所定义的。那么g在S_1上有和并且

$$\sum_{q\in S_1} g(q)=\sum_{p\in S_0} f(p).$$

证明 设f在S_0上的和为s。那么对$\forall\varepsilon>0$，存在一有限集$S_0'\subset S_0$，使对任何含有S_0'的有限集$S_0''\subset S_0$，都有

$$\left|\sum_{p\in S_0''} f(p)-s\right|<\varepsilon.$$

记$S_1'=T(S_0')$，$S_1''=T(S_0'')$。按g的定义，我们有

$$\left|\sum_{q\in S_1''} g(q)-s\right|<\varepsilon$$

由S_0''是含有S_0'的任意有限集，因而S_1''是含有S_1'的任意有限集，所以$\sum_{q\in S_1} g(q)=s$。

在第一章曾用N表示所有正整数的集，现在还继续用它。此外，用N_0表示非负整数集，即$N_0=N\cup\{0\}$。

定理9·37 设$f: N\to R_1$是给定的。对$\forall n\in N$，令

$a_n = f(n)$.那么f在N上有和$\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛.且

$$\sum_{n\in N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

证明 设f在N上有和，那么$|f|$，f^+，f^-在N上都有和.

令$S^+ = \sum_{n\in N} a_n^+$，这里$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$，对$\forall\varepsilon>0$.$\exists$一有限集$N'$，使

$$S^+ - \varepsilon < \sum_{n\in N'} a_n^+ \leqslant S^+.$$

以n'表N'中最大数.那么对所有$n''\geqslant n'$，有

$$S^+ - \varepsilon < \sum_{n=1}^{n''} a_n^+ \leqslant S^+.$$

因此$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$收敛于$S^+$，同理可得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$收敛于$\sum_{n\in N} a_n^-$，进而$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^+ + a_n^-)$收敛于$\sum_{n\in N} |a_n|$.

现在设$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$收敛于$s$.设$N'$是N的任一有限子集，其最大数为$n'$.那么

$$\sum_{n\in N_1}|a_n|\leqslant\sum_{n=1}^{n_1}|a_n|\leqslant s.$$

因此由定理9·34，$|f|$ 在N上有和且按定理9·35 f在N上有和。

由定理证明的第一部分 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+=\sum_{n\in N}a_n^+$，及 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum_{n\in N}a_n^-$，所以

$$\sum_{n\in N}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

若一无穷级数任意排列其各项得到的级数都收敛，就说级数无条件收敛。根据定理9·37，下面的推论说明无条件收敛与绝对收敛性等价。

定理9·37推论 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，$\{K_n\}$ 是正整数序列，那么 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{K_n}$ 是收敛的。若 $\{K_n\}$ 包括了N的所有数，那么

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{K_n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n.$$

当级数条件收敛时，任意排列它的项，所得级数可能发散或收敛于任一预先给定的实数。

例3 设f：N→R_1是给定的，$f(n)=\frac{(-1)^n}{n}$ 证明 f 在

N上不存在和。

解 因为级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$不绝对收敛，由定理9.37，$f$在N上没有和。

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$及$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$都发散．设$r$是任一实数，能从$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$中选取一些偶数的项，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$的一些项，然后再选取一些奇数的项，即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{2n-1}$的一些项，可能得到$f$的一个排列，所得新排列的级数的和是$r$。这过程的细节读者可参看习题11的提示自行完成。

习　题

1．设S是所有整数的集合，$f: S\to \mathbf{R}_1$，$f(n)=n2^{-|n|}$．证明f在S上有和。

2．设S是所有整数的集合，$g: S\to \mathbf{R}_1$，$g(n)=\sqrt{|n|}\cdot e^{-n}$．$g$在$S$上有和吗？

3．$S=\{x: x$是有理数，$0<x<1\}$，$f: S\to \mathbf{R}_1$，$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$，$r=\frac{p}{q}$，$p$，$q$是既约的整数。$f$在$S$上有和吗？

4．设$S=\{(m,n): m,n$是整数$,0<m<\infty,0<n<\infty\}$，

定义$f:S\to R_1, f(m,n)=\dfrac{1}{m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{5}{2}}}$。证明$f$在$S$上有和。

5. 设S与习题4之S相同，$g:S\to R_1$为$g(m,n)=\dfrac{1}{mn^3}$，g在S上有和吗？

6. 设$S=\{(l, m, n): l, m, n$都是自然数$\}$。定义$f:S\to R_1, f(l,m,n)=\dfrac{1}{l^8+2m^8+n^8}$。证明$f$在$S$上有和。

7. 设$S=\{(m, n): m, n$为自然数且$m\neq n\}$。$f:S\to R_1$为$f(m,n)=\dfrac{1}{m^2-n^2}$。证明$f$在$S$上没有和。

8. 证明引理9·4。

9. 设$T:S_0\to S_1$是由集S_0到S_1上的映象。设$f:S_0\to R_1$在S_0上有和。对$\forall q\in S_1$取集$\{T^{-1}(q)\}$的唯一元素p，且函数$S_1\to R_1$按公式$g(q)=f(p)$定义。证明g在S上有和。

10. 写出定理9·37推论的完整证明。

11. 设$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$条件收敛。r为任一实数。证明存在一排列，使得到的级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛于r(b_n与某a_K相同，反过来$\forall a_K$，为某一b_n)。

〔提示：把级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$的项分为$a_n'>0$，$a_n''<0$，那么

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n'$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n''$ 都发散（否则原级数便绝对收敛）规定重排的项 $a_{n+1}' \leqslant a_n'$，$-a_{n+1}'' < -a_n''$。由原级数收敛，$a_n' \to 0$ 及 $a_n'' \to 0(n \to \infty)$。现在顺次取第一序列 $\{a_n'\}$ 的项使其和刚刚超过 r；再顺次选取 $\{a_n''\}$ 的项使之总和刚刚小于 r。然后再顺次从 $\{a_n'\}$ 中取上一过程末取去的项使之总和刚刚超过 r，再顺次从 $\{a_n''\}$ 中取上一过程末取去的项，使之总和刚刚小于 r。如此重复地选取，所得新级数的部分和序列收敛于 r。]

§9·6　无序和的比较判别法，一致收敛性

类似于级数收敛性的比较判别法，对于无序和也有比较判别法。

定理9.38（比较判别法）　设 $f: S \to \mathbf{R}_1$，$F: S \to \mathbf{R}_1$。

(i)若 F 在 S 上有和，且对 $\forall p \in S$，$|f(p)| \leqslant |F(p)|$，那么 f 在 S 上有和。

(ii)若 F 在 S 上没有和，且对 $\forall p \in S$，$|f(p)| > |F(p)|$，那么 f 在 S 上没有和。

读者可参照定理9·4，给出证明。

例1　设 $S = \{(m, n): m, n$ 为所有自然数$\}$，证明

$$f(m,n) = \frac{(-1)^{m+n}}{m^3 + n^3}$$ 在 S 上有和。

解　由 $m^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}} \leqslant 2(m^3 + n^3)$，对 $\forall (m,n) \in S$ 成立。定义

$F(m,n)=\dfrac{2}{m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}$，显然$\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{m^{\frac{3}{2}}n^{\frac{3}{2}}}$收敛（由$p=\dfrac{3}{2}$的$p$-级数收敛），由定理9·37.$F$在$S$上有和。进而由$|f(m,n)|\leqslant|F(m,n)|$及定理9·38.$f$在$S$上有和。

例2 设S如同例1，证明$f(m,n)=\dfrac{1}{m^2+n^2}$在$S$上没有和。

解 定义

$$F(m,n)=\begin{cases}\dfrac{1}{2n^2} & \text{当}m\leqslant n.\\[2ex] \dfrac{1}{2m^2} & \text{当}m>n.\end{cases}$$

显然对一切(m,n)，$f(m,n)\geqslant F(m,n)>0$。现设$S_{n'}:=\{(m,n):0<m<n',0<n<n'，m,n$为整数$\}$.那么

$$\sum_{(m;n)\in S_{n'}}F(m,n)=\sum_{n=1}^{n'}\left(\sum_{m=1}^{n'}\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=n'\sum_{n=1}^{n'}\frac{1}{n^2}>\sum_{n=1}^{n'}\frac{1}{n}.$$

于是，若M是任一正数，可取n'大到使

$$\sum_{(m;n)\in S_{n'}}F(m,n)>M.$$

因此由定理9·34，F在S上没有和。再据比较判别法f在S上

也没有和。

下面两个定理是已有结果的直接推论。

定理9·39 若$f: S\to R_1$，$g: S\to R_1$在S上有和，且对$p\in S$，$f(p)\leqslant g(p)$。那么

$$\sum_{p\in S} f(p)\leqslant \sum_{p\in S} g(p).$$

定理9·40（两边夹定理） 设给定$f: S\to R_1$，$g: S\to R_1$，$h: S\to R_1$，且f，h在S上有和，对$p\in S$有

$$f(p)\leqslant g(p)\leqslant h(p),$$

那么g在S上有和。

虽然集S可以是相当任意的，但是当f在S上有和的情况下，f在S中不等于零的那些元素的集至多是可列集。

定理9·41 设$f: S\to R_1$在S上有和，$S^*=\{x: p\in S, f(p)\neq 0\}$。那么$S^*$是可列集。

证明 对于$n=1, 2, \cdots$，定义

$$S_n=\{p\in S: \frac{1}{n+1}<|f(p)|<n\}$$

那么由f于S_n上有和，S_n是有限集。由S^*定义，$S^*=\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$是可列集。细节留给读者完成。

设A是距离空间T内的集，S是任意的一非空集。于$A\times S$上定义实值函数f。即$f: A\times S\to R_1$。对于$x\in A$，f在S上可能有和或无和。当有和时，以$s(x)$表示f在S上的和。

定义 设$f: A\times S\to R_1$是给定的。称f关于A在S上一致地有和$\Longleftrightarrow$对$\forall x\in A$，f在S上有和，且对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ S的有限子集S'，使对每一含有S'的S的有限子集S''，都有

$$\left|\sum_{p\in S''} f(x;\ p)-s(x)\right|<\varepsilon,$$

这里的S'不依赖于x。当集A能被清楚地理解时，简称f在S上一致地有和。

"一致地有和"是相应于无穷级数一致收敛性的概念。一致收敛性有关的定理，可以推广为一致地有和的关于无序和的相应定理。

定理9·42 设函数$f: A\times S\to R_1$，对$\forall p\in S$，在距离空间T的集A上连续，且f在S上一致地有和。如果对$\forall x\in A$，由无序和定义的函数为

$$s(x)=\sum_{p\in S} f(x;\ p),$$

那么$s(x)$在A上是连续的。

证明 对于给定$x_0\in A$，证明$s(x)$在x_0点连续。据f在S上一致地有和，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$有限集S'，对任何含有S'的有限集S''，都有

$$\left|\sum_{p\in S''} f(x_0;\ p)-S(x_0)\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\left|\sum_{p\in S''} f(x;p)-S(x)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

固定S''，可有

$$|s(x)-s(x_0)|\leqslant|s(x)-\sum_{p\in S''}f(x;p)|+$$

$$\left|\sum_{p\in S''}[f(x;p)-f(x_0;p)]\right|$$

$$+\left|\sum_{p\in S'}f(x_0;p)-s(x_0)\right|$$

上式右端第二项由$f(x,p)$关于x的连续性，$\exists\ \delta>0$，使当x与x_0距离小于δ，便有

$$\left|\sum_{p\in S''}[f(x;p)-f(x_0;p)]\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

对一切这样的x，便有

$$|S(x)-S(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

即$S(x)$在x_0点连续。

容易看出定理9·42的证明是仿照定理9·12的证明写出的。同样，下面定理9·43及证明可仿照定理9·13与9·16的证明写出。

定理9·43 (a)（关于无序和的逐项积分）设$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$是一有限区间，$f:I\times S\rightarrow R_1$关于$I$在$S$上一致地有和，且设对每一$p\in S$，$f(x;p)$在$I$上可积。$s(x)=\sum_{p\in S}f(x;p)$。那么$s(x)$在$I$上可积，且

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{p\in S}\int_a^b f(x;p)dx.$$

(b)设F是R_N内的图形，$f: F\times S\to R_1$在F上可积，且在S上一致地有和$s(x)$。那么$s(x)$在F上可积，且

$$\int_F s dV_N = \sum_{p\in S}\int_F f(x;p)dV_N.$$

下一定理是关于无序和逐项可微性的，它与定理9·14相似。

定理9·44 设G是R_N内开集且$f: G\times S\to R_1$连续，且在G内有连续的偏导数$f_{;K}(x;p)$ $(K=1, 2, \cdots, N)$。设$f(x;p)$在S上的和为$s(x)$，$f_{,K}(x;p)$在S上一致地有和$t(x)$。那么对所有$x\in G$，有

$$s_{;K}(x)=t(x).$$

关于无序和的一致地有和的M-判别法与定理9·21类似。

定理9·45（外尔斯特拉斯M—判别法）设A是距离空间T内的集且$u: A\times S\to R_1$，对$\forall p\in S$，有$|u(x;p)|\leqslant f(p)$。如果$f(p)$在S上有和，那么$u(x: p)$及$|u(x;p)|$关于A在S上一致地有和。

习　题

1．设$S=\{(m,n): m,n$是自然数$\}$，$f(m,n)=\dfrac{1}{m^{\frac{5}{2}}+n^{\frac{5}{2}}}$，

证明f在S上有和。

2. 设S同习题1. $f(m,n)=\dfrac{1}{m+n^3}$，证明f在S上没有和。

3. 设$S=\{(l,m,n), l, m, n$是自然数$\}$，于S上定义

$$f(l,m,n)=\frac{1}{l^2+m^2+n^4},$$

f在S上有和吗？

4. 证明定理9·38。

5. 证明定理9·39。

6. 证明定理9·40。

7. 完成定理9·41的证明。

8. 设$S=\{x: 0<x<1\}$，$f: S\to R_1$，f的值域含有集$A=\{x: 0<x<1, x$为有理数$\}$。证明f在S上没有和。

9. 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$S=\{n: n$为自然数$\}$。若$f$定义在$I\times S$，$f(x;n)=\dfrac{x^n}{n}$。$f$关于$I$在$S$上是否一致地有和？

10. 设$A=\{(x,y): 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$S=\{(m,n): m,n$为自然数$\}$。$f: A\times S\to R_1$，$f=x^m y^n/m^2n^2$。$f$关于$A$在$S$上是否一致地有和？

11. 证明定理9·43(a)。

12. 证明定理9·43(b)。

13. 设$S=\{n: n$为整数$\}$，$I=\{x: 0\leqslant x<\infty\}$。定义$f(x,n)$

$$=\frac{e^{-nx}}{1+n^4},$$ 无序和$\sum\limits_{n\in S}f(x;n)$能否逐项微分？

14. 证明定理9·44。

15. 证明定理9·45.

§9·7 多重序列与多重级数

定义 以N×N表示所有自然数偶的集，以$N_0 \times N_0$表示所有非负整数偶的集。由$N_0 \times N_0$到R_1内的函数u称为二重数列。u的值表示成$u(m,n)$或习惯地表示成u_{mn}，$m,n=0$, 1, 2, ….二重序列的定义域可以是N×N或它的子集。称当(m,n)趋向于无穷时，二重序列收敛于$a \Longleftrightarrow$对$\forall \varepsilon>0$ ∃ 自然数p，使当$m>p$，$n>p$，有$|u_{mn}-a|<\varepsilon$.记为当$(m,n)\to\infty$，$\{u_{mn}\}\to a$.

基于二重序列概念相应地引入二重级数概念。

定义 二重序列的序偶$(\{u_{mn}\},\{S_{mn}\})$称为二重级数。u_{mn}是它的项。其中$S_{mn}=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}u_{ij}$，称为级数的部分和，$m,n=0,1,2,\cdots$.称二重级数为收敛的$\Longleftrightarrow$ ∃ 数S，当$(m,n)\to\infty$时，$S_{mn}\to S$.否则二重级数是发散的。通常习惯地记二重级数为$\sum_{m;n=0}^{\infty}u_{mn}$，而不采用序偶的记法。

下面定理是极限定理及收敛定义的直接推论。

定理9·46 (a)若二重级数$\sum_{m,n=0}^{\infty}u_{mn}$，$\sum_{m;n=0}^{\infty}v_{mn}$ 都是收敛的，c，d是常数，那么级数$\sum_{m;n=0}^{\infty}(cu_{mn}+dv_{mn})$是收敛

的，且

$$\sum_{m;n=0}^{\infty}(cu_{mn}+dv_{mn})=c\sum_{m;n=0}^{\infty}u_{mn}+d\sum_{m;n=0}^{\infty}v_{mn}.$$

(b)若级数 $\sum\limits_{m;n=0}^{\infty}u_{mn}$是发散的，$c\neq0$，那么级数 $\sum\limits_{m;n=0}^{\infty}cu_{mn}$ 是发散的。

下一定理说明二重级数收敛性与无序和之间的关系。

定理9·47 设二重序列u：$\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\to\mathrm{R}_1$的项$u_{mn}$是非负的。那么级数 $\sum\limits_{m;n=0}^{\infty}u_{mn}$收敛$\Longleftrightarrow$函数$u$在$S=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0$上有和，并且

$$\sum_{m;n=0}^{\infty}u_{mn}=\sum_{(m;n)\in S}u_{mn}. \tag{9·29}$$

证明 (a)设u在S上有和，以s表示。对$\forall\varepsilon>0$，$\exists S$的一有限集S'，使含有S'的任何有限集S''，有 $\left|\sum\limits_{(m;n)\in S''}u_{mn}-s\right|<\varepsilon$。若$p>S'$中每一$(m,n)$的$m$及$n$。由$u_{mn}$的非负性，可知当$m_0\geqslant p$，$n_0\geqslant p$时，

$$s-\varepsilon<\sum_{(m;n)\in S}u_{mn}\leqslant\sum_{i=1}^{m_0}\sum_{j=1}^{n_0}u_{ij}=S_{m_0n_0}\leqslant s.$$

所以二重级数收敛于和s。

(b)假设二重级数收敛于和s，S'是S的任意给定的有限子

集。由收敛定义，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists p$，使当 $m_0>p, n_0>p$，有 $S_{m_0 n_0}<s+\varepsilon$。由 S' 是 S 的有限子集，可以认为对 $\forall(m,n)\in S'$，有 $p>m, p>n$。于是有

$$\sum_{(m;n)\in S'} u_{mn} \leqslant \sum_{m=1}^{p}\sum_{n=1}^{p} u_{mn} = s_{pp} \leqslant s+\varepsilon.$$

由定理9·34．u 在 S 上有和。

显然对于三重、四重以至任意多重级数相应于定理9·46定理9·47的定理也成立。

定理9·48 设 $u: \mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0\to\mathbf{R}_1$ 的项为 u_{mn}，级数 $\sum\limits_{m;n=0}^{\infty} u_{mn}$ 绝对收敛 $\Longleftrightarrow u$ 在 $S=\mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0$ 上有和。并且在收敛情况下(9·29)式成立。

定理9·48可由定理9·47直接推出，细节留给读者。定理9·47、9·48是§9·6中关于无序和定理9·35的特殊情况。下一定理则是有关无序和一般的定理9·50的特殊情况。

定理9·49 给定 $u: \mathbf{N}_0\times\mathbf{N}_0\to\mathbf{R}_1$，其项为 u_{mn}．设 $\sum\limits_{m;n=0}^{\infty} u_{mn}$ 是绝对收敛的，那么对每一固定 m，$(m=0,1,2,\cdots)$ 单重级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_{mn}$ 是绝对收敛的；对每一固定 n，$(n=0,1,2,\cdots)$ 级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty}$ 是绝对收敛的。如果定义

$$U_m=\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn},\quad V_n=\sum_{m=0}^{\infty} u_{mn},\quad W_k=\sum_{m+n=k} u_{mn}$$

那么级数 $\sum_{m=0}^{\infty} U_m$， $\sum_{n=0}^{\infty} V_n$， $\sum_{r=0}^{\infty} W_r$ 都绝对收敛且与 $\sum_{m,n=0}^{\infty} u_{mn}$ 有同样的和。

证明 先假定 $u_{mn} \geqslant 0$。由定理9·48可知 u 在 $S = \mathrm{N}_0 \times \mathrm{N}_0$ 上有和。对每一 m， $\sum_{n=0}^{p} u_{mn}$ 是 u 在 S 的有限子集上的和，对任何 p， $\sum_{n=0}^{p} u_{mn} \leqslant \sum_{(m,n)\in S} u_{mn}$。即对 $\forall m$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}$ 的部分和一致有界，因此级数 $\sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}$ 对每一 m 收敛。这样对 $\forall m$，U_m 有定义。现在来研究 $\sum_{m=0}^{\infty} U_m$ 的部分和 $\sum_{m=0}^{M} U_m$。对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists\, p$ 使对 $m = 0, 1, 2, \cdots, M$ 都有

$$\sum_{n=0}^{p} u_{mn} > \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} - \frac{\varepsilon}{M}.$$

由此

$$\sum_{m=0}^{M} U_m = \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} < \sum_{m=0}^{M} \sum_{n=0}^{p} u_{mn} + \varepsilon.$$

因为 u 在 S 上有和，由上面不等式所示，$\sum_{m=0}^{M} U_m$ 有界，我们断定 $\sum_{m=0}^{\infty} U_m$ 收敛，且其和不超过 u 在 S 上的和。

现在证明还有$\sum\limits_{m=0}^{\infty}U_m \geqslant \sum\limits_{(m;n)\in S} u_{mn}$。为此，对于$\forall \varepsilon>0$。$\exists$有限集$S'\subset S$，使

$$\sum_{(m;n)\in S'} u_{mn} > \sum_{(m;n)\in S} u_{mn} - \varepsilon.$$

取M'大于S'中(m,n)的诸m的值，有

$$\sum_{m=0}^{\infty} U_m \geqslant \sum_{m=0}^{M'} U_m = \sum_{m=0}^{M'} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn}$$

$$\geqslant \sum_{(m;n)\in S'} u_{mn} > \sum_{(m;n)\in S} u_{mn} - \varepsilon.$$

既然ε是任意的，$\sum\limits_{m=0}^{\infty}U_m \geqslant \sum\limits_{(m;n)\in S} u_{mn}$。因此断定$\sum\limits_{m=0}^{\infty}U_m = \sum\limits_{(m;n)\in S} u_{mn}$。由定理9·48，得$\sum\limits_{m=0}^{\infty}U_m = \sum\limits_{m;n=0}^{\infty} u_{mn}$。

对于u_{mn}符号可正可负的一般情况，根据绝对收敛的假设，分别讨论级数的正部分及负部分，重复上述推理便得结论。

同理可得关于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}V_n$，$\sum\limits_{r=0}^{\infty}W_r$的结论。

注　定理9·49关于二重绝对收敛级数适合结合律的结论，通过无序和给出了证明.仿照这一定理可以把它推广为下面关于无序和的结合律的一般定理.

定理9·50 设S'是一集，对$\forall x\in S'$伴之一集S_x。定义$S=\{(x,y):x\in S',\ y\in S_x\}$.若$f:S\to R_1$在$S$上有和。定义$g(x)=\sum_{y\in S_x} f(x,y)$.那么$g$在$S'$上有和且

$$\sum_{x\in S'} g(x)=\sum_{x\in S'}\left[\sum_{y\in S_x} f(x,y)\right]=\sum_{(x;y)\in S} f(x,y).$$

定理9·50的证明可仿照定理9·49的证明写出来，把它作为习题留给读者。下面以三重级数为例具体说明定理9·50。

设$S'=N\times N$，对$\forall x\in S'$，$S_x=N_0$。那么$S=N\times N\times N_0$。如果$f:S\to R_1$在S上有和；以$u_{l;m;n}$表示f的项。定理9·50指出

$$g(x)\equiv\sum_{y\in S_x} f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty} u_{lmn}$$

对$\forall(l,m)\in S'$是收敛的。以U_{lm}，$(l,m)\in S'$表示$g(x)$的项，那么

$$\sum_{l;m=1}^{\infty} U_{lm}=\sum_{l;m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} u_{lmn}=\sum_{(l;m;n)\in S} u_{lmn}.$$

定理9·50 有如下的部分逆成立。

定理9·51 设S',S,S_x均如定理9·50所述.$f:S\to R_1$是给定的，对$\forall x\in S'$，f在S_x上有和.定义$g(x)=\sum_{y\in S_x}|f(x,y)|$且$g$在$S'$上有和。那么$f$在$S$上有和。

把这一定理及下一结果的证明都留给读者。

定理9·52（无序和的相乘） 设给定 $f: S' \to \mathrm{R}_1$ 与 $g: S'' \to \mathrm{R}_1$。定义 $S = S' \times S''$ 及对 $\forall x \in S'$，$\forall y \in S''$，$h(x,y) = f(x)g(y)$。若 f 在 S' 上有和，g 在 S'' 上有和。那么 h 在 S 上有和而且

$$\sum_{(x,y)\in S} h(x,y) = \left[\sum_{x\in S'} f(x)\right]\cdot\left[\sum_{y\in S''} g(y)\right].$$

本节的定理可用来建立幂级数相乘的法则。假设级数

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$
$$g(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots$$

对 $|x| < R$ 是收敛的。先不论其收敛性，按如下多项式相乘法则把两幂级数相乘：

$$b_0 f(x) = a_0 b_0 + a_1 b_0 x + \cdots + a_n b_0 x^n + \cdots$$

$$b_1 x f(x) = \qquad a_0 b_1 x + \cdots + a_{n-1} b_1 x^n + \cdots$$

$$\vdots$$

$$b_n x^n f(x) = \qquad a_0 b_n x^n + \cdots$$

(l,m,n) 相加得到级数

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \cdots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots$$
$$+ a_n b_0)x^n + \cdots$$

用和的表示法，这一乘积写作

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j x^{i+j}.$$

令$i+j=n$，合并n次项，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n.$$

我们将证明上式确是$f(x)g(x)$的展开式。

定义 设给定幂级数$\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x-C)^i$，$\sum_{j=0}^{\infty}b_j(x-C)^j$，称级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)(x-C)^n \tag{9·30}$$

为所给两级数的哥西乘积。

定理9·53 设f,g的幂级数展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(x-C)^n,\quad g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}d_n(x-C)^n$$

对$|x-C|>R$，$(R>0)$收敛.那么对于$|x-C|<R$，积$f(x)g(x)$的幂级数展开是$f(x)$与$g(x)$之展开式的哥西乘积。

证明 既然对$|x-C|<R$，给出的两个级数是绝对收敛的。由此导出

$$f(x)=\sum_{i\in N_0}C_i(x-C)^i,\quad g(x)=\sum_{j\in N_0}d_j(x-C)^j$$

在定理9·52中，取$S'=\mathrm{N}_0$，$S''=\mathrm{N}_0$，那么对$(i,j)\in\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0$，$h_{ij}=C_i d_j(x-C)^{i+j}$定义$h$.因而对满足$|x-C|<R$

的每一固定x，有

$$f(x)g(x)=\sum_{(i;j)\in N_0\times N_0} C_i d_j (x-C)^{i+j}.$$

现在对$\forall n\in \mathrm{N}_0$，定义$S_n=\{(i,\ j)\in \mathrm{N}_0\times \mathrm{N}_0: i+j=n\}$。那么由一般结合律（定理9·50）得出函数

$$u_n(x)=\sum_{(i;j)\in S_n} C_i d_j (x-C)^{i+j}$$

在N_0上有和，并且

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n\in N_0}\left(\sum_{(i;j)\in S_n} C_i d_j\right)(x-C)^n,$$

$$|x-C|<R.$$

这就是形如（9·30）的公式。

假若g在$|x-C|<R$内可表示为幂级数，b是常数。那么由定理9·53，$[g(x)-b]^n$在$|x-C|<R$内可表示为幂级数，这一幂级数可由$[g(x)-b]$的幂级数展开的逐次哥西乘积得到。按这一方法能够获得复合函数的幂级数展开。如果对$|x-b|<R_0(R_0>0)$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-b)^n,$$

那么构成级数

$$f(g)=\sum_{n\in N_0} a_n(g-b)^n. \tag{9·31}$$

把$[g(x)-b]^n$的由哥西乘积得到的幂级数代入（9·31）中，当$|g(C)-b|<R_0$时，所得级数对充分小的$|x-C|$中的x收

敛于复合函数$f[g(x)]$。

容易用定理9·52将二重级数的结果推广到多重级数。因此，下面只讨论二重级数。

若二重级数的项$u_{mn}=C_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$，这里$C_{mn}$，$a$，$b$，$x$，$y$都属于$\mathrm{R}_1$，称

$$\sum_{m;n=0}^{\infty} C_{mn}(x-a)^m(y-b)^n$$

为二重幂级数。类似地定义三重、四重及n—重幂级数。下面两个定理可从先前关于收敛性的结果直接导出。

定理9·54 设二重幂级数$\sum\limits_{m;n=0}^{\infty} C_{mn}x^my^n$对于$x=x_1$，$y=y_1$ $(x_1\neq 0, y\neq 0)$是绝对收敛的，$R=\{(x,y): |x|<|x_1|, |y|<|y_1|\}$。那么级数在$R$上绝对收敛，且以$C_{mn}x^my^n$为项的函数关于$R$在$\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0$上有和。

令定理9·54中$x=x'-a$，$y=y'-b$可以得到关于点(a,b)的二重幂级数的同样的结果。

定理9·55（二重幂级数的逐项微分） 设二重幂级数

$$f(x,y)=\sum_{m;n=0}^{\infty} C_{mn}(x-a)^m(y-b)^n \qquad (9·32)$$

在$S=\{(x,y): |x-a|<r, |y-b|<t\}$上绝对收敛。那么$f$在$S$内有各阶偏导数，且这些偏导数可由（9·32）逐项微分得到，逐项微分得到的级数在S内绝对收敛，其中

$$C_{mn}=\frac{1}{m!\,n!}\left[\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m\partial y^n}\right]_{x=a,\,y=b}.$$

例1 求$f(x,y)=e^{xy}(a=1,b=0)$的幂级数展开，计算到三次项。

解 由计算得：$f(1,0)=1$，$f_x(1,0)=0$，$f_y(1,0)=1$，$f_{xx}(1,0)=0$，$f_{xy}(1,0)=1$，$f_{xxx}(1,0)=f_{xyx}(1,0)=0$，$f_{xyy}(1,0)=2$，$f_{yyy}(1,0)=1$。因此

$$e^{xy}=1+y+(x-1)y+\frac{1}{2!}y^2+(x-1)y^2+\frac{1}{3!}y^3+\cdots.$$

例2 证明：对一切x,y，有

$$\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(x+y)^K}{K!}=\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right),$$

因此$e^{x+y}=e^x\cdot e^y$。

解 据定理9·52，对任何x,y，有

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)=\sum_{m;\,n=0}^{\infty}\frac{x^my^n}{m!n!}.$$

应用定理9.49，并令$n=p-m$可得

$$\sum_{m;\,n=0}^{\infty}\frac{x^my^n}{m!n!}=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{p}\frac{x^my^{p-m}}{m!(p-m)!}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\sum_{m=0}^{p}\frac{p!x^my^{p-m}}{m!(p-m)!}$$

$$=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(x+y)^p}{p!}.$$

习　题

习题1—6，求给定的函数$f(x,y)$的幂级数展开，要求到三次项，取$a=b=0$。

1．$f(x,y)=e^{x}\cos y$，

2．$f(x,y)=(1-x-2y+x^{2})^{-1}$。

3．$f(x,y)=e^{-x}\sec y$。

4．$f(x,y)=e^{-2x}\log(1+y)$。

5．$f(x,y)=\cos(xy)$。

6．$f(x,y)=(1+x+y)^{-\frac{1}{2}}$。

7．对三重级数叙述与证明如定理9·46同样的定理。

8．设$S=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$且$u:S\to\mathbf{R}_1$其$u_{mn}=\dfrac{1}{mn^{4}}$。证明二重级数

$$\sum_{m;\,n=1}^{\infty}\frac{1}{mn^{4}}$$不收敛，因此u在S上没有和。

9．证明定理9·48。

10．详细地写出定理9·49中$w_r=\sum\limits_{m+n=r}u_{mn}$的证明。

11．证明定理9·50。然后令$S'=\mathbf{N}$及对所有x，$S_x=\mathbf{N}\times\mathbf{N}$，以此对三重级数导出类似于定理9·49的定理。

12．令$\mathbf{Z}$表示所有整数的集。在定理9·50中之$S'=\mathbf{N}_0$，$S_x=\mathbf{Z}$.证明形如$\sum\limits_{m=0}^{\infty}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}u_{mn}$的“二重级数”的收敛性定理。

13．证明定理9·51。

14．如果在定理9·51中，选取$S'=\mathbf{N}$，$S''=\mathbf{N}$，并定义$f(m,n)$

$=(-1)^{m+n}/(m^2+n^2)$。定理的条件是否成立？

15. 证明定理9·52。

16. 用定理9·52求$e^x\cos y$关于(0，0)点的二重幂级数的展开式。

17. 证明定理9·54。

18. 叙述并证明二重幂级数逐项积分的定理。

19. 证明定理9·55。

20. 用幂级展开式证明 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$。

第十章　伏里叶级数

§10·1　展开公式

当函数f可以展开成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n,\quad 0<|x-a|<R,\qquad(10\cdot1)$$

的幂级数时(R是收敛半径)，称$f(x)$在$|x-a|<R$内是解析的。(10·1) 中的$c_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)$.解析函数具有比无限可微性质还要强的性质。为了得到不光滑函数的展开，本章研究三角函数项级数。下列函数称为三角函数系：

$1, \cos x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \cdots$

$\sin x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \sin nx,\ \cdots.$

形如

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\qquad(10\cdot2$$

的级数称为三角级数，系数a_n，b_n是常数。三角函数系都是周期函数，它们的共同周期是2π，因此我们可只在$[-\pi,\pi]$区间上讨论级数 (10·2) .如果级数 (10·2) 的和函数为$f(x)$，为了用$f(x)$表示出系数a_n，b_n，要利用三角函数系的正交

性：

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}\pi, & \text{当} m=n. \\ 0, & \text{当} m\neq n.\end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0 \qquad m,\ n=1,\ 2,\ \cdots.$$

上述正交性的诸等式容易由初等积分法证实。借助于正交性可求出（10·2）的系数a_n，b_n的表达式。

定理10·1 设f是$I=\{x:-\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$上的连续函数，$f(-\pi)=f(\pi)$。如果级数（10·2）于$I$上一致收敛于$f(x)$，

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (10\cdot3)$$

那么

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt dt, \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots. \qquad (10\cdot4)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nt dt, \qquad n=1,\ 2,\ \cdots. \qquad (10\cdot5)$$

证明 级数的部分和记为$S_K(x)$，

$$S_K(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{K}a_m\cos mx+b_m\sin mx.$$

因为$S_K(x)$一致收敛于$f(x)$，注意到

$$|S_K(x)\cos nx-f(x)\cos nx|=$$

$$|S_K(x)-f(x)|\cdot|\cos nx|\leqslant|S_K(x)-f(x)|,$$

可知对$\forall n$，当$K\to\infty$时$S_K(x)\cos nx$一致收敛于$f(x)\cos nx$
同样，$S_K(x)\sin nx$一致收敛于$f(x)\sin nx$。
因此

$$f(x)\cos nx=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx\cos nx$$
$$+b_m\sin mx\cos nx),$$

$$f(x)\sin nx=\frac{a_0}{2}\sin nx+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx\sin nx$$
$$+b_m\sin mx\sin nx).$$

对这两个一致收敛的级数从$-\pi$到π逐项积分可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\pi a_n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\pi b_n.$$

除以π便是（10•4）、（10•5）。

由（10•4），（10•5）给出的数a_n，b_n称为f的伏里叶系数，这时（10•3）的级数称为f的伏里叶级数。

当f是在$I=\{x:-\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$上可积的函数，那么由（10•4）及（10•5）式可以确定a_n，b_n，但（10•3）的伏里叶级数可能不收敛于f。我们表示成

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

理论研究的中心问题应当是确定f具有什么性质，f的伏里叶级数收敛于f。

定义 称函数f在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上是分段连续的$\Longleftrightarrow$(i) $\exists I$的划分：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

使f在每一子区间$I_K=\{x: x_{K-1}<x<x_K\}$上连续；(ii)在每个分点x_0，x_1，…，x_n处，f的单边极限存在。

分别以$f(x_{K-})$、$f(x_{K+})$表示f在间断点x_K点的左、右极限，称$f(x_{K+})-f(x_{K-})$为f在x_K点的跃度。于x_K处将f的值改成

$$f(x_K)=\frac{1}{2}[f(x_{K+})-f(x_{K-})],$$

称f为标准化的。图10·1是标准化的函数的示意图。今后总假定分段连续函数是标准化的。由于改变被积函数的有限个

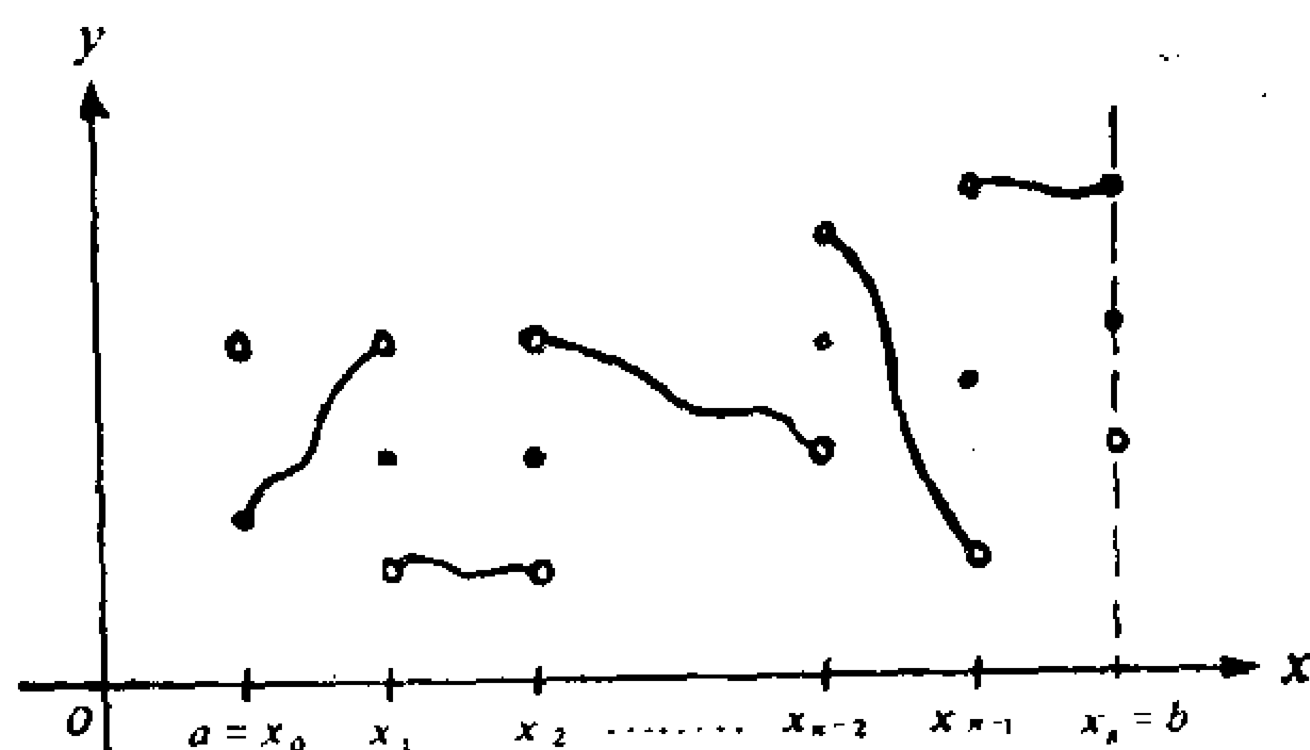


图 10·1

点上的值不影响积分值，分段连续的函数，标准化之后，它的伏氏系数并不改变。

定义 函数f称为在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上是分段光滑的

$\Longleftrightarrow$(i) f是分段连续的；(ii) f'在每个子区间$I_K=\{x: x_{K-1}<x<x_K\}$内存在并且连续。称f在I上光滑$\Longleftrightarrow$ f及f'都在I上连续。

函数的伏氏级数的收敛性问题将于§10·3中讨论，这里先形式地讨论求f的伏氏级数的步骤。

设f是$I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$上分段连续的函数。如下定义$f$的周期延拓：

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{当} -\pi\leqslant x<\pi, \\ f(x-2\pi) & \text{当} x \overline{\in} I. \end{cases}$$

然后在$-\pi$, π及所有其他间断点把$\tilde{f}$标准化，这样$\tilde{f}$对$-\infty<x<\infty$都有定义。

例1 求函数$f(x)=x$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$的伏里叶级数。

解 把f按周期延拓并标准化为$\tilde{f}$(图10·2)。求出

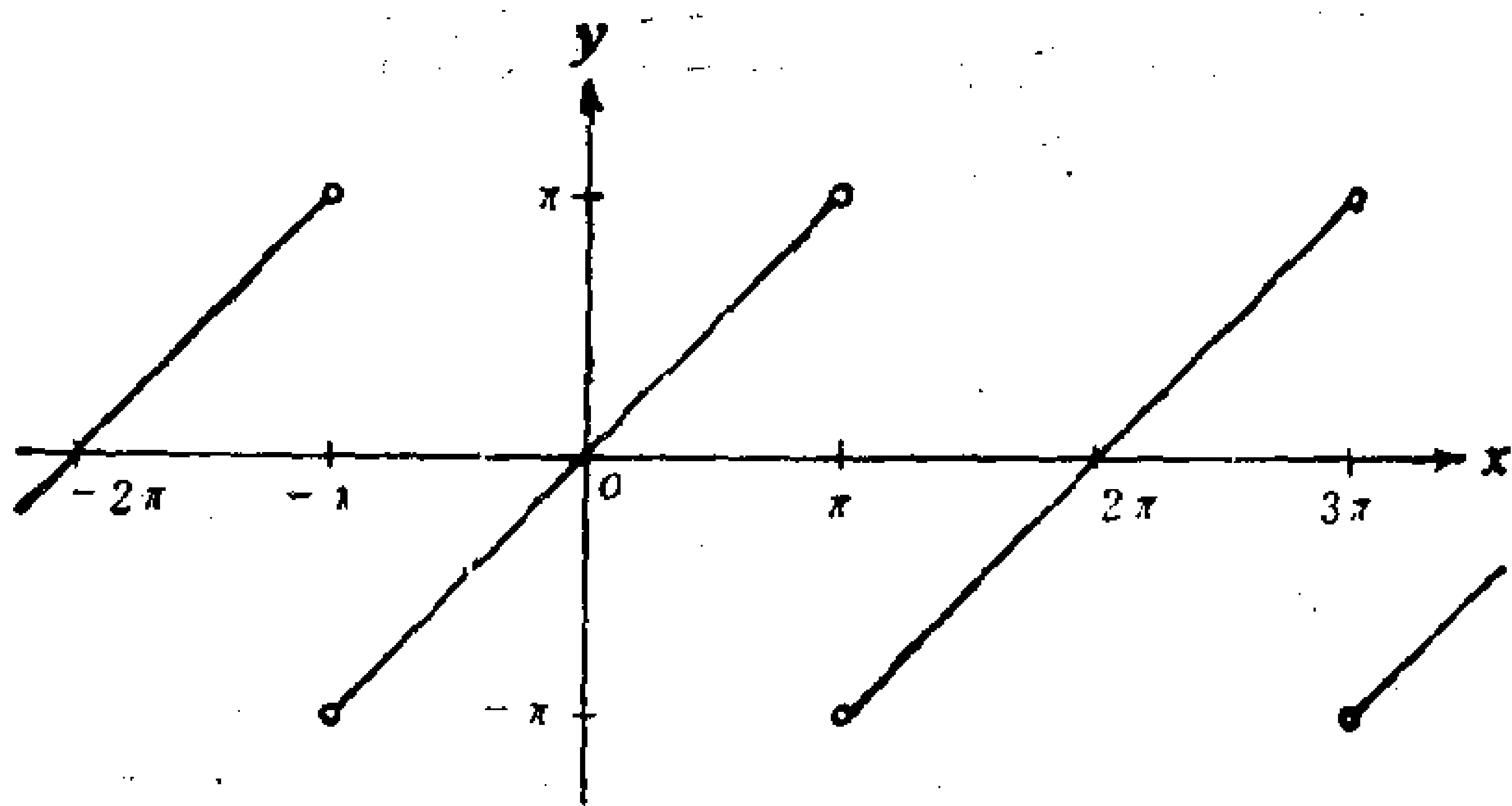


图 10·2

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nx dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nx dx,$$

按部分积分法，得出$a_0=0$及

$$a_n=0,\quad b_n=(-1)^{n-1}\frac{2}{n},\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

所以

$$f(x)\sim 2\left[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right],\quad -\pi<x<\pi.$$

对于$\tilde{f}(x)$，上面的级数允许x取任何实数. 在§10·3就会知道级数在$-\pi<x<\pi$内收敛，而当$x=\pm\pi$时显然级数的值为零。

例1中$f(x)$是奇函数，$a_n=0$. 一般地当函数是奇函数($\forall x, f(-x)=-f(x)$)，或是偶函数($f(-x)=f(x)$)，相应的$f(x)\cos nx$，及$f(x)\sin nx$则是奇或偶函数，a_n，b_n的计算可以得到简化。

例2 求函数$f(x)=|x|$，$x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$的伏里叶级数。

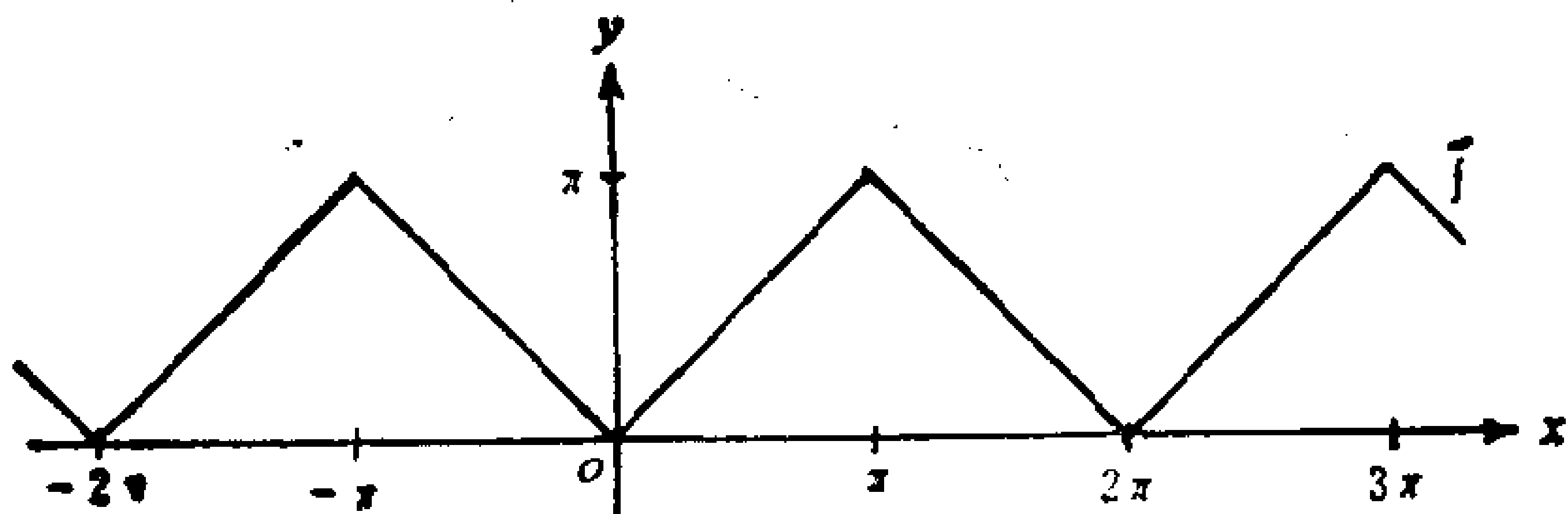


图 10·3

解 f的周期延拓如图10·3所示。由f是偶函数，那么$f(x)\sin nx$是奇函数，$f(x)\cos nx$是偶函数。因此对$\forall n$，$b_n=0$。而$a_0=\pi$及

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx dx.$$

按部分积分法，求得

$$a_n=\frac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi-1]=\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-4}{(2K+1)^2\pi}, & n=2K+1,\\ 0, & n=2K.\end{cases}\quad K=0,1,2,\cdots.$$

于是f的伏里叶级数是

$$|x|\sim\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots+\frac{\cos(2K+1)x}{(2K+1)^2}\right.$$

$$\left.+\cdots\right],\qquad -\pi\leqslant x\leqslant\pi.$$

于§10·3我们证明上述级数收敛于$|x|$。取$x=0$便得出计算π的著名公式

$$\frac{1}{8}\pi^2=\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right]$$

习　　题

习题1—10，求所给函数f的伏里叶级数。

1. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{当} x\in I_1=\{x: -\pi\leqslant x<0\},\\ 1, & \text{当} x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant\pi\}.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{当} x\in I_1=\{x: -\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}\},\\ 1, & \text{当} x\in I_2=\{x: \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\}.\end{cases}$

3. $f(x)=x^2$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

4. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{当} x\in I_1=\{x: -\pi\leqslant x<0\},\\ x, & \text{当} x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant\pi\}.\end{cases}$

5. $f(x)=|\cos x|$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

6. $f(x)=x^3$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

7. $f(x)=e^{2x}$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

8. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{当} x\in I_1=\{x: -\pi\leqslant x<0\},\\ \sin x, & \text{当} x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant\pi\}.\end{cases}$

9. $f(x)=\sin^2 x$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

10. $f(x)=x\sin x$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$.

11. 验证等式

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx=\begin{cases}\pi, & 当 m=n,\\ 0, & 当 m\neq n.\end{cases}$$

12. (a) 求$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\pi}{4}, & 当 x\in I_1=\{x: -\pi\leqslant x<0\}\\ \dfrac{\pi}{4}, & 当 x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant\pi\}\end{cases}$

的伏里叶级数；

(b) 假定(a)的级数收敛于f（标准化的），证明

(i) $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$,

(ii) $\dfrac{\pi}{3}=1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$,

(iii) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi=1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{17}+\cdots$.

13. (a) 求函数$f(x)=x+x^2$, $x\in I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$ 的伏里叶级数；

(b) 假定(a)的级数收敛于f（标准化的），证明

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

§10·2 伏里叶正弦与余弦级数，区间的改变

如果求定义域为$J=\{x: 0\leqslant x\leqslant\pi\}$上的函数$f$的伏里

叶级数，必须把f的定义域变为$I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$。为此，可以在$I'=\{x: -\pi\leqslant x<0\}$上灵活地定义$f$。例如当$x\in I'$令$f=0$；另一种选择是定义$f$为$I$上的偶函数或奇函数。这样做的好处是：对偶函数其$b_n=0$，$f$的伏里叶级数仅有余弦项；对奇函数其$a_n=0$，$f$的伏里叶级数仅有正弦项。对原来的$f$的定义域$J$是这伏里叶展开的半幅级数。这样的仅含余弦或仅含正弦的级数分别称为余弦或正弦级数。我们举例说明求出余弦、正弦级数的步骤。

例1 设函数

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{当} x\in I_1=\{x: 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\}\\ 1 & \text{当} x\in I_2=\{x: \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\pi\},\end{cases}$$

求f的余弦级数。

解 推广f为偶函数，如图10·4所示，那么函数被标准

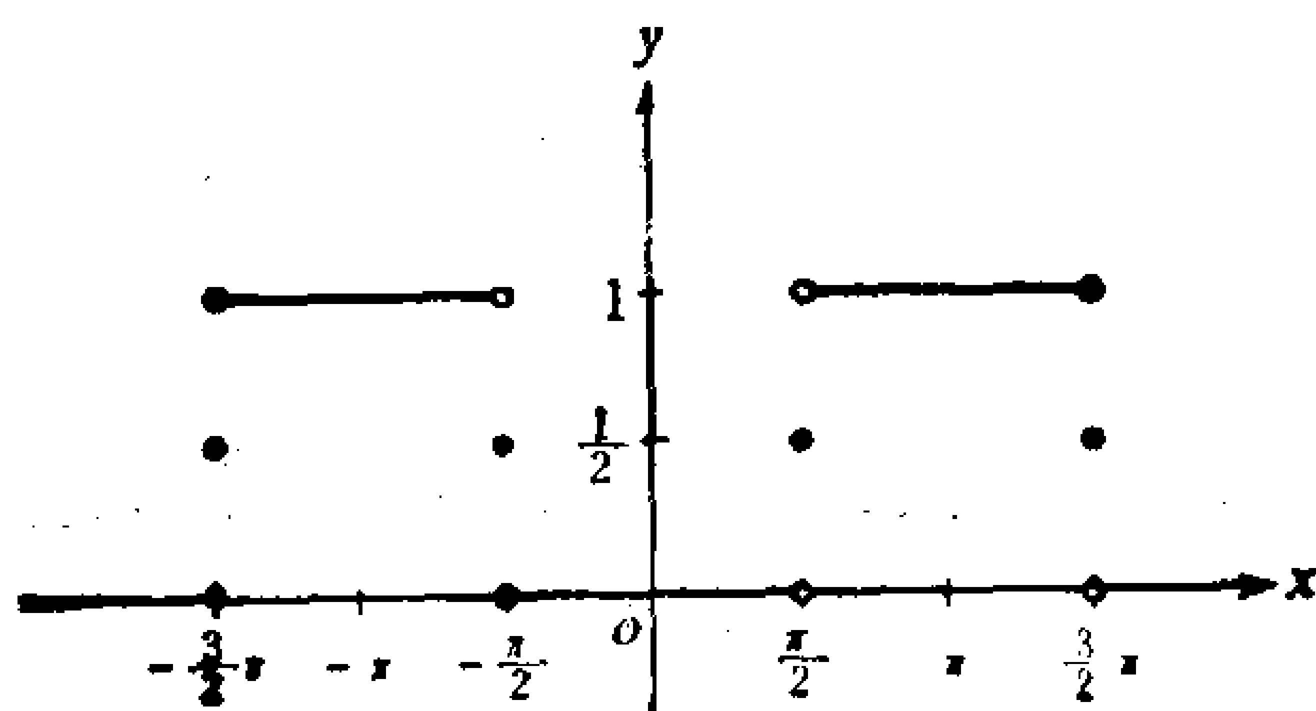


图 10·4

化为$\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\tilde{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\tilde{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$。因为$\tilde{f}$是偶函数

$b_n=0$，$n=1, 2, \cdots$。而

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx,\quad n=0, 1, 2, \cdots.$$

由简单计算得：$a_0=1$，

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nx dx=\begin{cases}0, & 当n=2K,\\ \frac{2(-1)^{K+1}}{2K+1}, & 当n=2K+1,\\ & K=0, 1, 2, \cdots.\end{cases}$$

于是

$$\tilde{f}(x)\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1}-\frac{\cos 3x}{3}+\frac{\cos 5x}{5}-\cdots\right],$$

$x\in I_1\cup I_2$。

例2 求例1中f的正弦级数。

解 推广f为奇函数，如图10·5所示，其标准化为，

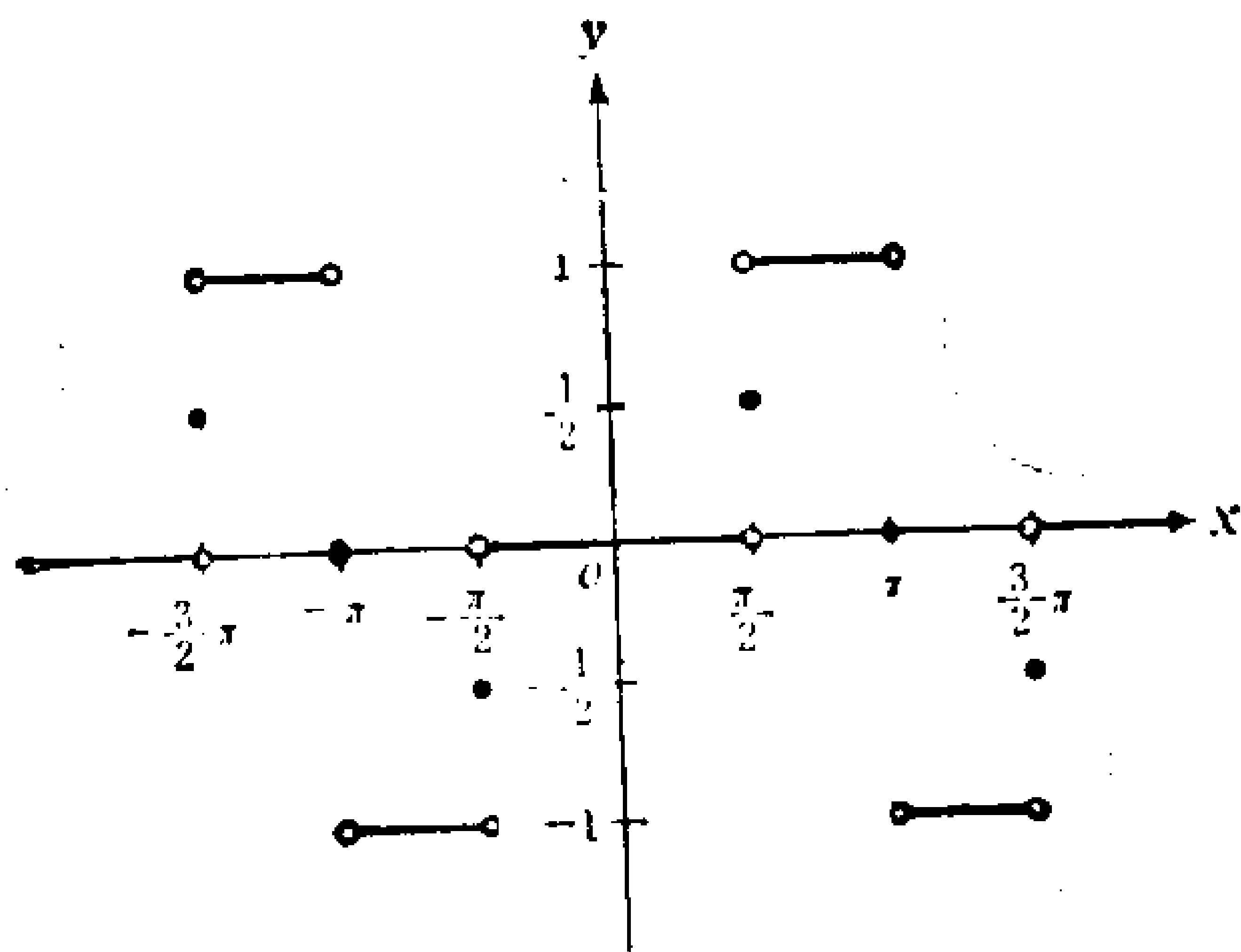


图 10·5

$\tilde{f}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)=\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\cdots=\frac{1}{2}$, $\tilde{f}(-\pi)=\tilde{f}(\pi)=\cdots=0$

以及$\tilde{f}\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\tilde{f}\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\cdots=-\frac{1}{2}$. $\tilde{f}$为奇函数，$a_n=0$，

$n=0, 1, 2, \cdots$.

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin nx dx,$$

算得

$$b_n=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & \text{当}n=2K-1,\\ \dfrac{2}{K\pi}[(-1)^K-1], & \text{当}n=2K, K=1,2,\cdots.\end{cases}$$

于是

$$\tilde{f}(x)=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}-2\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}\right.$$
$$\left.-\frac{2\sin 6x}{6}+\frac{\sin 7x}{7}+\cdots\right],\quad x\in I_1\cup I_2.$$

如果f是定义在区间$J=\{x: c-\pi<x<c+\pi\}$上的分段光滑的函数，可以构造f的周期延拓$\tilde{f}$，并按公式(10·4)与(10·5)求$\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 由三角函数系有2π的周期，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$也可按以下公式计算：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi}f(x)\cos nx\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{c-\pi}^{c+\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

例3 给定$f(x)=x$，$x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 2\pi\}$。求$f$的伏里叶级数。

解 按周期延拓f并把它标准化，如图10·6所示。计算它的伏氏系数

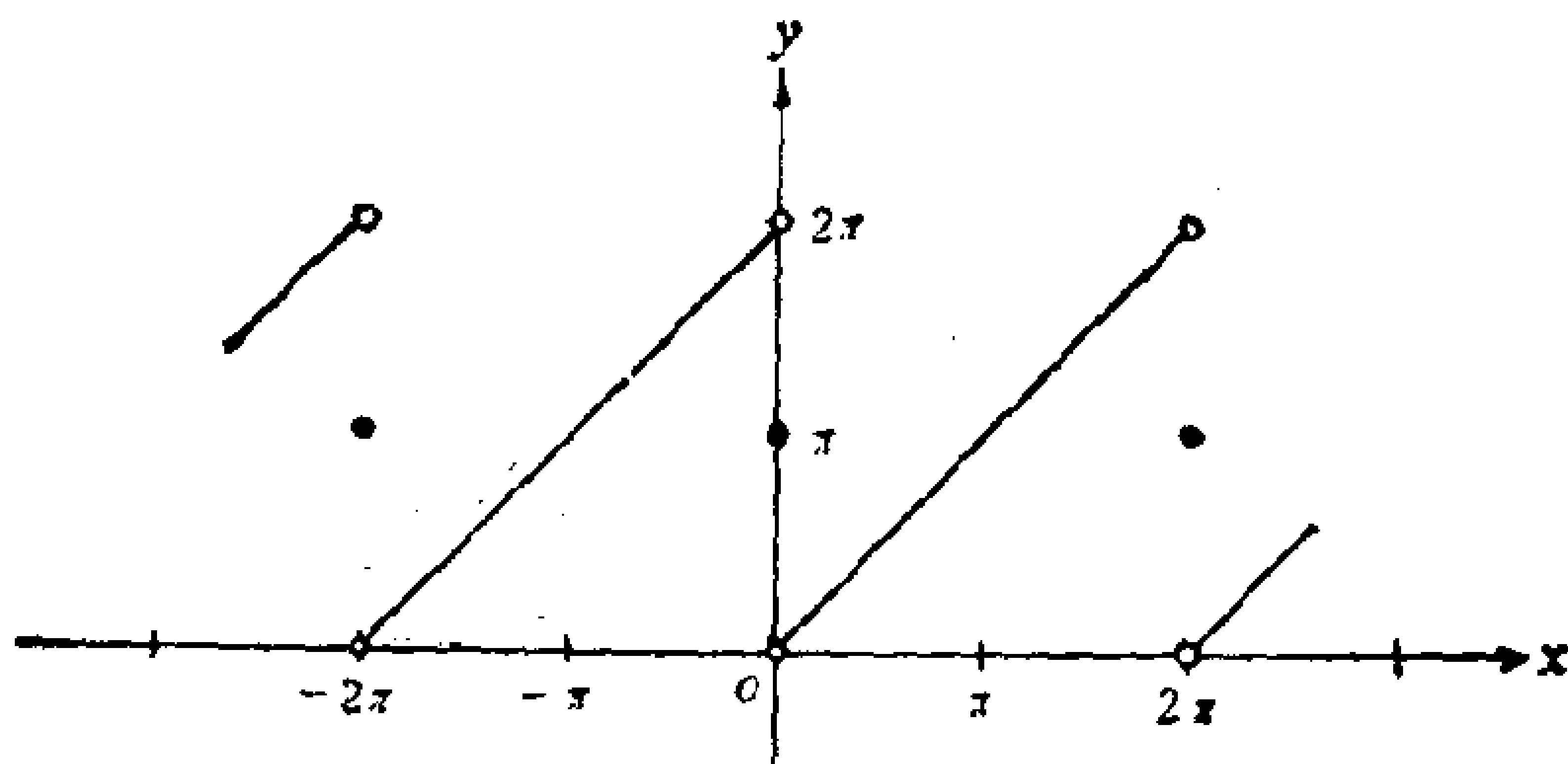


图 10·6

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}xdx=2\pi,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\cos nx\,dx=0,\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{2}{n},\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

于是

$$x\sim\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\qquad 0<x<2\pi.$$

若函数f在区间$I=\{x: -L\leqslant x\leqslant L\}(L>0)$上分段连续，可引用变换$y$及$g(y)$：

$$y=\frac{\pi}{L}x;\quad f(x)=f\left(\frac{Ly}{\pi}\right)=g(y)=g\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$y=\frac{\pi x}{L}$把I映象为$I'=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$，$g$是$I'$上分段连续的函数。因此

$$g(y)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos ny+b_n\sin ny),\quad y\in I',\qquad(10\cdot6)$$

其系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\cos ny\,dy,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(y)\sin ny\,dy.$$

代回原变量x及函数f，得到

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx,\quad b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx,$$

级数（10·6）成为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\quad x\in I.$$

例4 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & \text{当}x\in I_1=\{x: -1\leqslant x<0\},\\ x-1, & \text{当}x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}.\end{cases}$

求f关于$I=I_1\cup I_2$的伏里叶级数。

解 f的周期延拓并标准化如图10·7所示。又f是奇函数，

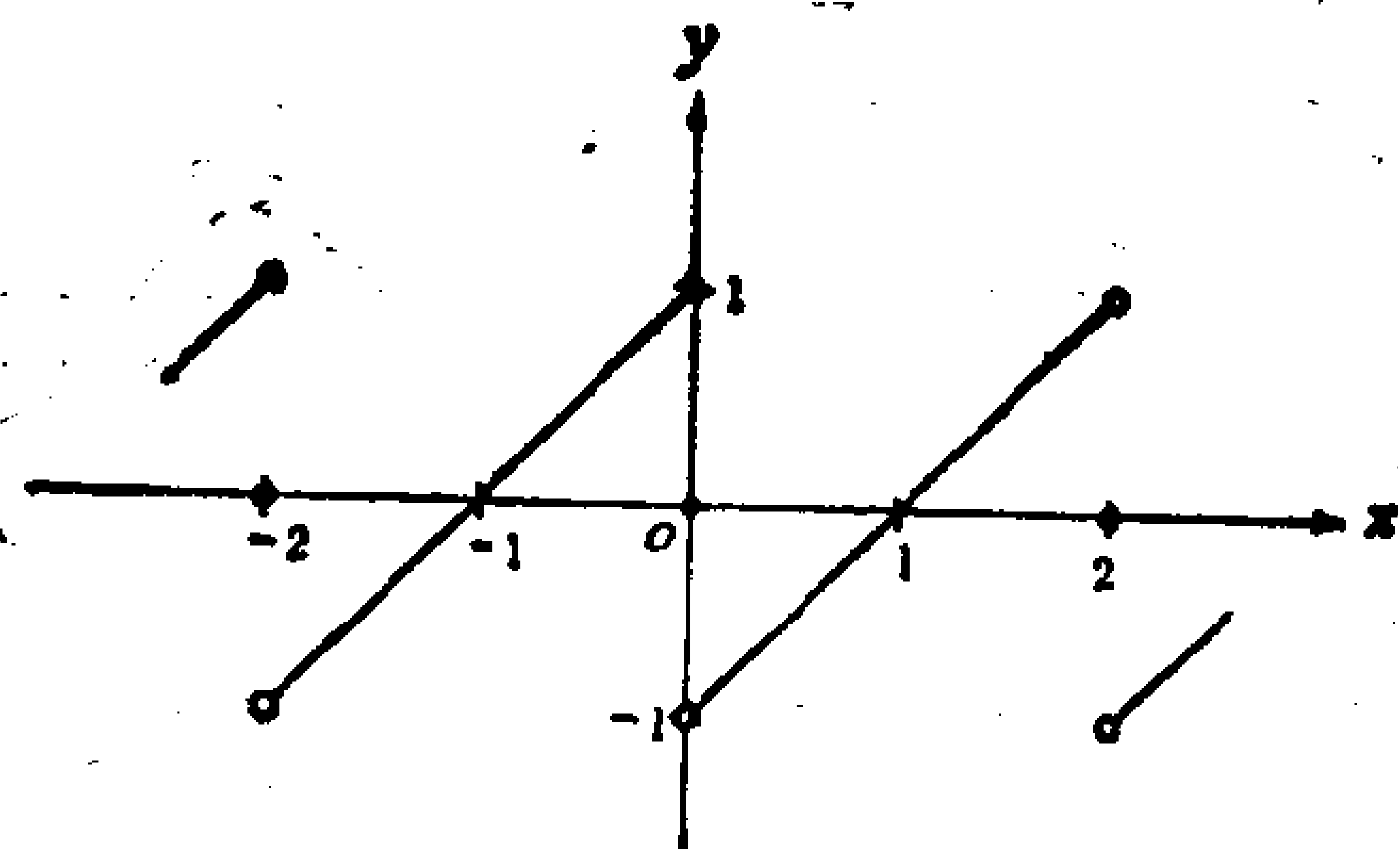


图 10·7

所以$a_n = 0$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，

$$b_n = 2\int_0^1 (x-1)\sin\frac{n\pi x}{1}dx = -\frac{2}{n\pi},\ n = 1, 2, \cdots.$$

于是

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n},\ x \in I.$$

习　　题

习题1—4，求函数f的余弦级数并画出f的标准化的延拓草图。

1. $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in I_1 = \{x: 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}\} \\ 0, & x \in I_2 = \{x: \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi\} \end{cases}$$

2. $f(x)=\sin x$, $x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

3. $f(x)=x$, $x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

4. $f(x)=x^3$, $x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

习题5—8，求函数f的正弦级数并画出f的标准化的延拓草图。

5. $$f(x)=\begin{cases}1, & x\in I_1=\{x: 0\leqslant x<\frac{\pi}{2}\},\\ -1, & x\in I_2=\{x: \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \pi\}.\end{cases}$$

6. $f(x)=\cos x$, $x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

7. $f(x)=x$, $x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

8. $f(x)=x^3$, $x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant \pi\}$.

习题9—12，求在区间$I=\{x: -L<x<L\}$上函数f的伏里叶级数。

9. $$f(x)=\begin{cases}1, & x\in I_1=\{x: -2\leqslant x<0\},\\ -1, & x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant 2\},\end{cases}$$

10. $$f(x)=\begin{cases}0, & x\in I_1=\{x: -2\leqslant x<0\},\\ x, & x\in I_2=\{x: 0\leqslant x\leqslant 2\}.\end{cases}$$

11. $f(x)=x^2$, $x\in I=\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

12. $f(x)=1-|x|$, $x\in I=\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$.

§ 10·3 收敛性定理

这一节，建立判定伏里叶级数收敛性的定理，这些定理说明具有何种性质的函数能够展开成伏里叶级数。

定理10·2 （贝塞尔不等式） 设定义域为$I=\{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$的函数$f$，$f$及$f^2$在$I$上可积，$f$的伏氏级数是

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

那么有下列贝塞尔不等式成立：

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \tag{10·7}$$

证明 用$S_n(x)$表示这个伏氏级数的第n个部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{n}(a_K\cos kx+b_K\sin kx).$$

这样便有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-S_n(t)]^2dt=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt-2\int_{-\pi}^{\pi}f(t)S_n(t)dt$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}S_n^2(t)dt. \tag{10·8}$$

由伏氏系数的定义可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_n(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$+\sum_{K=1}^{n}\left(a_K\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos Kt dt\right.$$

$$\left.+b_K\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin Kt dt\right)$$

$$=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)\text{。} \qquad (10\cdot9)$$

将$S_n^2(t)$按多项式乘法展开，并由三角函数系的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n^2(t)dt=\int_{-\pi}^{\pi} f(t)S_n(t)dt\text{。} \qquad (10\cdot10)$$

综合（10•8），（10•9）及（10•10）便得

$$0\leqslant\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)-S_n(t)]^2dt=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt-\pi\left\{\frac{1}{2}a_0^2\right.$$

$$\left.+\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)\right\}\text{。} \qquad (10\cdot11)$$

因此对$\forall n$都有

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{K=1}^{n}(a_K^2+b_K^2)\leqslant\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt,$$

这说明$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{K=1}^{\infty}(a_K^2+b_K^2)$收敛，并且

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{K=1}^{\infty}(a_K^2+b_K^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(t)dt.$$

由级数收敛的必要条件，贝塞尔不等式说明，任意的在I上平方可积的函数f的伏氏系数，当$n\to\infty$时都有$a_n\to 0$，$b_n\to 0$。

在研究伏里叶级数收敛性中，经常出现狄里赫莱核D_n，其定义为

$$D_n: x\to\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

容易验证三角恒等式：

$$\frac{1}{2}+\sum_{K=1}^{n}\cos kx\equiv\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}=D_n(x).\quad(10\cdot12)$$

狄里赫莱核具有如下性质：

（i） $D_n(x)$是关于x的偶函数；

（ii） $\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)dx=\pi$；

（iii） D_n以2π为周期。

引理10·1 设$S_n(x)$是以2π为周期的分段连续函数f的伏氏级数第n个部分和。那么

$$S_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u) - f(x^+)]D_n(u)du + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-u) - f(x-)]D_n(u)du. \qquad (10 \cdot 13)$$

证明 因为$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{K=1}^{n}(a_K\cos kx + b_K\sin kx)$，

把$a_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt dt$，$b_K = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt dt$代入$S_n(x)$得

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n}\cos kt\cos kx + \sin kt\sin kx\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

令$t = x + u$，上式成为

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)\left[\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n}\cos ku\right]du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+u)D_n(u)du.$$

因为D_n，f都以2π为周期，积分区间可以变为$I=\{u: -\pi \leqslant u \leqslant \pi\}$。于是

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+v)D_n(v)dv$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+u)D_n(u)du.$$

再将v换为$-u$并注意$D_n(-v)=D_n(v)$，上式第一个积分成为$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)D_n(u)du$，于是

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+u)+f(x-u)]D_n(u)du.$$

由$D_n(x)$的性质(ii)，$\frac{1}{2}f(x+)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+)D_n(u)du$，$\frac{1}{2}f(x-)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-)D_n(u)du$，于是

$$S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[(f(x+u)$$

$$-f(x+)]+(f(x-u)-f(x-))]D_n(u)du.$$

定理10·3 设f是分段光滑标准化的以2π为周期的函数，那么对每一x，f的伏氏级数收敛于$f(x)$。

证明 对$\forall x$，证明当$n\to\infty$，$S_n(x)-f(x)\to 0$。把(10·13)式写成

$$S_n(x)-f(x)=S_n(x)-\frac{1}{2}[f(x+)+f(x-)]=T_n(x)$$
$$+R_n(x)$$

其中

$$T_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+u)-f(x+)]D_n(u)du,$$

$$R_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x-u)-f(x-)]D_n(u)du.$$

由$D_n(u)$定义可得

$$T_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-u)-f(x-)}{2\sin\frac{1}{2}u}\sin(n+\frac{1}{2})udu$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x-u)-f(x-)}{2\sin\frac{1}{2}u}(\sin nu\cos\frac{1}{2}u$$

$$+\cos nu\sin\frac{1}{2}u)du. \qquad (10\cdot14)$$

如下定义g_1，g_2：

$$g_1(x,\ u)=\frac{f(x-u)-f(x-)}{2\sin\frac{1}{2}u}\cos\frac{1}{2}u,$$

$$g_2(x,\ u)=\frac{1}{2}(f(x-u)-f(x-)).$$

$g_1(x,\ u)$关于u可能除了$u=0$点之外，是分段光滑的.而由

洛比达法则可得

$$g_1(x, 0+) = -f'(x-),$$

即g_1是处处分段光滑的。现在把（10·14）写成

$$T_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [g_1(x,u)\sin nu + g_2(x,u)\cos nu]du.$$

$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g_1(x,u)\sin nudu$ 可看作$\frac{1}{2}g_1(x,u)$的正弦级数的第n个系数，$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi g_2(x,u)\cos nudu$可看作$\frac{1}{2}g_2(x,u)$的余弦级数的第$n$个系数，根据贝塞尔不等式，当$n$趋向于无穷时，它们都趋向于零，因此$T_n(x)\to 0$.同理，当$n\to\infty$时，$R_n(x)\to 0$。定理证迄。

一个比定理10·3条件更弱的定理可借助于下列应用广泛的黎曼引理得到。

定理10·4（黎曼—勒贝格引理）　设f定义在$I=\{x: -\pi\leqslant x\leqslant\pi\}$上且$|f|$在$I$上可积。设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是$f$的伏氏系数。那么当$n\to\infty$时，$a_n\to 0$，$b_n\to 0$。

证明　当f为有界可积时，f^2为有界可积，据贝塞尔不等式立即得知当$n\to\infty$时$a_n\to 0$，$b_n\to 0$。这里要讨论的是$|f|$无界，在I上广义可积的情况。

$|f|$在I上无界时，其可积的定义在第十一章详细讨论。现在如下规定它的意义：对$\forall$正数N，定义

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x) & \text{当} |f(x)|\leqslant N, \\ 0 & \text{当} |f(x)|>N. \end{cases}$$

$|f(x)|$可积指$f_N(x)$可积且$\lim\limits_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f_N(x)|dx$存在，并且定义

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx=\lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f_N(x)|dx.$$

由此，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$充分大的N，使

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_N(x)|dx=\int_{-\pi}^{\pi}[|f(x)|-|f_N(x)|]dx<\frac{\varepsilon}{2}.$$

既然$|f_N(x)|$以N为界，由此导出

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f_N(x)|^2dx\leqslant N\int_{-\pi}^{\pi}|f_N(x)|dx\leqslant N\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx<\infty.$$

由贝塞尔不等式，$f_N(x)$的伏氏系数当$n\to\infty$时趋向于零，即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0$，使当$n>n_0$便有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f_N(x)\cos nxdx\right|<\frac{\varepsilon}{2},\quad\left|\int_{-\pi}^{\pi}f_N(x)\sin nxdx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对$\forall n>n_0$及充分大的N，有

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx\right|\leqslant\left|\int_{-\pi}^{\pi}f_N(x)\cos nxdx\right|$$

$$+\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f_N(x))\cos nxdx\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_N(x)||\cos nx|dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon+\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_N(x)|dx<\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon.$$

同样可得$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx\right| < \varepsilon$。

借助于黎曼—勒贝格引理，建立下面的收敛准则。

定理10·5（狄尼判别法） 设f是标准化的以2π为周期的函数，且积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+u)-f(x+)}{\sin\frac{1}{2}u}\right|du,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x-u)-f(x-)}{\sin\frac{1}{2}u}\right|du. \qquad (10\cdot15)$$

对于x的值存在。那么f的伏里叶级数在x点收敛于$f(x)$。

证明 重复定理10·3直到（10·14）式的证明，得到定理10·3中的

$$S_n(x)-f(x)\equiv T_n(x)+R_n(x),$$

$$T_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(g_1(x,u)\sin nu+g_2(x,u)\cos nu)du,$$

$$g_1(x,u)=\frac{f(x-u)-f(x-)}{2\sin\frac{1}{2}u}\cos\frac{1}{2}u,$$

$$g_2(x,u)=\frac{1}{2}(f(x-u)-f(x-)).$$

由（10.15）的积分有限，对g_1，g_2应用黎曼—勒贝格引理，可得$n\to\infty$时$T_n(x)\to 0$。同理$R_n(x)\to 0$。于是定理获证。

注 (i) 由于量 $\left|\frac{\sin\frac{u}{2}}{u}\right|$ 是有界的，条件 (10·15) 可以换成

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}\right|du<+\infty,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{f(x-u)-f(x-)}{u}\right|du<+\infty. \tag{10·16}$$

(ii) 重要的是找出关于f自身的简单条件来代替难于验证的条件(10·15)或(10·16).例如当f具有有界导数的话,(10·16) 的积分以$2\pi \max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|f'(a)|$为界.

(iii) 称函数是罕尔德连续的$\Longleftrightarrow$对$\forall x$，$\exists$常数M和a，$0<a\leqslant 1$使

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{a}$$

对$I=\{y:-\pi\leqslant y\leqslant\pi\}$内的所有$y$都成立.若$f$是罕尔德连续的，那么(10.16)的积分以$A\int_{-\pi}^{\pi}|u|^{a-1}du$($A$是常数)为界，而$\int_{-\pi}^{\pi}|u|^{a-1}du$存在. (参看§11·2) .因此罕尔德连续的函数满足条件 (10·16) .

为了给出伏里叶级数可以逐项微分与积分的定理，要用到如下的引理。

引理10·2 设f是以2π为周期分段光滑的函数，那么它的伏氏系数a_n，b_n，满足不等式：

$$|a_n|\leqslant\frac{c}{n},\quad |b_n|\leqslant\frac{c}{n},\quad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

这里c是仅与f有关的常数。

证明 假设f的跃度出现在下列各点$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_k=\pi$。那么

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos ntdt=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\cos ntdt.$$

用部分积分法得出

$$a_n=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{f(t)\sin nt}{n}\right]_{x_{i-1}}^{x_i}$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\pi}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(t)\sin ntdt.$$

因为f和f'是有界的，立即得出a_n的估计：

$$|a_n|\leqslant\frac{c}{n}.\ \text{同样可得}|b_n|\leqslant\frac{c}{n}.$$

推论 设f及它的前$p-2$阶导数都是以2π为周期的函数，且$f^{(p-1)}$是分段光滑的。那么f的伏里叶系数a_n，b_n满足不等式

$$|a_n|\leqslant\frac{c}{n^p},\ |b_n|\leqslant\frac{c}{n^p},\quad n=1,\ 2,\ \cdots.$$

这里c不依赖于n。

为了证明推论，按引理的方法重复p次部分积分就行了。推论说明函数具有更高阶的导数时，它的伏氏级数收敛得越快。

定理10·6（伏里叶级数逐项微分的定理） 设f处处连续且以2π为周期，f'分段光滑且是标准化的。那么

(i)把f的伏里叶级数逐项微分得到的级数在每一点收敛于$f'(x)$。

(ii)f的伏里叶级数对所有x一致收敛于$f(x)$。

证明 设f'的跃度出现在$-\pi=x_0<x_1<\cdots<x_{r-1}<x_r=\pi$。定义

$$g(x)=\int_{-\pi}^{x}f'(t)dt$$

并注意到$g(x)$连续，且在$x_{i-1}<x<x_i(i=1,2,\cdots,r)$内$g'(x)-f'(x)\equiv 0$，函数$g-f$在每个区间$(x_{i-1},x_i)$内为常数，那么由$f$，$g$连续，$g-f$恒等于常数。如以$A_n$，$B_n$表示$f'$的伏氏系数，而$f$的伏氏系数为$a_n$，$b_n$，按$a_n$的公式并用部分积分法

$$a_n=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(t)\cos ntdt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}\frac{f(x_i)\sin nx_i-f(x_{i-1})\sin nx_{i-1}}{n}$$

$$-\frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{r}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(t)\sin ntdt$$

$$=\frac{-1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(t)\sin ntdt=\frac{-B_n}{n}.$$

上面等式中 $\sum_{i=1}^{p}\frac{f(x_i)\sin nx_i-f(x_{i-1})\sin nx_{i-1}}{n}$

$=\frac{1}{n}(f(\pi)\sin n\pi-f(-\pi)\sin(-n\pi))=0$ 同理可得 $b_n=\frac{A_n}{n}$。

逐项微分级数

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin nx+nb_n\sin nx)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\sin nx+A_n\cos nx)。$$

上式右端是 $f'(x)$ 的伏氏级数，由定理10·3，它收敛于 $f'(x)$。(i)的结论获证。

为了证明(ii)，应用引理10·2的推论可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant 2c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以 f 的伏里叶级数一致收敛，并且还是绝对一致收敛的。

定理10·7（伏里叶级数的逐项积分定理） 设f是处处分段光滑以2π为周期的函数。并设它的伏氏系数$a_0=0$，定义

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x}f(x)dx.$$

那么F的伏里叶级数除了常数项A_0待定外，可由f的伏里叶级数逐项积分得到。而A_0由如下的积分确定：

$$A_0=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xf(x)dx.$$

证明 为了使F有2π的周期，要求$a_0=0$。由定理10·6可知F与f的伏里叶级数之间的关系是：除相差一常数外，F的伏氏级数是f的伏氏级数的逐项积分。为了求A_0，注意到

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{x}f(t)dt\right]dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\left[\int_{t}^{\pi}dx\right]dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi-t)f(t)dt=\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}tf(t)dt.$$

注 (i)若函数f的伏氏系数$a_0\neq0$，可以$g(x)=f(x)-\frac{1}{2}a_0$代替f，对$g(x)$定理10·7是适用的。

(ii)定理10·7不要求$F'(x)=f(x)$的级数一致收敛，一般地说积分所得的级数的收敛速度比原级数的收敛速度快。

例 在§10·1的例1中，建立了展开式

$$f(x)=x\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n},$$

$$x\in I=\{x: -\pi<x<\pi\}.$$

使用这一结果求函数$F: x\to x^2$在I上的伏里叶级数。

解 据狄尼判别准则，f，F在I上都能展开成伏氏级数。显然$a_0=0$，f是光滑的，因此定理10·7适用。令

$$F(x)=\int_{-\pi}^{x}2t\,dt=x^2-\pi^2,$$

$$A_0=\frac{-1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t\cdot 2t\,dt=-\frac{4}{3}\pi^2.$$

因此

$$x^2-\pi^2=-\frac{2}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2},$$

从而

$$x^2=\frac{1}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}.$$

习　　题

1. 求函数$f: x\to\frac{1}{3}(\pi^2x-x^3)$，$x\in I=\{x: -\pi\leqslant x$

$\leqslant \pi\}$的伏里叶级数，并证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-6}=\frac{\pi^6}{945}$。

2. 用定理10·7求$f: x \to |x|$，$x \in I=\{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$的伏里叶级数。

3. 求$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2-\pi x), & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -\frac{1}{2}(x^2+\pi x), & -\pi \leqslant x \leqslant 0.\end{cases}$ 的伏里叶级数。

4. 用问题1的结果，求$f: x \to \frac{1}{12}(\pi^2-x^2)^2$，$x \in I=\{x: -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$的伏里叶级数。

5. 求函数f和F的伏里叶级数

$$f: x \to |\sin x|, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi,$$

$$F: x \to \begin{cases}-1+\cos x-\frac{2}{\pi}x, & x \in I_1=\{x: -\pi \leqslant x \leqslant 0\} \\ 1-\cos x-\frac{2}{\pi}x, & x \in I_2=\{x: 0 \leqslant x \leqslant \pi\}.\end{cases}$$

6. 求f的伏里叶级数

$$f: x \to \begin{cases}-(\pi+x) & x \in I_1=\{x: -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{1}{2}\pi\}, \\ x & x \in I_2=\{x: \frac{-1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\pi\}, \\ \pi-x & x \in I_3=\{x: \frac{1}{2}\pi \leqslant x \leqslant \pi\}.\end{cases}$$

7. 设f是以2π为周期的具有各阶连续导数的函数，a_n，b_n是f的伏氏系数，K是一自然数，对于$a_n n^K$，及$b_n n^K$当$n\to\infty$时有何结论？

第十一章　积分所定义的函数

§11·1　积分所定义函数的导数

物理及工程学中出现的微分方程，它们的解往往是用积分给出的。这种解的积分表达式大都是被积函数无界或积分区域无界的情况，这时应当研究积分的收敛性并确定是否可以在积分号下进行微分。本节先研究被积函数或积分区间无界的情况，下两节分别研究被积函数、积分区间无界的情况。此外，应用压缩映象定理给出微分方程解的存在唯一性作为§11·4。

设f是定义在R_2内矩形$R=\{(x,\ t):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t\leqslant d\}$上的实值函数。在$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$上定义函数

$$\varphi'(x)=\int_c^d f(x,t)dt, \qquad (11\cdot1)$$

在什么条件下能够在（11·1）式的积分号下进行微分，以求$\varphi'(x)$？基本的结果由下面定理给出。

定理11·1（莱布尼兹法则）　设f与$f_{,1}$在矩形R上连续，φ由（11·1）式定义。那么

$$\varphi'(x)=\int_c^d f_{,1}(x,\ t)dt,\quad a<x<b. \qquad (11\cdot2)$$

证明　构造φ的差商

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_c^d [f(x+h,t)-f(x,t)]dt,$$

注意到

$$f(x+h,t)-f(x,t)=\int_x^{x+h} f_{,1}(z,t)dz,$$

便有

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{1}{h}\int_c^d\left[\int_x^{x+h} f_{,1}(z,t)dz\right]dt. \quad (11\cdot3)$$

因为R是有界闭集，$f_{,1}$在R上连续因而还是一致连续的。因此，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对$c\leqslant t\leqslant d$中的任何t，使当$|z-x|<\delta$的x,z，都有

$$|f_{,1}(z,t)-f_{,1}(x,t)|<\frac{\varepsilon}{d-c}.$$

现在用等式

$$\int_c^d f_{,1}(x,t)dt=\frac{1}{h}\int_c^d\int_x^{x+h} f_{,1}(x,t)dzdt. \quad (11\cdot4)$$

这一等式的技巧所在是右端被积函数与z无关。由（11·3）减去（11·4）得

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\int_c^d f_{,1}(x,t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_c^d\left\{\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f_{,1}(z,t)-f_{,1}(x,t)]dz\right\}dt\right|. \quad (11\cdot5)$$

如果$|h|$小到使（11•5）右端被积函数的$|z-x|<\delta$，这时

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}-\int_c^d f_{,1}(x,t)dt\right|$$

$$\leqslant\int_c^d\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\frac{\varepsilon}{d-c}dz\right|dt=\frac{\varepsilon}{d-c}(d-c)=\varepsilon.$$

由ε是任意的，说明上面不等式的左端当$h\to0$时趋向于零，即（11•2）式成立。

当$\varphi(x)=\int_c^d f(x,t)dt$是$x$的显函数时，可以直接对$\varphi(x)$求导数。但是，确有许多不能积分出来，而$f_{,1}$能积分出来的情况。下面例子说明这一点。

例1 设f：$\mathbf{R}_2\to\mathbf{R}_1$，

$$f(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\sin xt}{t}, & 当t\neq0,\\ x & 当t=0.\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x,t)dt，求\ \varphi'(0).$$

解 我们有

$$\lim_{t\to0}\frac{\sin xt}{t}=x\lim_{t\to0}\frac{\sin xt}{xt}=x,$$

因此f在$A=\{(x,t):-\infty<x<\infty,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\}$上连续。

而

$$f_{,1}(x,t)=\begin{cases}\cos xt, & 当t\neq0,\\ 1, & 当t=0,\end{cases}$$

也在A上连续。应用莱布尼兹法则

$$\varphi'(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xt\,dt=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x},\quad x\neq0,$$

由此 $\varphi'(0)=\frac{\pi}{2}$。

现在对莱布尼兹法则作如下的重要推广。设f定义如前，令$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$及$J=\{t:c\leqslant t\leqslant d\}$，$h_0$及$h_1$是定义在$I$上值域为$J$的函数。假若 $\varphi:I\rightarrow R_1$其定义为

$$\varphi(x)=\int_{h_0(x)}^{h_1(x)}f(x,t)dt,$$

现在来研究 φ'的公式。为此，考察函数$F:R_3\rightarrow R_1$

$$F(x,y,z)=\int_y^z f(x,t)dt。\tag{11·6}$$

定理11·2 设f与$f_{,1}$在$R=\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant t\leqslant d\}$上连续，且$F$由（11·6）式定义，$x\in I,y\in J,z\in J$。那么

$$F_{,1}=\int_y^z f_{,1}(x,t)dt,\quad F_{,2}=-f(x,y),$$

$$F_{,3}=f(x,z). \tag{11·7}$$

证明 （11·7）中第一个公式由定理11·1便得。第二、第三个公式由微积分基本定理导出。

定理11·3（一般的莱布尼兹法则） 设 f 与 $f_{,1}$ 都在 $R=\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t\leqslant d\}$ 上连续，h_1 与 h_2 在 I 上具有一阶连续的导数。若 $\varphi: I\to \mathbf{R}_1$ 的定义为

$$\varphi(x)=\int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f(x,t)dt,$$

那么

$$\varphi'(x)=f(x,h_1(x))h_1'(x)-f(x,h_0(x))h_0'(x)$$

$$+\int_{h_0(x)}^{h_1(x)} f_{,1}(x,t)dt. \tag{11·8}$$

证明 按（11·6）式定义 F，那么 $\varphi(x)=F(x,h_0(x),h_1(x))$，应用求导的链法则求得

$$\varphi'(x)=F_{,1}+F_{,2}h_0'(x)+F_{,3}h_1'(x).$$

现在把（11·7）的 $F_{,1}$，$F_{,2}$ 及 $F_{,3}$ 的值代入上式，并且代入 $y=h_0(x)$，$z=h_1(x)$ 就得出了（11·8）式。

例2 设 $\varphi: x\to\int_0^{x^2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{t}{x^2}\right)dt$，求 φ'。

解 我们有

$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{arctg}\frac{t}{x^2}) = -\frac{2tx}{t^2+x^2}$$

用一般的莱布尼兹法则（11·8），得到

$$\varphi'(x) = (\operatorname{arctg}1)\cdot(2x) - \int_0^{x^2} \frac{2tx}{t^2+x^4}dt,$$

令$t=x^2u$代入右端积分，有

$$\varphi'(x) = \frac{\pi x}{2} - x\int_0^1 \frac{2udu}{1+u^2} = x(\frac{\pi}{2} - \log 2).$$

例3 设$F:(x,y)\to\int_y^{\log x} \frac{\sin xt}{t(1+y)}dt$，求$F_{,1}$

解 用一般的莱布尼兹法则（11·8），得到

$$F_{,1} = \frac{\sin(x\log x)}{(1+y)(x\log x)} + \int_y^{\log x} \frac{\cos xt}{1+y}dt$$

$$= \frac{\sin(x\log x)}{(1+y)(x\log x)} + \frac{\sin(x\log x)}{(1+y)x} - \frac{\sin xy}{(1+y)x}.$$

习　　题

习题1—12，求 φ'。

1. $\varphi: x \to \int_0^1 \frac{\sin xt}{1+t} dt$.

2. $\varphi: x \to \int_1^2 \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.

3. $\varphi: x \to \int_0^1 f(x,t) dt$,

$$f(x,t) = \begin{cases} (t^x - 1)/\log t, & 当 t \neq 0,1, \\ 0 & 当 t = 0, \\ x & 当 t = 1. \end{cases}$$

4. $\varphi: x \to \int_1^{x^2} \cos(t^2) dt$.

5. $\varphi: x \to \int_{x^2}^{x} \sin(x,t) dt$.

6. $\varphi: x \to \int_{x^2}^{e^x} \operatorname{tg}(xt) dt$.

7. $\varphi: x \to \int_{\cos x}^{1+x^2} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$.

8. $\varphi: x \to \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos xt}{t} dt$.

9. $\varphi: x \to \int_{x^2}^{x} \frac{\sin xt}{t} dt$.

10. $\varphi: x \to \int_{x^m}^{x^n} \frac{dt}{x+t}$.

11. $\varphi: x \to \int_0^1 \frac{xt}{\sqrt{1-x^2t^2}} dt$, $|x|<1$.

12. $\varphi: x \to \int_0^{\pi} \log(1-2x\cos t + x^2) dt$, $|x|<1$.

习题13—15计算偏导数。

13. $\varphi: (x,y) \to \int_y^{x^2} \frac{1}{t} e^{xt} dt$, 计算 $\varphi_{,1}$.

14. $\varphi: (x,z) \to \int_{z^2}^{x^2} f(x,t) dt$,

$$f(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{t}\sin^2(x,t), & t \neq 0, \\ 0, & t=0; \end{cases}$$

求 $\varphi_{,1}$.

15. $\varphi: (x,y) \to \int_{x^2+y^2}^{x^2-y^2} (t^2+2x^2-y^2) dt$, 求 $\varphi_{,2}$.

16. 设m, n是正整数，证明

$$\int_0^1 t^n (\log t)^m dt = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

〔提示：对n求$\int_0^1 x^n dx$的导数并用归纳法〕

17. 设$F(x,y)=\int_{h_0(x,y)}^{h_1(x,y)} f(x,y,t)dt$。求出$F_{,1}$, $F_{,2}$的公式。

18. 设方程

$$\int_{h_0(y)}^{h_1(x)} f(x,y,t)dt=0$$

确定隐函数$y=\varphi(x)$。求φ'。

§11·2 广义积分

假若函数f在半开区间$I=\{x: a\leqslant x<b\}$上有定义，且对$\forall c\in I$，积分

$$\int_a^c f(x)dx$$

存在。我们关心的是f在b点邻域为无界的情况下，如何定义积分$\int_a^b f(x)dx$。例如，函数$f: x\to(1-x)^{-1}$，在它的定义域$J=\{x: 0\leqslant x<1\}$上无界，对于$c\in J$有积分

$$\int_0^c (1-x)^{-1}dx=-\log(1-c)。$$

当$c\to1^-$时，积分值趋向于正无穷。另一方面，对于J上定义的无界函数$g: x\to(1-x)^{-\frac{1}{2}}$，对$c\in J$求积分

$$\int_0^c (1-x)^{-\frac{1}{2}}dx = 2-2\sqrt{1-c},$$

当$c\to 1^-$时，积分值有极限为2。

定义 设对$\forall c\in\{x: a\leqslant x<b\}$，$f$在区间$[a,c]$上可积，如果

$$\lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx$$

存在，则称积分$\int_a^b f(x)dx$收敛 否则称$\int_a^b f(x)dx$发散。

若f在区间$J=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上除去内点$d$的邻域之外是有界的，如果

$$\lim_{c_1\to d^-}\int_a^{c_1} f(x)dx, \qquad \lim_{c_2\to d^+}\int_{c_2}^b f(x)dx$$

都存在，则称广义积分$\int_a^b f(x)dx$收敛；否则称$\int_a^b f(x)dx$发散。广义积分也称瑕分积。

区间上某点使函数在该点邻域内无界，这种点称为瑕点如果函数在I上有几个瑕点，可把I上的积分分解成每个积分仅有一个瑕点的积分，当且仅当分解的各项的广义积分都收敛，称积分在I上收敛，否则称I上积分发散。在广义积分收敛的情况下，定义极限值为广义积分的值。

例1 证明$\int_a^b (b-x)^{-p}dx$及$\int_a^b (x-a)^{-p}dx$，当$p<1$时

收敛，当$p\geqslant 1$时发散。

解 对于$a<c<b$，$p\neq 1$有

$$\int_a^c (b-x)^{-p}dx = \frac{-(b-x)^{1-p}}{1-p}\Big]_a^c$$

$$=\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}-\frac{(b-c)^{1-p}}{1-p}.$$

当$p<1$，上式右端在$c\to b^{-1}$时以$\dfrac{(b-a)^{1-p}}{1-p}$为极限。而当$p>1$时极限不存在；当$p=1$时上式右端成为$\log(b-a)-\log(b-c)$，当$c\to b^-$时极限不存在。

对广义积分也有比较判别法，象无穷级数那样比较判别法是判定积分敛散性的基本工具。

定理11·4（比较判别法） 设f在半开区间$I=\{x: a\leqslant x<b\}$上连续，且$0\leqslant |f(x)|\leqslant g(x)$，对$\forall x\in I$成立。那么当$\int_a^b g(x)dx$收敛时，$\int_a^b f(x)dx$收敛，且

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

证明 首先假定对$\forall x\in I$，$f(x)\geqslant 0$，且定义

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt,\quad G(x)=\int_a^x g(t)dt.$$

F与G都是I上不减函数，由$\int_a^b g(x)dx$收敛的条件，可知当

$x \to b^-$，$G(x)$有极限M。因为对$\forall x \in I$，$F(x) \leqslant G(x) \leqslant M$。由连续性公理（§2·5），当$x \to b^-$，$F(x)$有极限存在，即$\int_a^b f(x)dx$收敛，且由$F(x) \leqslant G(x) \leqslant M$，$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M = \int_a^b g(x)dx$。

如果f能取负值时，定义

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2},$$

那么f_1，f_2在I上都是非负连续的，且

$$f_1(x) + f_2(x) = |f(x)| \leqslant g(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = f(x).$$

由上面对非负情况的证明，$\int_a^b f_1(x)dx$，$\int_a^b f_2(x)dx$都收敛；用和的极限定理可知$\int_a^b |f(x)|dx$及$\int_a^b f(x)dx$存在。

最后

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx\right|$$

$$\leqslant \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b |f(x)|dx$$

$$\leqslant \int_a^b g(x)dx.$$

定理11·5 设f与g在半开区间$I=\{x: a\leqslant x<b\}$上连续，且对$x\in I$有$0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$。如果$\int_a^b g(x)dx$发散，那么$\int_a^b f(x)dx$发散。

证明 若$\int_a^b f(x)dx$收敛，按定理11·4，$\int_a^b g(x)dx$应是收敛的，导致矛盾，因而定理11·5成立。

例2 判别$\int_0^1 \frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad (\beta>0)$的收敛性。

解 把$f(x)=\frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}}$与$g(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}$相比较，

$$\frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x^\beta}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}=\frac{x^\beta}{\sqrt{1+x}}g(x),$$

对于$0\leqslant x<1$及$\beta>0$有$0<\frac{x^\beta}{\sqrt{1+x}}<1$，因此$|f(x)|\leqslant g(x)$。

由例1知道 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$是收敛的，据定理11·4，断定$\int_0^1\frac{x^\beta}{\sqrt{1-x^2}}dx$收敛。

现在讨论被积函数有界而积分区间无界的情况。

定义 设f定义在区间$I=\{x: a\leqslant x<+\infty\}$上，且对

$\forall c\in I$，$\int_a^c f(x)dx$存在。如果$\lim\limits_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx$存在，则定义

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)dx,$$

这时称广义积分$\int_a^{\infty} f(x)dx$收敛。当极限不存在时，称积分发散。

若f定义在$J=\{x:-\infty<x<+\infty\}$上，研究$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$的广义积分。设$d\in J$，定义

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\lim_{c_1\to-\infty}\int_{c_1}^d f(x)dx+\lim_{c_2\to+\infty}\int_d^{c_2} f(x)dx. \qquad (11\cdot9)$$

当且仅当右端两个极限都存在。由f在J的每个有限区间上可积，容易验证（11·9）的值与d的选取无关。

为了说明区间无限的广义积分定义，我们证明

$$\int_a^{+\infty} x^{-p}dx \qquad (a>0)$$

当$p>1$时收敛；当$p\leqslant1$时发散。注意到$p\neq1$时，对$\forall c>a$，

$$\int_a^c x^{-p}dx=\frac{1}{1-p}[c^{1-p}-a^{1-p}].$$

对$p>1$，当$c\to+\infty$时，右端趋向于$\frac{1}{p-1}a^{1-p}$。对$p<1$极限

不存在。当$p=1$时右端成为$\log\frac{c}{a}$，当$c\to\infty$时极限也不存在。同样地，积分

$$\int_{-\infty}^{b}|x|^{-p}dx \qquad (b<0)$$

当$p<1$时收敛；$p\leqslant1$时发散。

对积分区间无限的广义积分也有类似于无界函数积分的比较判别法。

推论 若对$\forall x\in\{x: a\leqslant x<+\infty\}$，$|f(x)|\leqslant g(x)$，且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$收敛，那么$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$，$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛。

若对$\forall x\in\{x: a\leqslant x<+\infty\}$，$0\leqslant g(x)\leqslant f(x)$，且$\int_a^{+\infty}g(x)dx$发散，那么$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

例3 判别$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx$的敛散性。

解 对$x\geqslant1$，注意

$$\frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}\geqslant\frac{\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{2x},$$

而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x}dx$发散，因此$\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^{\frac{3}{2}}}dx$发散。

例4 判别$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$的敛散性。

解 考察 $A\equiv\int_0^c xe^{-x^2}dx$，且令$u=x^2$，$du=2xdx$则

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{c^2} e^{-u}du=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-c^2},$$

当$c\to+\infty$时，$A\to\frac{1}{2}$。

因被积函数是奇函数，有

$$\lim_{d\to+\infty}\int_{-d}^{0} xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2},$$

因而$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$收敛。

被积函数无界，积分区间也无界的情况，可以联合定理11·4及推论来处理，下面举例说明这种方法。

例5 判别$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$的敛散性。

解 被积函数在$x=0$邻域内无界，把积分分解为两部分：

$$\int_0^1\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx \quad 与 \int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx.$$

对$0<x\leqslant1$，$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$ 而$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx$收敛由比较判别法

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$收敛。对$1\leqslant x$，$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\leqslant e^{-x}$，而$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$收敛于1，由比较判别法$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$收敛。综合起来可知$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$收敛。

习　题

习题1—12判别各积分的敛散性。

1. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)\sqrt{x}}$.

2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

4. $\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}}$.

5. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{x}}{\sin x}dx$.

7. $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\log x}dx$.

8. $\int_0^{+\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^2}{1+x^2}dx$.

9. $\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx$.

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

11. $\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$.　　　12. $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx$.

13. 证明$\int_2^{+\infty} x^{-1}(\log x)^{-p} dx$，当$p>1$时收敛，当$p\leqslant 1$发散。

14. 设f在$I=\{x: 1\leqslant x<+\infty\}$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\log x)^2 f(x) = A$。且$A\neq 0$。证明$\int_1^{+\infty} f(x)dx$是收敛的。

§11·3　广义积分所定义的函数，Γ函数

首先来研究积分$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$的收敛性。因为被积函数在$t=0$点邻域无界，积分可分为两部分

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt,$$

且以I_1, I_2记右端两个积分。对I_1，当$x>0$，$0<t\leqslant 1$时，有

$$0<t^{x-1}e^{-t}\leqslant t^{x-1},$$

而积分$\int_0^1 t^{x-1}dt$对$x>0$收敛，因此I_1收敛。对于第二个积分，I_2，先把$t^{x-1}e^{-t}$写成$t^{x-1}e^{-t}=t^{x+1}e^{-t}t^{-2}$，再估计函数$f(t)=t^{x+1}e^{-t}$在$t\in\{t: 1\leqslant t<+\infty\}$上的界。由$f'(t)=t^x e^{-t}(x+1-t)$，$t=x+1$为$f$的唯一临界点，且$f$在这一点取得最

大值$f(x+1)=(x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}$。所以

$$I_2=\int_1^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt=\int_1^{+\infty}(t^{x+1}e^{-t})t^{-2}dt$$

$$\leqslant(x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt=(x+1)^{x+1}e^{-(x+1)}.$$

因此I_2对每一固定的$x>-1$收敛。综合起来，对$x>0$积分$\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$收敛。

定义 称$I=\{x:0<x<+\infty\}$上的函数

$$x\to\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}dt$$

为Γ函数。

Γ函数的一个最重要的性质是

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).\qquad(11\cdot10)$$

这一性质容易由部分积分法得出。事实上，

$$\int_0^c t^x e^{-t}dt=[t^x(e^{-t})]\Big|_0^c+x\int_0^c t^{x-1}e^{-t}dt,$$

令$c\to+\infty$便得(11·10)。

而$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-t}dt=1$，因此对自然数$n$有

$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\cdot(n-1)\Gamma(n-1)=\cdots=n\cdot(n-1)\cdots2\cdot1=n!$。

这说明 Γ 函数是仅对自然数有定义的$n!$的推广。

为了对于广义积分建立类似如§11·1那种在积分号下求导数的莱布尼兹法则，需要作更深入的研究。

设$R=\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t<d\}$是一个不含"上"边的矩形。$F:R\to\mathrm{R}_1$是连续的且对$\forall x\in I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$ $\lim\limits_{t\to d-}F(x,t)$存在，以$f(x)$表示这一极限。

定义 函数$F(x,t)$关于I当$t\to d-$时一致趋向于$f(x)$ $\Longleftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对$J_\delta=\{t:d-\delta<t<d\}$内的$t$及所有$I$中的$x$，都有

$$|F(x,t)-f(x)|<\varepsilon, \tag{11·11}$$

这里δ仅依赖于ε而与x无关。我们也说当$t\to d-$时F一致收敛于f。矩形R可换成无限带形$S=\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t<\infty\}$，一致极限（即一致收敛）修改成：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$仅与$\varepsilon$有关的$T$使(11·11)式对$t>T$及$I$内一切$x$都成立，$T$与$x$无关。

与无穷级数那里的情况一样，一致收敛性对于极限运算交换次序起着重要的作用。下面两个定理是关于广义积分莱布尼兹法则的基础。

定理11·6 设$F:R\to\mathrm{R}_1$对$\forall t\in J=\{t:c\leqslant t<d\}$在$I$上连续，且当$t\to d-$时，$F(x,t)\to\varphi(x)$关于$I$是一致收敛的，那么$\varphi$在$I$上是连续的。若$J$是半开无穷区间$\{t:c\leqslant t<+\infty\}$，当$t\to+\infty$时，$F(x,t)\to\varphi(x)$关于$I$是一致收敛的，那么$\varphi$在$I$上是连续的。

证明 设$x_1,x_2\in I$，有

$$|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|\leqslant|F(x_1,t)-\varphi(x_1)|+|F(x_2,t)-$$

$$-F(x_1, t)|+|F(x_2,t)\ \varphi(x_2)|.$$

由F一致收敛于φ，对$\forall\varepsilon>0$，当t充分逼近于d，上式右端第一项、第三项都可以小于$\frac{\varepsilon}{3}$；而由F的连续性假设，当x_1，x_2分充接近时，第二项也小于$\frac{\varepsilon}{3}$。因此φ是连续的。

定理11·7 设定理11·6条件成立，并且对$\forall t\in J$，$F_{,1}$在I上连续。如果$F_{,1}(x,t)\to\psi(x)$，当$t\to d-$或$t\to+\infty$，关于I收敛是一致的，那么在I上有

$$\varphi'(x)=\psi(x).$$

证明 设a是I的任一点，那么$\forall x\in I$，有

$$\int_a^x F_{,1}(\xi,t)d\xi=F(x,-t)-F(a,t).$$

因为$F_{,1}$当$t\to d-$时关于I一致收敛于$\psi(x)$，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$与x无关的$\delta>0$，使$0<d-t<\delta$都有

$$|\psi(\xi)-F_{,1}(\xi,t)|<\frac{\varepsilon}{|x-a|+1}.$$

由此

$$\left|\int_a^x\psi(\xi)d\xi-\int_a^x F_{,1}(\xi,t)d\xi\right|\leqslant\left|\int_a^x|\psi(\xi)-F_{,1}(\xi,t)d\xi\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{|x-a|+1}|x-a|<\varepsilon,$$

即

$$\int_a^x \psi(\xi)d\xi = \lim_{t\to d-}\int_a^x F_{,1}(\xi,t)d\xi = \lim_{t\to d-}[F(x,t)-F(a,t)]$$

而由 $\varphi(x)$ 定义上式最右端为 $\varphi(x)-\varphi(a)$，即

$$\int_a^x \psi(\xi)d\xi = \varphi(x)-\varphi(a).$$

由 $\psi(x)$ 连续及微积分基本定理，对上面等式求导数便得 $\psi(x)=\varphi'(x)$。

下面关于广义积分的莱布尼兹法则是定理11·6与11·7的直接结果。

定理11·8 设 f 在 R 上连续，定义

$$F(x,t)=\int_c^t f(x,\tau)d\tau.$$

如果对 $\forall x\in I$，广义积分 $\varphi(x)=\int_c^d f(x,\tau)d\tau$ 存在，且 $\lim\limits_{t\to d-} F(x,t)=\varphi(x)$ 关于 I 是一致的。那么 φ 在 I 上连续。同样结果对 J 换成区间 $\{t: c\leqslant t<+\infty\}$ 及 $t\to d-$ 换成 $t\to+\infty$ 成立。

注意到 $F(x,t)$ 在 R 上连续，$F(x,t)$ 满足定理11·6的条件，定理11·8的结论成立。

定理11·9（关于广义积分的莱布尼兹法则） 设定理11·8的条件成立，且 $f_{,1}$ 在 R 上连续。如果当 $t\to d-$（或 $t\to+\infty$），$F_{,1}$ 或对 x 一致收敛于 ψ。那么

$$\psi(x)=\varphi'(x)=\int_c^d f_{,1}(x,\tau)d\tau$$

$$(\text{或}\psi(x)=\varphi'(x)=\int_{\varepsilon}^{+\infty}f_{,1}(x,\tau)d\tau)。$$

证明 根据定理11·1，对$\forall t<d$我们由莱布尼兹法则有

$$F_{,1}(x,t)=\int_{\varepsilon}^{t}f_{,1}(x,\tau)d\tau。$$

由此据定理11·7便导出定理的结论。

例1 设 $\varphi: x\to\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt$。证明当$x>0$，$\varphi$及$\varphi'$都是连续的并且

$$\varphi'(x)=\int_0^{+\infty}-te^{-xt}dt。\qquad(11\cdot12)$$

解 定义$F(x,t)=\int_0^{t}e^{-xs}ds=\dfrac{1-e^{-xt}}{x}$。

因此

$$F_{,1}(x,t)=-\frac{1-e^{-xt}-xte^{-xt}}{x^2}。$$

当$t\to+\infty$，有$F\to\dfrac{1}{x}$，$F_{,1}\to\dfrac{1}{x^2}$。为证明收敛是一致的，注意对$h>0$，及满足$x\geqslant h$的所有x，有

$$|F(x,t)-\frac{1}{x}|=\frac{e^{-ht}}{x}<\frac{e^{-ht}}{h},$$

$$|F_{,1}(x,t)-(-\frac{1}{x^2})|=\frac{e^{-xt}(1+xt)}{x^2}\leqslant\frac{e^{-ht}(1+ht)}{h^2}$$

于是对$\forall h>0$，在$x\geqslant h$的任何区间上收敛是一致的，应用广义积分的莱布尼兹法则，便得(11·12)成立。φ及φ'的连续性由定理11·8得到。

下一定理证明比较判别法，当积分不能直接计算的情况下，莱布尼兹法则仍然有效。

定理11·10 (i)设f在矩形$R=\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant t<d\}$上连续，且在$R$上$|f(x,t)|\leqslant g(t)$。如果$\int_c^d g(t)dt$收敛，那么广义积分

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,t)dt$$

对$\forall x\in I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$都有定义，并且$\varphi(x)$在$I$上连续。

(ii)设$f_{,1}$在R上连续，且在R上$|f_{,1}(x,t)|\leqslant h(t)$，如果$\int_c^d h(t)dt$收敛，那么对$I$的每一内点$x$

$$\varphi'(x)=\int_c^d f_{,1}(x,t)dt, \qquad (11·13)$$

即莱布尼兹法则成立。同样的结果对$t\to+\infty$代替$t\to d-$也成立。

证明 (i)由比较判别法导出$\varphi(x)$的存在性。定义

$$F:(x,t)\to\int_c^t f(x,\tau)d\tau, \qquad c\leqslant t<d.$$

那么

$$|\varphi(x)-F(x,t)|=\left|\int_t^d f(x,\tau)d\tau\right|\leqslant\int_t^d g(\tau)d\tau. \quad (11\cdot14)$$

既然(11·14)右端积分收敛，对$\forall\varepsilon>0$，当t充分逼近于d时，

有$\left|\int_t^d g(\tau)d\tau\right|<\varepsilon$。所以当$t\to d-$时

$$|\varphi(x)-F(x,t)|\to 0$$

对I上的一切x一致地成立，由此φ是I上的连续函数。

为了证明(ii)，注意到当$t\to d-$时，

$$\left|\int_t^d f_{,1}(x,\tau)d\tau\right|\leqslant\int_t^d h(t)dt\to 0$$

关于I中的一切x一致的收敛，于是(11·13)成立。

定义 设$f(x,t)$在$R=\{(x,t):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant t<d\}$上连续，对$(x,t)\in R$定义

$$F(x,t)=\int_c^t f(x,\tau)d\tau,$$

对$x\in I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$，定义

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,t)dt. \quad (11\cdot15)$$

如果当$t\to d^-$，$F(x,t)\to\varphi(x)$对I上的x一致收敛，称广义积分（11·15）关于I对x一致收敛。同样的定义对$d=+\infty$也适用。

例2 证明广义积分

$$\varphi(x)=\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin t}{x^{2}+t^{2}}dt \qquad (11\cdot16)$$

对$-\infty<x<+\infty$一致收敛。

解 对所有x及$t\geqslant1$，有

$$\left|\frac{\sin x}{x^{2}+t^{2}}\right|\leqslant\frac{1}{t^{2}}.$$

因为$\int_{1}^{+\infty}\frac{1}{t^{2}}dt$收敛，应用定理11·10断定（11·16）的广义积分一致收敛。

例3 设积分

$$\varphi(x)=\int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{t}dt, \qquad (11\cdot17)$$

$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 且$a>0$。证明(11·17)的积分及被积函数对x的导函数的积分关于I对x一致收敛，并计算 $\varphi'(x)$ 及 $\varphi(x)$。

解 令$f(x,t)=(e^{-xt}-e^{-t})\frac{1}{t}$，求得

$$f_{,1}(x,t)=-e^{-xt},\ |f_{,1}(x,t)|\leqslant e^{-ht}$$
$$(h=\min\{a,1\}).$$

视f为x的函数应用微分中值定理得出：

$$\left|\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{t}\right|=e^{-\xi t}|1-x|,\ 对0\leqslant t<1.$$

这里ξ介于1与x之间。而对$t\geqslant1$也有

$$\left|\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{t}\right|\leqslant e^{-at}$$

所以积分（11•17）及积分

$$\int_0^{+\infty}f_{,1}(x,t)\ dt$$

关于I对x一致收敛．用莱布尼兹法则可得

$$\varphi'(x)=\int_0^{+\infty}-e^{-xt}dt=\lim_{t\to+\infty}\left.\frac{e^{-xt}}{x}\right|_0^t=-\frac{1}{x}.$$

积分 $\varphi'(x)=-\frac{1}{x}$，得到 $\varphi(x)=c-\log x$。为确定常数c，从 φ（1）$=c-\log1=c$及

$$\varphi\ (1)\ =\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}-e^{-t}}{t}dt=0$$

得$c=0$，因而 $\varphi\ (x)\ =-\log x=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}-e^{-t}}{t}dt$。

习　题

习题1—8证明由积分所定义的 φ及 φ'关于给定区间一致收敛，并按莱布尼兹法则求 φ'。

1. $\varphi : x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$, $I = \{x : 0 < a \leqslant x \leqslant b\}$

2. $\varphi : x \to \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} e^{xt} dt$, $I = \{x : -A \leqslant x \leqslant A\}$.

3. $\varphi : x \to \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{1+t_2} dt$, $I = \{x : -A \leqslant x \leqslant A\}$.

4. $\varphi : x \to \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$, $I = \{x : 0 \leqslant x \in a\}$.

5. $\varphi : x \to \int_0^{+\infty} t^{-1} \sin(xt)(\log t) dt$, $I = \{x : -a \leqslant x \leqslant a\}$

6. $\varphi : x \to \int_0^1 \frac{(\log t)^2}{1+xt} dt$, $I = \{x : -1 < a \leqslant x \leqslant b\}$.

7. $\varphi : x \to \int_0^1 \frac{dt}{(1+xt)\sqrt{1-t}}$, $I = \{x : -a \leqslant x \leqslant a\}$.

8. $\varphi : x \to \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{t(1+t^2)} dt$, $I = \{x : -a \leqslant x \leqslant a\}$.

9. 用$\int_0^1 t^x dt = (x+1)^{-1}$，$x > -1$来导出

$$\int_0^1 t^x (-\log t)^m dt = \frac{m!}{(x+1)^{m+1}}, \quad x > -1.$$

10. 用$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{1+t}dt=\frac{\pi}{\sin\pi x}$，$0<x<1$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}\log t}{1+t}dt=\frac{-\pi^2\cos\pi x}{\cos^2\pi x}.$$

11. 验证 $\frac{d^n}{dx^n}\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}t^{x-1}(\log t)^n e^{-t}dt$.

12. 设 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}(1+t)^{-1}e^{-xt}dt$,

证明 $\varphi(x)-\varphi'(x)=\frac{1}{x}$.

13. 设 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$，证明 $\varphi(x)+\varphi''(x)=\frac{1}{x}$.

14. 设 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}t^{-1}e^{-t}(1-\cos xt)dt$，求 φ'，并求 φ 的显式。

15. 设 $\varphi(x)=\int_0^1\frac{t^x-1}{\log t}dt$,

$x\in I=\{x: -1<a<x<+\infty\}$.

求 φ'，并求 φ的显式。

16. 设 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty}t^{-2}e^{-t}(1-\cos xt)dt$，求 φ'，φ''，并求

出 φ' 及 φ 的显式。论证这一过程。

17. 验证 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt=\dfrac{1}{x}$ 并证明

$$\varphi^{(n)}(x)=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n e^{-xt}dt=(-1)^n n!x^{-n-1},$$

$x>0$。

18. 验证等式

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^2+x}=\frac{1}{2}\pi x^{-\frac{1}{2}}.$$

并证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(t^2+x)^{n+1}}=\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{-n-\frac{1}{2}}.$$

19. 设勒让德多项式

$$P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2(1-x^2)}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2t^2})dt,$$

证明

$$x\frac{d}{dx}P_n(x)-\frac{d}{dx}P_{n-1}(x)=nP_n(x).$$

§11·4 微分方程解的存在唯一性定理

设 D 是 $\mathbf{R}_2$ 内的开集，$f: D\to\mathbf{R}_1$ 的连续函数。我们来研

究一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{11·18}$$

在D内的解的存在性问题。

定义 设$P(x_0,y_0)\in D$，称函数$y=\varphi(x)$是(11·18)的初始值问题的解$\Longleftrightarrow$在x的某一区间$I=\{x: x_0-h<x<x_0+h\}$上有$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))$，且$\varphi$满足初始条件$\varphi(x_0)=y_0$。

下面引理把解微分方程的初始值问题化成解一个积分方程的问题。

引理11·1 设$f: D\to \mathbf{R}_1$是连续的，φ是定义在$I=\{x: x_0-h<x<x_0+h\}$上的实值连续函数，$(x_0, y_0)\in D$且$\varphi(x_0)=y_0$。那么φ是微分方程

$$\frac{d\varphi}{dx}=f[x, \varphi(x)] \tag{11·19}$$

解的必要充分条件是在I上φ满足积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt, \quad x\in I. \tag{11·20}$$

证明 把(11·19)从x_0到x积分便得(11·20)。由微积分基本定理将(11·20)关于x求导便得(11·19)。

如果把(11·20)的右端看作把连续函数φ映象为$T\varphi=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))dt$，即$C(I)\to C(I)$的映象$T$，那么积分方程(11·20)的解$\varphi$恰好是$T$的不动点。我们将证明在$f$满足一

定条件之下，T是完备距离空间$C(I)$内的压缩映象，根据不动点定理（定理6·46)得到(11·20)解的存在唯一性，并且解总可由迭代法逐次逼近。为此引进完备的距离空间$C(S)$。

定义 设S是距离空间，若以$C(S)$表示定义在S上的有界连续实值函数组成的集合。对于f，$g\in C(S)$，定义f，g间的距离为

$$d(f,g)=\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)| \qquad (11\cdot21)$$

容易验证在这距离之下$C(S)$是一距离空间，并仍以表$C(S)$表示。

定理11·11 设$\{f_n\}$是$C(S)$的序列。那么当$n\to+\infty$时，$f_n\to f$，$f\in C(S)\Longleftrightarrow f_n$在$n\to\infty$时在$S$上一致收敛于$f$。

证明 据f_n在S上一致收敛于f的定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$自然数n_0，使当$n>n_0$及S中一切x，都有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

因此 $\sup\limits_{x\in S}|f_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$对$n\geqslant n_0$成立。依$C(S)$中距离的定义，就是$n\to\infty$时，$d(f_n,f)\to0$。把上述步骤倒过来便得：在$C(S)$中若$f_n\to f$，那么$f_n$在$S$上一致收敛于$f$。

由定理11·11及距离空间完备性定义，容易证明下面两个定理，它们的细节留给读者。

定理11·12 $C(S)$是完备距离空间。

定理11·13 完备距离空间的闭子集作为距离空间是完备的。

注 设S是距离空间，$f:S\to R_N$，$g:S\to R_N$是S上的有界连续矢值函数，

是指$f=(f_1,f_2,\cdots f_N)$　$g=(g_1,g_2,\cdots g_N)$的f_i,g_i都属于C(S).定义

$$|f(x)-g(x)|=\left(\sum_{i=1}^{N}|f_i(x)-g_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$及d(f,g)=\sup_{x\in S}|f(x)-g(x)|,$$

S上的一切有界连续矢值函数f组成一完备的距离空间,记之为$C_N(S)$.

定义　设F是定义在R_1的集S上的实值函数，称F在S上满足李布希兹条件$\Longleftrightarrow$存在常数M，使

$$|F(x_1)-F(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2| \tag{11·22}$$

对S中的任何x_1，x_2成立。(11·22)式中M的最小数叫作李布希兹常数。

如果定义在区间I上的函数F，在I上导函数有界，按微分中值定理,对任意$x_1,x_2\in I$,有$|F(x_2)-F(x_1)|\leqslant|F'(\xi)||x_2-x_1|$，$\xi$是介于$x_1,x_2$之间的某一点，由$F'(x)$在$I$上有界，(11·22)显然成立。另一方面确有满足李布希兹条件但不可微的函数。如函数的图象由联结若干直线段所组成就是这种函数。

定理11·14　设f是闭矩形$R=\{(x,y):|x-x_0|\leqslant h,|y-y_0|\leqslant K\}$上连续的函数，以$M_0$记$\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|$。且$f$关于$y$满足李布希兹条件：

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant M_1|y_1-y_2|,$$

这里$(x,y_1)(x,y_2)$都是R中的点。那么对使$M_0h\leqslant K$及$0<M_1h<1$的h，在区间$I=\{x:x_0-h<x<x_0+h\}$上存在唯一的连续可微函数φ，满足$\varphi(x_0)=y_0$，$|\varphi(x)-y_0|<K$

及$\frac{d\varphi}{dx}=f[x,\ \varphi(x)]$。

证明 根据引理11·1，若能求出下列积分方程

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\ \varphi(t))dt \qquad (11\cdot23)$$

的解 $\varphi(x)$，且当$x\in I$满足$|\varphi(x)-y_0|\leqslant K$，定理便被证明。

设$C(I)$是I上有界连续函数构成的距离空间，且令E是$C(I)$中满足$|\varphi-y_0|\leqslant K$的子集。如果$\{\varphi_n\}\subset E$，且φ_n收敛于φ，$\varphi\in C(I)$，那么由

$$|\varphi-y_0|\leqslant|\varphi-\varphi_n|+|\varphi_n-y_0|$$

表明$|\varphi-y_0|\leqslant K$，即$\varphi\in E$。于是E是$C(I)$的闭子集。根据定理11·12及定理11·13可知，E是完备距离空间。定义E上的映象T：对于$\varphi\in E$，

$$T(\varphi)=\psi，这里\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f[t,\ \varphi(t)]dt,\quad x\in I。$$

有$\psi(x)\in C(I)$且

$$|\psi(x)-y_0|=\left|\int_{x_0}^{x}f[t,\ \varphi(t)]dt\right|\leqslant M_0|x-x_0|$$

$$<M_0h\leqslant K。$$

即$\psi\in E$，T是$E\to E$的映象。现在来证明T是压缩映象。设$\varphi_1,\ \varphi_2\in E$，$T(\varphi_1)=\psi_1$，$T(\varphi_2)=\psi_2$，由$f$满足李布希兹

条件有

$$|\psi_2(x)-\psi_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f[t,\varphi_2(t)]-f[t,\varphi_1(t)]\}dt\right|$$

$$\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}M_1|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|dt\right|\leqslant M_1hd(\varphi_2,\varphi_1).$$

因此$d(\psi_2,\psi_1)\leqslant M_1hd(\varphi_2,\varphi_1)$，由$M_1h<1$，$T$是压缩映象。据不动点定理（定理6·46），$T$存在唯一不动点$\varphi\in E$。即方程（11·23）存在唯一的解$\varphi$。

注 (i) 由不动点定理，φ_0可取E中任一满足初始条件者，按$T\varphi_{n-1}=\varphi_n$，$n=1,2,\cdots$，得到φ的逐次逼近的序列$\{\varphi_n\}$，φ_n在I上一致收敛于φ.

(ii)若f是定义在R_2内的连通开集D上，定理11·14对D的任何一点都有以该点为中心的矩形，在这小矩形上，定理的条件成立.那么先求出以(x_0,y_0)为中心的小矩形内方程的解，于这一解曲线上取另一点(x_1,y_1)，在以(x_1,y_1)为中心的矩形内解$\varphi(x_1)=y_1$的初值问题．由解的唯一性，在两小矩形重叠部分两个解重合，重复这一步骤逐渐把局部的解延拓，得到贯穿整个D内的初值问题的解（图11·1）．

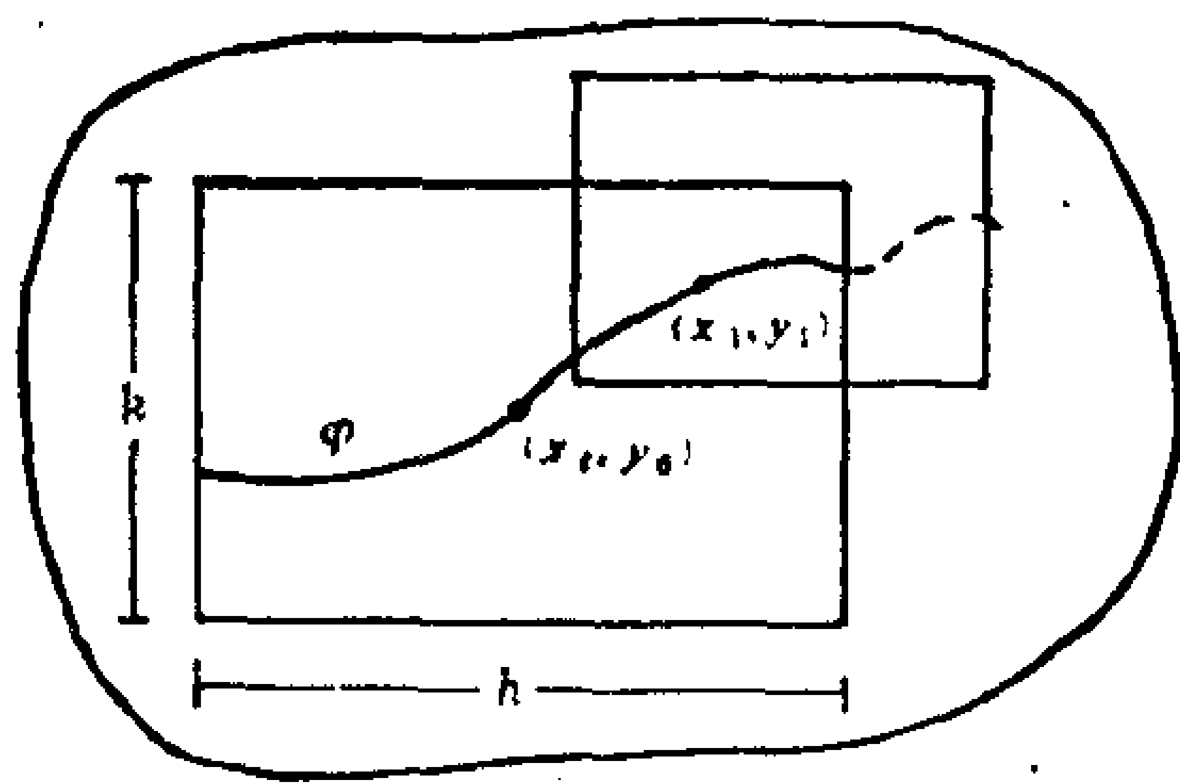


图 11·1

定理11·14可推广为关于方程组的定理。设f_i是R_{N+1}中开集D上连续的函数，方程组为

$$\begin{cases} \dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots y_N), i = 1, 2, \cdots N, \\ y_{i0} = y_i(x_0), \ (x_0, y_{10}, y_{20}, \cdots y_{N0}) \in D \end{cases} \tag{11·24}$$

若f_i对每个y_i满足李布希兹条件，那么研究从I到R_N内的映象$x \to (y_1, y_2, \cdots y_N)$。以$C_N(I)$代替定理11·14中的$C(I)$，定义$C_N(I) \to C_N(I)$的映象$T$，对$C_N(I)$中的$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_N)$，$T\varphi = \psi$，$\psi = (\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_N)$，而$\psi_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i(t, \varphi_1(t), \cdots \varphi_N(t))dt$。在以$x_0$为中心的充分小的$I$上，$T$是$C_N(I) \to C_N(I)$的压缩映象，由不动点定理，方程组初始值问题(11·24)的解存在、唯一。

如果定理11·14中，仅假定f连续而不要求李布希兹条件成立的话，那么初值问题的解可能不唯一。例如方程

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$$

在包含(0，0)点的开集内$y = \varphi_1(x) \equiv 0$，及$y = \varphi_2(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$都是初值问题的解。容易看出$f(x,y) = y^{\frac{1}{3}}$在(0,0)点邻域内关于$y$不满足李布希兹条件。

习　题

1. 设S是距离空间，证明$C(S)$是完备的距离空间（定理11·12）。
2. 设A是完备距离空间S的闭子集。证明A作为距离空间是

完备的（定理11·13）。

3. 以$C_N(S)$代替定理11·11中的$C(S)$，对于$C_N(S)$证明这一定理。

4. 研究积分方程

$$\varphi(x)=g(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)dy$$

这里λ是常数，g在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$K$在方形$S=\{(x,y): a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$上连续。定义映象

$$\psi=T\varphi\equiv g(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)dy.$$

用不动点定理证明：对充分小的λ，积分方程存在唯一的解。

5. 设初值问题：$\dfrac{dx}{dx}=x^2+y^2$，$\varphi(0)=1$。用化为积分方程及逐次逼近的方法求$y=\varphi(x)$的近似序列的前六项。

6. 写出定理11·14证明中集E是$C(I)$的闭集的完整的证明。

7. 研究方程组$\dfrac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,\cdots y_N)$ $i=1,2,\cdots N$。对这方程组叙述并证明类似于引理11·1的命题。

8. 对方程组叙述并证明类似于定理11·14的定理。

第十二章　有界变差函数与黎曼—斯蒂阶斯积分

§12·1　有界变差函数

前些章研究了单变量、多变量函数的基本性质：连续性、可微性、解析性、可积性等。在物理以及应用问题中需要研究函数的另外的性质。拿最简单的 $R_1 \to R_1$ 的函数来说，如何量度一个函数取值的“振动”特性，在实际中就很有意义，而这种特性不容易由连续性及可微性来确定。为了描述函数的这种性质，引进变差的概念。这一概念起源于物理问题、工程学、概率论、伏里叶级数等的需要。本节介绍有界变差函数类，在§12·2用有界变差函数定义比黎曼积分更广泛的积分概念。

定义　设f是定义在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的实函数，$f$在$I$上的变差表示为$V_a^b f$，其定义为

$$V_a^b f=\sup\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

这里上确界是对I的所有划分$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$取的。如果$V_a^b f$是一有限数，称f在I上是有界变差函数；否则记为$V_a^b f=+\infty$。

先来研究变差的基本性质。如果给定函数f，那么$V_a^b f$仅依赖于区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$。下面定理给出变差关于区间具有可加性，这一结果相似于积分的区间可加性（定理5·3(d)）。

定理12·1 设给定$f: I\to \mathrm{R}_1$，$c\in I$。那么

$$V_a^b f = V_a^c f + V_c^b f. \tag{12·1}$$

首先证明$V_a^b\leqslant V_a^c f+V_c^b f$。不妨假设右端两项都是有限数。设$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$是$I$的任意划分。再加上分点$C$，例如$C$在$x_{k-1}$，$x_k$之间，构成划分$\Delta'$。那么

$$\sum_{i=1}^{k-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(c)-f(x_{k-1})|\leqslant V_a^c f,$$

$$\sum_{i=k+1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(x_k)-fc|\leqslant V_c^b f,$$

且由 $|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant|f(x_k)-fc|+|fc-f(x_{k-1})|$，导出

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant V_a^c f+V_c^b f.$$

既然划分Δ是任意的，便得$V_a^b f\leqslant V_a^c f+V_c^b f$。

再来证明$V_a^b f\geqslant V_a^c f+V_c^b f$。若$V_a^b f=+\infty$，不等式显然。若$V_a^c f=+\infty$，对任一正数$N$，$\exists$划分 $a=x_0<x_1\cdots<x_k=c$，使 $\sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|>N$。那么$a=x_0<x_1<\cdots<$

$x_k < x_{k+1} = b$是I的一个划分，便有

$$V_a^b f \geqslant \sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_k)| < N.$$

由N的任意性，$V_a^b f = +\infty$。同理当 $V_c^b f = +\infty$，也有$V_a^b f = +\infty$。这样，可以假定$V_a^c f$与$V_c^b f$都有限。现对$\forall \varepsilon > 0$，按上确界的定义，$\exists$一划分

$$\Delta_1: \ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = c$$

使

$$\sum_{i=1}^{k} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

同理$\exists$一划分

$$\Delta_2: \ c = x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b$$

使

$$\sum_{i=k+1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$V_a^b f \geqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| > V_a^c f + V_c^b f - \varepsilon.$$

由ε的任意性，有$V_a^b f \geqslant V_a^c f + V_c^b f$。

例1 设函数 $f(x) = \sin\frac{\pi}{x}$，当$0 < x \leqslant 1$；$f(0) = 0$。证

明 $V_0^1 f=+\infty$。

解 选取特殊的划分$x_0=0$，$x_1=\frac{2}{(2n+1)}$，

$x_2=\frac{2}{2n-1}$，…，$x_n=\frac{2}{3}$，$x_{n+1}=1$。那么对$\forall i$，$2\leqslant i\leqslant n$，$|f(x_i)-f(x_{i-1})|=2$，$|f(x_1)-f(x_0)|=|f(x_{n+1})-f(x_n)|=1$，所以$V_0^1 f\geqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=2n$。因为$n$可以任意大，所以$V_0^1 f=+\infty$。

例2 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$f'$在$I$上有界．证明$f$是有界变差函数。

解 设对$x\in I$，$|f'(x)|\leqslant M$，应用微分中值定理，当x_k，$x_{k-1}\in I$，有

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant M|x_k-x_{k-1}|.$$

因此对任意划分Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，

$$\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant M\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k+1}|=M(b-a),$$

所以 $V_a^b f\leqslant M(b-a)$。

把上例f'在I上有界，降低为f满足李布希兹条件：$|f(x_k)-f(x_{k-1})|<M|x_k-x_{k-1}|$，仍有$V_a^b f\leqslant M(b-a)$。这就表明有界变差函数类比导数有界的函数类，比满足李布

希兹条件的函数类都要广泛。事实上，当函数在I上具有单调性，函数在I上就是有界变差函数。

例3 设f是I上的递增函数，证明$V_a^b f = f(b) - f(a)$。

证明 对于任一划分$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$，有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - f(x_{i-1})) = f(x_n)$$

$$- f(x_0) = f(b) - f(a),$$

于是$V_a^b f = f(b) - f(a)$。

为了建立单调函数与有界变差函数的关系，给出下面引理。

引理12·1 设f是$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上的函数，且定义$\varphi(x) = V_a^x f$。如果$x_1, x_2 \in I$，$x_1 \leqslant x_2$，那么$V_{x_1}^{x_2} f = \varphi(x_2) - \varphi(x_1)$，且$V_{x_1}^{x_2} f \geqslant |f(x_2) - f(x_1)|$，函数$\varphi(x)$是不减的。

引理容易由有界变差函数的定义及定理12·1导出。

定理12·2 设f是$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上有界变差函数。如果$f$在$b$点左连续，那么$\varphi(x) = V_a^x f$在$b$点左连续。同样，如果$f$在$a$点右连续，那么$\varphi$在$a$点也右连续。$f$在$I$的任一连续点也是$\varphi$的连续点。

证明 仅需证明第一个判断，余者类似。对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$划分$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使

$$V_a^b f < \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \tag{12.2}$$

因为f在b点左连续，必要时可以在b点邻域增加新的分点，可以认为$|f(x_n)-f(x_{n-1})|<\frac{\varepsilon}{2}$. 由引理12·1，对于$x_{n-1}\leqslant x\leqslant b$的$x$，有

$$\varphi(x)\geqslant\varphi(x_{n-1})=V_a^{x_{n-1}}f\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$>\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|-\frac{\varepsilon}{2}.$$

把(12·2)式代入得到

$$\varphi(x)>V_a^b f-\varepsilon=\varphi(b)-\varepsilon,$$

由ε是任意的而φ不减，所以φ在b点左连续。

下面定理指出了单调函数和有界变差函数的关系。

定理12·3 设f是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的有界变差函数，那么存在$I$上不减函数$g$与$h$，使$x\in I$，有

$$f(x)=g(x)-h(x), \tag{12·3}$$

且

$$V_a^x f=g(x)+h(x)-f(a).$$

如果f在$c\in I$左（或右）连续，那么g及h在c点左（或右）连续。

证明 选取

$$g(x)=\frac{1}{2}\left[f(a)+V_a^x f+f(x)\right],\quad h(x)=\frac{1}{2}\left[f(a)+V_a^x f-f(x)\right]. \tag{12·4}$$

注意到$x_1, x_2 \in I$，$x_1 < x_2$时，$g(x_2) - g(x_1) = V_{x_1}^{x_2} f + f(x_2) - f(x_1)$，由引理12·1．有$V_{x_1}^{x_2} f \geqslant |f(x_2) - f(x_1)|$，因此$g(x_2) \geqslant g(x_1)$。同样可证$h(x)$是不减的。

设f在c点左（或右）连续，由定理12·2．$\varphi(x) = V_a^x f$在c点也左（或右）连续，因而g，h在c点左（或右）连续。

注　由（12·3）及(12·4)给出的f的分解不是唯一的．设ψ是I上任意的不减函数，也有分解$f=(g+\psi)-(h+\psi)$．当ψ是严格递增函数，这一f的分解是两个严格递增函数的差．

定理12·4　若f是$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上的不减函数，那么$f$的间断点至多是一可数集（这一结果曾在§6.3中叙述为定理6·16）。

证明　对$\forall c \in I$，由函数单调性$\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$及$\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$都存在（参看定理3·7）．又$f$不减显然$f(c^+) \geqslant f(c-)$．定义集$E_k = \{x: x \in I, f(x^+) - f(x-) \geqslant K > 0\}$，K是任一正实数，因为$f$是有界单调函数，$E_k$只能是有限点集。集

$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{\frac{1}{2^i}}$$是可数集，而E包含了f的所有间断点。

推论　若f在$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$上是有界变差函数，那么$f$在$I$中的间断点至多组成一可数集。

证明在区间上变差一致有界的函数列存在收敛子列的赫利定理（定理12·7），要用到选取收敛子列的著名的“康托对角线过程”．“对角线过程”是分析中应用广泛的一个重

要方法。虽然这里仅对区间上函数序列应用它，我们仍然给出它的相当一般化的形式。

定理12·5（康托对角线过程）　设X与Y是距离空间的集，Y是紧的。f_n，$n=1, 2, \cdots$，是给定的$X\to Y$的映象。$S=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$是$X$的可数子集，那么存在$\{f_n\}$的子列$\{g_n\}$，$\{g_n\}$在$S$的每个点都收敛。

证明　因为Y是距离空间的紧集，序列　$\{f_n(x_1)\}$存在收敛的子列$\{f_{1n}(x_1)\}$，且设$\lim\limits_{n\to\infty}f_{1n}(x_1)=y_1\in Y$。序列$\{f_{1n}(x_2)\}$含于Y内，它有收敛子列，记之为　$\{f_{2n}(x_2)\}$，且设$\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n}(x_2)=y_2\in Y$。注意$\{f_{2n}\}$是$\{f_{1n}\}$的子列，所以$\lim\limits_{n\to\infty}f_{2n}(x_1)=y_1$。继续这一过程得到子序列$\{f_{kn}\}$，分别在$x_1, x_2, \cdots, x_k$各点上收敛于$y_1, y_2, \cdots, y_k$。

现在考察对角线序列$\{f_{nn}\}$，对$\forall p$，$x_p\in S$，$f_{pn}(x_p)$收敛，对于$m>p$，$\{f_{mm}\}$是$\{f_{pn}\}$的子序列，因而$\{f_{nn}\}$在x_p点收敛。取$g_n=f_{nn}$，便得所需的结果，即$\{g_n\}$在S的每个点上收敛。

下一定理说明单调的函数列$\{f_n\}$在I的稠密集上收敛于f，那么在f的每个连续点处f_n收敛于f。

定理12·6　设f及f_n，$n=1, 2, \cdots$，都是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的不减函数，而$S$是$I$内的一个稠密集，对$\forall x\in S$都有$f_n(x)\to f(x)\,(n\to\infty)$。如果$x_0$是$I$的内点，且$f$在$x_0$点连续，那么$f_n(x_0)\to f(x_0)\,(n\to\infty)$。

证明　由连续定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$|x-x_0|>\delta$，便有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon/2.$$

由x_0是I的内点，可以认为δ如此之小，使$|x-x_0|<\delta$含于I内。而S在I内稠密，$\exists\ x_1, x_2\in S$满足$x_0-\delta<x_1<x_0$，$x_0<x_2<x_0+\delta$（图12·1）。由f不减，有

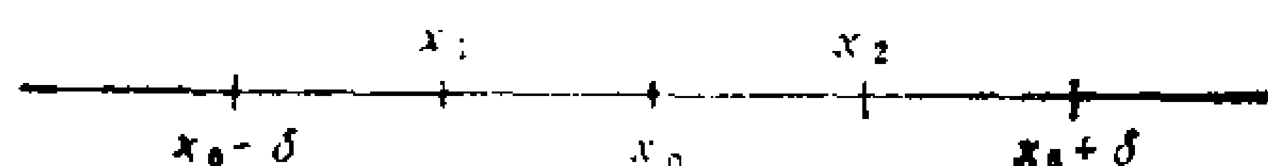


图 12·1

$$f(x_0)-\frac{1}{2}\varepsilon\leqslant f(x_1)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_2)\leqslant f(x_0)+\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{12·5}$$

由$\{f_n\}$在S的点上收敛，存在自然数N，使

$$|f_n(x_1)-f(x_1)|<\frac{1}{2}\varepsilon$$

及

$$|f_n(x_2)-(x_2)|<\frac{1}{2}\varepsilon \tag{12·6}$$

对所有$n>N$成立。由f_n不减，所以$f_n(x_1)\leqslant f_n(x_0)\leqslant f_n(x_2)$，由此及(12·5)与(12·6)导出

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant f(x_1)-\frac{1}{2}\varepsilon<f_n(x_1)\leqslant f_n(x_0)$$

$$\leqslant f_n(x_2)<f(x_2)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

于是 $$|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即f_n在x_0点收敛于$f(x_0)$。

注 由定理12·4可知，定理12·6中的f至多有可数个间断点。因此定理12·6中至多除去I的一个可数集之外，在I其他点f_n都收敛。由有界变差函数的分解定理12·3可知定理12·6对有界变差函数也成立。

因为在每一区间内都有可数稠密集（例如有理数的集），用康托对角线过程及定理12·6，可得下面著名的赫利定理。

定理12·7（赫利定理） 设f_n，$n=1, 2, \cdots$，是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的有界变差函数，如果$f_n$和它们的全变差一致有界（即∃常数$L$，$M$使$|f_n(x)|\leqslant L$及$V_a^b f_n\leqslant M$对一切$x$及$n$成立）。那么存在$\{f_n\}$的子序列$\{g_n\}$，$g_n$在$I$的每一点收敛于$f$，且$V_a^b f\leqslant M$。

证明 沿用(12·4)式，定义$\bar{g}_n=\frac{1}{2}\{(f_n(a)+V_a^x f_n+f_n(x)\}$，

$\bar{h}_n=\frac{1}{2}\{f_n(a)+V_a^x f_n-f_n(x)\}$，那么$\bar{g}_n$，$\bar{h}_n$是不减函数且一致有界。因此以下仅就$f_n$是不减函数证明定理就够了。

设S是I内包含a及b的稠密的可数集，$S=\{x_1, x_2, \cdots\}$。因为$J=\{x: -L\leqslant x\leqslant L\}$是$\mathbf{R}_1$内的紧集，可以应用康托对角线过程，∃$\{f_n\}$的子序列$\{h_n\}$对$\forall x_i\in S$，有$\lim\limits_{n\to\infty}h_n(x_i)=y_i\in J$。$h_n$是不减的，当$x_i<x_j$时，有$h_n(x_i)\leqslant h_n(x_j)$。因此对$x_p$，$x_q\in S$，$x_p<x_q$时，有$y_p\leqslant y_q$。定义

$$f_0(x)=\sup_{x_p<x} y_p,\quad 对x\in I,\ x_p\in S.$$

因当$z<w$时，S内小于Z的点也小于W，可知f_0是I上不减函数，对于$x_p\in S$，当$n\to\infty$，$h_n(x_p)\to f_0(x_p)=y_p$。根据定理12·6对f_0的任意的连续点x，$h_n(x)\to f_0(x)$。f_0最多除去一可数集T的点之外在I内其他各点连续。既然T是可数的，再次应用康托对角线过程，存在$\{h_n\}$的子列$\{g_n\}$在

T的每一点收敛，这样的$\{g_n\}$在I的每一点收敛，以f表示$\{g_n\}$的极限函数。

设$a=x'_0<x'_1<xx'_2<\cdots<x'_k=b$是$I$的任一划分，那么

$$\sum_{i=1}^{k}|f(x'_i)-f(x'_{i-1})|=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}|g_n(x'_i)-g_n(x'_{i-1})|$$

$$\leqslant M.$$

既然对任意n，有$V_a^b g_n\leqslant M$。因此$V_a^b f\leqslant M$。

下面定理给出确定函数为有界变差函数的充分条件，并给出计算它的变差的公式。

定理12·8 设f及f'在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，那么$f$在$I$上是有界变差函数，且

$$V_a^b f=\int_a^b|f'(x)|dx.$$

证明 定理的第一部分已在前面例2中给出了证明。设$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$是任意的划分，那么按微分中值定理，$\exists\xi_i$，$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，使

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}|f'(\xi_i)|\,|x_i-x_{i-1}|.$$

$|f'(x)|$于I上连续，$\int_a^b|f'(x)|dx$存在，因此对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$

$\delta>0$，对网孔$\|\Delta\|<\delta$的划分Δ都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}|f'(\xi_i)|\,|x_i-x_{i-1}|-\int_a^b|f'(x)|dx\right|$$
$$<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

由$V_a^b f$的定义，对上述的$\varepsilon>0$，$\exists$划分Δ_0：$a=z_0<z_1<\cdots<z_m=b$，
使

$$V_a^b f\geqslant\sum_{i=1}^{m}|f(z_i)-f(z_{i-1})|>V_a^b f-\frac{\varepsilon}{2}.$$

令Δ_1是Δ与Δ_0的共同细分，Δ_1：$a=x'_0<x'_1<\cdots<x'_p=b$，那么$\|\Delta_1\|<\delta$。所以有

$$V_a^b f\geqslant\sum_{i=1}^{p}|f(x'_i)-f(x'_{i-1})|\geqslant\sum_{i=1}^{m}|f(z_i)-f(z_{i-1})|$$
$$>V_a^b f-\frac{1}{2}\varepsilon.$$

及

$$\left|\sum_{i=1}^{p}|f(x'_i)-f(x'_{i-1})|-\int_a^b|f'(x)|dx\right|<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

综合起来，得到

$$\left|V_a^b f-\int_a^b|f'(x)|dx\right|<\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，$V_a^b f=\int_a^b |f'(x)|\,dx$成立。

注　函数f：$x\to x^{\frac{2}{3}}$在$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$上递增，它是有界变差的，但$f'$在0点邻域内无界，在0点不存在右导数，由此可见定理12·8的条件是充分而不必要的.

习　　题

1. 设f在$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$上为有界变差的，证明
$$|f(x)|\leqslant|f(a)|+V_a^x f\leqslant|f(a)|+V_a^b f.$$
2. 设f，g是I上的有界变差函数，证明$f-g$及$f\cdot g$是有界变差的。
3. 证明 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 在$I=\{x:0\leqslant x\leqslant 1\}$上非有界变差；而函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在I上是有界变差的。
4. 求使函数$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin(x^{-\beta}), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，成为有界变差的$\alpha$，$\beta$的取值。
5. 设f，g是$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$上的有界变差函数。证明
$V_a^b(f+g)\leqslant V_a^b f+V_a^b g$
$V_a^b(Kf)=|K|\,V_a^b f$，K是常数。

6. 设f是定义在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的函数，$\Delta$是$I$的划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，那么$\sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$是$f$的曲线内接多边形的长。定义$f$在$I$上的长为$L_a^b f=\sup\sum_{i=1}^{n}[(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2]^{\frac{1}{2}}$，上确界是对$I$的所有可能的划分所取的。

(a) 对任意的f证明不等式：

$$V_a^b f+(b-a)\geqslant L_a^b\geqslant[(V_a^b f)^2+(b-a)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

由此断定函数为有界变差$\Longleftrightarrow f$的曲线是有限长度的。

(b) 设$a<c<b$，证明

$$L_a^b f=L_a^c f+L_c^b f.$$

[提示：按定理12·1同样方法证明]

7. 称定义在I上的函数f为满足指数为α的一致的罕尔德条件，如果存在数M使$x_1, x_2\in I$有

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^{\alpha}.$$

(a) 若f满足$\alpha=1$的一致罕尔德条件，那么f是有界变差的。

(b) 举出一f满足$\alpha<1$的一致的罕尔德条件，但f不是有界变差函数。

8. 设$f(x)=x^n e^{-x}$，$x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant a\}$，$a>n>0$，计算$V_0^a f$。

9. 完成引理12.1的证明。

10. 完成定理12.2的证明。

11. 若f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续且其极大、极小值点共计是有限个。证明$f$是$I$上的有界变差函数。据此证明多项式在有限区间上是有界变差的。

12. 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上有界变差. 若对$\forall x\in I$, $|f(x)|\geqslant C>0$ (C是常数), 证明

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}\text{是}I\text{上的有界变差函数。}$$

§12·2 黎曼—斯蒂阶斯积分

黎曼—斯蒂阶斯积分是函数f对于另一函数g的积分。当$g(x)=x$的特殊情况，这种积分成为黎曼积分。为了叙述简便，R，$R—S$分别代表黎曼积分，黎曼—斯蒂阶斯积分。$R—S$积分在物理学、工程学及不少数学分支中都有重要应用。通过g的适当选取，它还能表示离散过程的量，这种积分特别适合于概率统计理论中应用。

定义 设f，g是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上的函数，如果$\exists$数$A$，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当$I$的划分$\Delta$的网孔$\|\Delta\|<\delta$，及$\forall\zeta_i$，$x_{i-1}\leqslant\zeta_i\leqslant x_i$，$i=1,2,\cdots n$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]-A\right|<\varepsilon. \qquad (12\cdot7)$$

那么称f关于g为$R—S$可积，称数A为f关于g在I上的$R—S$积

分，记为

$$A=\int_a^b f dg=\int_a^b f(x)dg(x).$$

和R积分一样，容易证明当A存在时它是唯一的。如果$g(x)=x$，(12·7)式的和就是黎曼和，这时R—S积分就变成了R积分。

重要的是函数g不连续，R—S积分也可能存在。例如，$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$于$I$上$f(x)\equiv 1$，而

$$g(x)=\begin{cases}0, & 当\ 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ 1, & 当\ \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n}[g(x_i)-g(x_{i-1})]$的积分和除了包含$x=\frac{1}{2}$的子区间的项之外，其他各项均为零。对任意的$I$的划分$\Delta$，$R$—$S$积分的和等于$g(1)-g(0)=1$。因此$R$—$S$积分存在且为1。

如果f与g在同一点间断，R—S积分可能不存在。例如在$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$上定义

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ 2, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\frac{1}{2},\\ 1, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

积分和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

只有含$x=\frac{1}{2}$的子区间的项不为零。即形如

$$f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})], \quad x_{k-1}<\frac{1}{2}\leqslant x_k,$$

$$x_{k-1}\leqslant\xi_k\leqslant x_k.$$

的项不等于零。其中$g(x_k)-g(x_{k-1})=1$，而$f(\xi_k)$依$\xi_k<\frac{1}{2}$，还是$\xi_k\geqslant\frac{1}{2}$分别取1或2的值，并且$f(\xi_k)$的两种取值与划分的网孔大小无关。因此$R$—$S$积分不存在。

作为和式极限的R—S积分，如下面定理所述，也有与R积分同样的基本性质，把它的证明留给读者。

定理12·9 (a)设$\int_a^b f dg_1$，$\int_a^b f dg_2$都存在，定义 $g=g_1+g_2$，那么

$$\int_a^b f dg=\int_a^b f dg_1+\int_a^b f dg_2.$$

(b) 设$\int_a^b f_1 dg$及$\int_a^b f_2 dg$存在，定义$f=f_1+f_2$，那么

$$\int_a^b f dg=\int_a^b f_1 dg+\int_a^b f_2 dg.$$

(c) $\int_a^b fdg$存在，c是常数。那么

$$\int_a^b (cf)dg = c\int_a^b fdg.$$

(d)设$a<c<b$。若$\int_a^c fdg$及$\int_c^b fdg$存在，那么，$\int_a^b fdg$存在，且

$$\int_a^b fdg = \int_a^c fdg + \int_c^b fdg.$$

下一定理指出当g是光滑函数，R—S积分可以化成R积分，这对于R—S积分的计算是有用的。

定理12·10 设f，g与g'都在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续。那么$\int_a^b fdg$存在，且

$$\int_a^b fdg = \int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{12·8}$$

证明 对$\forall\ \varepsilon>0$，要证明当划分网孔充分小时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})] - \int_a^b f(x)g'(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{12·9}$$

对(12·9)式中的$g(x_i)-g(x_{i-1})$，应用微分中值定理得

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i-x_{i-1}), \tag{12·10}$$

其中$x_{i-1}\leqslant\eta_i\leqslant x_i$。(12·10)右端的和在$\xi_i=\eta_i$时成为一R积分和；而在$\xi_i\neq\eta_i$时，当划分Δ的网孔充分小这个和能与R积分和任意地逼近。事实上，以M表示$\sup\limits_{x\in I}|f(x)|$，由$g'$在闭区间$I$上连续因而一致连续，对上述$\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当$|\xi_i-\eta_i|<\delta$有

$$|g'(\xi_i)-g'(\eta_i)|<\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}. \tag{12·11}$$

由此对任意的网孔小于δ的划分

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g'(\eta_i)-g'(\xi_i)](x_i-x_{i-1})\right|$$

$$<\sum_{i=1}^{n} M\frac{\varepsilon}{2M(b-a)}(x_i-x_{i-1})=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{12·12}$$

据R积分定义，当划分的网孔充分小（令这网孔小于δ），使

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-\int_a^b f(x)g'(x)dx\right|$$

$$<\frac{1}{2}\varepsilon. \tag{12·13}$$

综合(12·12)与(12·13)，对于任意的ξ_i，η_i，只要它们都是子区间$[x_{i-1}, x_i]$中的点，便有

$$\left|\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(x)g'(x)dx\right| < \varepsilon.$$

把(12·10)代入上式，便得(12·9)式成立。定理获证。

例1 求$\int_{-1}^{2} x^5 d(|x|^3)$。

解 分别计算$\int_{-1}^{0} x^5 d(-x^3)$ 及$\int_0^2 x^5 d(x^3)$。按定理12·10有

$$\int_{-1}^{0} x^5 d(-x^3) = -3\int_{-1}^{0} x^7 dx = -\frac{3}{8}x^8\Big]_{-1}^{0} = \frac{3}{8},$$

$$\int_0^2 x^5 d(x^3) = 3\int_0^2 x^7 dx = \frac{3}{8}x^8\Big]_0^2 = 96.$$

再由定理12·9(d)得

$$\int_{-1}^{2} x^5 d(|x|^3) = \frac{3}{8} + 96 = 96\frac{3}{8}.$$

下一定理与R积分的定理5.13类似，给出变量替换的公式，应用于积分计算。

定理12·11 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上关于$g$是可积的，$x(u)$在$J=\{u: c\leqslant u\leqslant d\}$上是连续递增函数，且$x(c)=a$，

$x(d)=b$。定义

$$F(u)=f[x(u)],\quad G(u)=g[x(u)].$$

那么F关于G在J上可积，且

$$\int_c^d F(u)dG(u)=\int_a^b f(x)dg(x). \tag{12·14}$$

若$x(u)$在J上递减，$x(c)=b$，$x(d)=a$，那么

$$\int_c^d F(u)dG(u)=-\int_a^b f(x)dg(x). \tag{12·15}$$

证明 由R—S积分定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当I的划分Δ：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$的网孔小于δ时，对$\forall\xi_i$，$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]-\int_a^b f(x)dg(x)\right|<\varepsilon. \tag{12·16}$$

因为$x=x(u)$在J上一致连续，对上述$\delta>0$，$\exists\delta_1$，当J中u'，u''满足$|u'-u''|<\delta_1$，便有$|x(u')-x(u'')|<\delta$。研究J的网孔小于δ_1的划分Δ_1：$c=u_0<u_1<\cdots<u_n=d$，于其子区间任取η_i，$u_{i-1}\leqslant\eta_i\leqslant u_i$。$x=x(u)$在$J$上递增，令$x_i=x(u_i)$，$\xi_i=x(\eta_i)$，相应地以$x_i$为分点的$I$的划分$\Delta$的网孔$\|\Delta\|<\delta$，且$x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$，所以

$$\sum_{i=1}^n F(\eta_i)[G(u_i)-G(u_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

按照$R—S$积分定义，由上面等式便得

$$\int_c^d F(u)\,dG(u) = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

当$x(u)$是递减的，令$x(u_i) = x_{n-i}$，$x(\eta_i) = \zeta_{n+1-i}$，那么

$$\sum_{i=1}^{n} F(\eta_i)[G(u_i) - G(u_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_{n+1-i})[g(x_{n-i}) - g(x_{n+1-i})].$$

令$k = n+1-i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，上式右端的和成为

$$-\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})].$$

这时由（12·16）导出

$$\int_c^d F(u)\,dG(u) = -\int_a^b f(x)\,dg(x).$$

下一结果是部分积分公式的一般化，它用于计算$R—S$

积分，并且还表明$\int_a^b fdg$及$\int_a^b gdf$同时存在。

定理12·12（部分积分法） 若$\int_a^b fdg$存在，那么$\int_a^b gdf$也存在并且

$$\int_a^b gdf = g(b)f(b) - g(a)f(a) - \int_a^b fdg \qquad (12\cdot17)$$

证明 由R—S积分定义，对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta' > 0$，使对于网孔小于δ'的划分Δ：$a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \cdots < x'_m = b$，及任取的$\zeta'_i$，$x'_{i-1} \leqslant \zeta'_i \leqslant x'_i$，都有

$$\left| \sum_{i=1}^{m} f(\zeta'_i)[g(x'_i) - g(x'_{i-1})] - \int_a^b fdg \right| < \varepsilon. \qquad (12\cdot18)$$

取$\delta = \frac{1}{2}\delta'$，对网孔$\|\Delta\| < \delta$的划分$\Delta$：$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，及点$\zeta_i$，$x_{i-1} \leqslant \zeta_i \leqslant x_i$，$i = 1, 2, \cdots n$。此外还取$\zeta_0 = a$及$\zeta_{n+1} = b$。这样$a = \zeta_0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \cdots \leqslant \zeta_{n+1} = b$是网孔小于$\delta'$的划分，也有$\zeta_{i-1} \leqslant x_{i-1} \leqslant \zeta_i$ $i = 1, 2, \cdots, n+1$。因此

$$\sum_{i=1}^{n} g(\zeta_i)[f(x_i) - f(x_{i-1})]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g(\zeta_i) f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(\zeta_i) f(x_{i-1})$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} g(\zeta_{i-1}) f(x_{i-1}) + g(a) f(a)$$

$$- g(a) f(a) - \sum_{i=1}^{n} g(\zeta_i) f(x_{i-1})$$

$$- g(b) f(b) + g(b) f(b)$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} g(\zeta_{i-1}) f(x_{i-1}) - g(a) f(a)$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} g(\zeta_i) f(x_{i-1}) + g(b) f(b)$$

$$= g(b) f(b) - g(a) f(a)$$

$$- \sum_{i=1}^{n+1} f(x_{i-1}) [g(\zeta_i) - g(\zeta_{i-1})] \qquad (12\cdot19)$$

右端的R—S和满足（12•18）。因此（12•19）的右端与（12•17）的右端的差的绝对值不超过ε　而（12•19）的最左端是（12•17）式左端的R—S和，所以定理成立。

后面将证明当f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$g$在$I$上有界变差，那么$\int_a^b f dg$存在。定理12•12说明交换关于$f$与$g$的条件R—S积分也存在。

例2　设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上具有连续的导函数，$a=a_0<a_1<\cdots<a_N=b$是任意的一有限点列。定义

$$g(x)=\begin{cases}C_i & a_{i-1}<x\leqslant a_i \qquad i=1,\ 2,\ \cdots N, \\ C_0 & x=a\end{cases},$$

其中C_0，C_1，C_2，…，C_N是常数，证明

$$\int_a^b g(x)\ f'(x)\ dx=C_N f(b)-C_0 f(a)$$

$$-\sum_{i=0}^{N-1} f(a_i)\ (C_{i+1}-C_i). \qquad (12\cdot 20)$$

解 对于I的每一子区间$I_i=\{x: a_{i-1}\leqslant x\leqslant a_i\}$.

按R—S积分定义可得

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\ dg(x)=f(a_{i-1})\ (C_i-C_{i-1}).$$

再据定理12·9的（d）得

$$\int_a^b fdg=\sum_{i=0}^{N-1} f(a_i)\ (C_{i+1}-C_i).$$

由部分积分法可知，$\int_a^b gdf$存在并且

$$\int_a^b gdf=C_N f(b)-C_0 f(a)-\sum_{i=0}^{N-1} f(a_i)\ (C_i-C_{i-1}).$$

注意到定理12·10对被积函数是阶梯函数时仍然成立，即

$\int_a^b g df = \int_a^b g f' dx$。于是（12·20）式成立。

为了讨论R—S可积函数类，采用第五章所叙述的达布方法。

定义 设f与g都定义在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上，$g$在$I$上不减。$\Delta: a_0=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$是$I$的划分，定义$\Delta_i g=g(x_i)-g(x_{i-1})$，$i=1, 2, \cdots, n$。

$$M_i=\sup_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x), \quad m_i=\inf_{x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i} f(x)。$$

达布—斯蒂阶斯上、下和简称为D—S和，其定义分别为

$$S^+(f, g, \Delta)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta_i g,$$

$$S_-(f, g, \Delta)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta_i g。$$

由g在I上不减，数$I'_i=\Delta_i g=g(x_i)-g(x_{i-1})\geqslant 0$，且$\sum_{i=1}^n \Delta_i g=g(b)-g(a)$。这样$\{I_i\}$构成以$g(a)$，$g(b)$为端点的区间$I'$的一个划分$\overline{\Delta}$，如果$\Delta'$是$\Delta$的细分，相应的$\overline{\Delta'}$也是$\overline{\Delta}$的细分。

下述引理与R积分的达布和的性质定理5·1完全一样，把它的证明留给读者。

引理12·2 设f，g都定义在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上，且$g$在$I$上不减。

(a) 如果$\forall x\in I$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，$\Delta$是$I$的划分，那么

$$m[g(b)-g(a)]\leqslant S_-(f,g,\Delta)\leqslant S^+(f,g,\Delta)$$
$$\leqslant M[g(b)-g(a)].$$

(b) 若Δ'是Δ的细分，那么

$$S_-(f,g,\Delta')\geqslant S_-(f,g,\Delta),$$
$$S^+(f,g,\Delta')\leqslant S^+(f,g,\Delta).$$

(c) 若Δ_1，Δ_2都是I的任意划分，那么

$$S_-(f,g,\Delta_1)\leqslant S^+(f,g,\Delta_2).$$

定义 上、下D—S积分分别定义为

$$\overline{\int_a^b} fdg=\inf_{\Delta} S^+(f,g,\Delta),$$

$$\underline{\int_a^b} fdg=\sup_{\Delta} S_-(f,g,\Delta).$$

确界是对I的所有划分Δ取的。当

$$\overline{\int_a^b} fdg=\underline{\int_a^b} fdg \tag{12·21}$$

称f关于g是D—S可积的，(12·21)式的值称为f关于g的D—S积分。

下面定理所列D—S上、下积分的基本性质与第五章所讲的达布积分的基本性质完全一样。

定理12·13 设f，f_1及f_2在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上有界，$g$在$I$上不减。

(a) 若$\forall x\in I$，$m\leqslant f(x)\leqslant M$，那么

$$m[g(b)-g(a)]\leqslant\underline{\int_a^b} fdg\leqslant\overline{\int_a^b} fdg$$

$$\leqslant M[g(b)-g(a)].$$

(b) 若$f_1(x)\leqslant f_2(x)$ $(\forall x\in I)$，那么

$$\underline{\int_a^b} f_1dg\leqslant\underline{\int_a^b} f_2dg,\quad \overline{\int_a^b} f_1dg\leqslant\overline{\int_a^b} f_2dg.$$

(c) 设 $a<c<b$，那么

$$\underline{\int_a^c} fdg+\underline{\int_c^b} fdg=\underline{\int_a^b} fdg,\quad \overline{\int_a^c} fdg+\overline{\int_c^b} fdg=\overline{\int_a^b} fdg.$$

(d) $\int_a^c fdg$ 及$\int_c^b fdg$ 都$\exists\Longleftrightarrow\int_a^b fdg\ \exists$。当此，

$$\int_a^c fdg+\int_c^b fdg=\int_a^b fdg.$$

定理12·13与定理5·2，定理5·3的证明相同，由读者完成它的证明。

定理12·14 设f在$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$g$在$I$上不减，那么（R—S）积分$\int_a^b fdg$存在。

证明 由f在I上一致连续，对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使I中x，y满足$|x-y|<\delta$时，便有

$$|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2[1+g(b)-g(a)]}.$$

设$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$是网孔小于$\delta$的划分，$I_i=\{x: x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\}$。由$f$在每一$I_i$上连续，$\exists\ \eta_i$与$\zeta_i\in I$。使$m_i=f(\eta_i)$，$M_i=f(\zeta_i)$，那么

$$S^+(f, g, \Delta)-S_-(f, g, \Delta)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f(\zeta_i)-f(\eta_i)]\Delta_i g$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\varepsilon}{2[1+g(b)-g(a)]}\Delta_i g<\frac{1}{2}\varepsilon.$$

因为ε是任意的，因而$(D—S)\int_a^b fdg$存在。现在令ζ_i是I_i内的任意点，由（D—S）和介于S^+与S_-之间，有

$$(D—S)\int_a^b fdg-\varepsilon<S_-(f, g, \Delta)=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta_i g$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta_i g\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta_i g$$

$$=S^+(f, g, \Delta)<(D—S)\int_a^b fdg+\varepsilon.$$

由ε的任意性，可知，（R—S）积分和$\sum_{i=1}^{n}f(\zeta_i)\Delta_i g$趋向

于（D—S）$\int_a^b fdg$，即（R—S）积分$\int_a^b fdg$存在且等于（D—S）$\int_a^b fdg$。

推论 f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$g$在$I$上有界变差，那么R—S积分$\int_a^b fdg$存在。

由定理12·3有界变差函数可以分解成两不减函数的差，再据定理12·9的（a），可知定理12·14的推论成立。

容易举出f，g，使得f在I上（R）积分不存在，但$\int_a^b fdg$存在。例如，定义

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}, & 0<x<1,\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

显然$\int_0^2 f(x)dx$不存在。但是，在[0，1]上（R—S）和总等于零，因此

$$\int_0^2 fdg=\int_1^2 fdg=\int_1^2 dx=1.$$

下一结果给出（R—S）积分的上界。

定理12·15 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续且$g$在$I$上有界变差，令$M=\max|f(x)|$，那么

$$\left|\int_a^b fdg\right|\leqslant MV_a^b g.$$

其证明由（R—S）积分定义及定理12·14推论立即可得，细节留给读者.

如果在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上$\{f_n\}$，$\{g_n\}$分别收敛于$f$，$g$。为了给出$\int_a^b f_n dg_n$收敛于$\int_a^b fdg$的条件。先来证明如下的技术性结果。

引理12·3 设f在$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，$g$在$I$上有界变差。对于$\delta>0$，定义

$$\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{x,y\in I\\|x-y|<\delta}}|f(x)-f(y)|$$

如果I的划分$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$的网孔$\|\Delta\|<\delta$，而$\zeta_i$满足$x_{i-1}\leqslant\zeta_i\leqslant x_i$，$i=1, 2, \cdots n$，那么

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta_i g-\int_a^b fdg\right|\leqslant\omega(f,\delta)V_a^b g.$$

证明 由定理12·9，有

$$\int_a^b fdg=\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} fdg,$$

又显然地有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\zeta_i)\,dg = f(\zeta_i)\,\Delta_i g,$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta_i g - \int_a^b f dg = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\zeta_i) - f(x)] dg.$$

若Δ的网孔$\|\Delta\| < \delta$，由ζ_i与x介于x_{i-1}，x_i之间，对于这样的x，便有

$$|f(\zeta_i) - f(x)| \leqslant \omega(f, \delta).$$

因此

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\,\Delta_i g - \int_a^b f dg\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(\zeta_i) - f(x)] dg\right|$$

$$\leqslant \omega(f, \delta) \sum_{i=1}^{n} \mathop{V}_{x_{i-1}}^{x_i} g = \omega(f, \delta)\, V_a^b g.$$

定理12·16 设 f_n，$n = 1, 2, \cdots$，在$I = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$上连续，且$f_n$在$I$上一致收敛于$f$。而$g_n$，$g$都是有界变差的，且$V_a^b g \leqslant L$以及对所有$n$，$V_a^b g_n \leqslant L$。再设$S$是$I$内的稠密集，且$S$含有$a$及$b$。如果在$S$上有$g_n \to g$，那么

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n dg_n=\int_a^b f dg.$$

证明 令$\varepsilon_n=\max_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$，由定理12·15，有

$$\left|\int_a^b (f_n-f)\ dg_n\right|\leqslant\varepsilon_n V_a^b g_n\leqslant\varepsilon_n L.$$

注意到当$n\to\infty$，$\varepsilon_n\to 0$，所以

$$\left|\int_a^b f_n dg_n-\int_a^b f dg\right|=\left|\int_a^b (f_n-f)\ dg_n+\int_a^b f\ (dg_n-dg)\right|$$

$$\leqslant\varepsilon_n L+\left|\int_a^b f dg_n-\int_a^b f dg\right|.$$

下面证明当$n\to+\infty$时，$\left|\int_a^b f dg_n-\int_a^b f dg\right|\to 0$．对给定$\varepsilon>0$，取$\delta>0$，使$\omega(f,\delta)<\frac{\varepsilon}{3L}$．再取一网孔小于$\delta$的划分$\Delta$：$a=x_0<x_1<\cdots<x_k=b$，且分点都属于$S$，由引理12·3有

$$\left|\sum_{i=1}^{k}f(\xi_i)[g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})]-\int_a^b f dg_n\right|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{3L}\cdot L=\frac{\varepsilon}{3}. \qquad (12\cdot 22)$$

同理还有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]-\int_a^b f dg\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12·23}$$

再根据在 I 的稠密子集 S 上 $g_n \to g$，对所有 i，$\exists N$，使当 $n>N$ 有

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)\{[g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})]-[g(x_i)-g(x_{i-1})]\}\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{12·24}$$

而把（12·22），（12·23），（12·24）代入下列不等式得

$$\left|\int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg\right| \leqslant \left|\int_a^b f dg_n - \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)[g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})]\right| + \left|\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)[g_n(x_i)-g_n(x_{i-1})] - \sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]\right| + \left|\sum_{i=1}^{k} f(\zeta_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]-\right.$$

$$\int_a^b f dg \Big| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

于是定理获证。

例3 设$f_n = 1-\frac{1}{n}\sin nx$，$g_n = 1+x^n$，$n=1, 2, \cdots$，

证明

$$\int_0^1 f_n dg_n \to 1 \ (n\to\infty).$$

解 注意到f_n在$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$上一致收敛于1，而函数列$g_n$收敛于$g$，这里

$$g(x)=\begin{cases}1 & 0\leqslant x<1\\ 2 & x=1.\end{cases}$$

因此定理12·16的条件都被满足，所以

$$\int_0^1 f_n dg_n \to \int_0^1 1dg=1.$$

习 题

1. (a) 设$a<c_1<c_2<\cdots<c_n<b$ 是$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$的点。

若

$$g(x)=\begin{cases}1 & x\neq c_i\\ d_i & x=c_i,\end{cases}$$

f在I上连续，求$\int_a^b fdg$的表达式。

(b) 若$a_1=c_1<c_2<\cdots<c_n=b$，求$\int_a^b fdg$的表达式。

〔提示：先对$a=c_1<c_2=b$作出(a)。〕

2．设$g(x)=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant\pi$，求$\int_0^{\pi} xdg$的值。

3．设$g(x)=e^{|x|}$，$-1\leqslant x\leqslant 1$，求$\int_{-1}^{1} xdg$的值。

4．设$g(x)=K$，$K-1<x\leqslant K$，$K=1, 2, 3, \cdots$，求

$\int_1^4 xdg$。

5．g同习题4，证明$\int_1^5 gdg$不存在。

6．证明定理12·9。

7．用定理12·11计算$\int_0^{\sqrt{\pi}}\cos u^2 d(\cos u^2)$。

8．证明若f，g在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上有共同间断

点，那么$\int_a^b fdg$不存在。

9. 设$f\equiv c$，$x\in I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$，$c$是一常数，若$g$是$I$上有界变差函数，用部分积分法（定理12·12）证明

$$\int_a^b fdg=c[g(b)-g(a)]。$$

10. 证明引理12·2。
11. 证明定理12·13。
12. 设f在$I=\{x: a\leqslant x<\infty\}$上连续，$g$在$I$上为有界变差的，定义$\int_a^\infty fdg=\lim\limits_{x\to\infty}\int_a^x fdg$（当然以极限存在为前提条件）。证明若$f$在$I$上连续有界，

$$g(x)=\frac{1}{k^2},\ k-1\leqslant x<k,\ k=1,\ 2,\ \cdots,$$

那么

$$\int_1^\infty fdg=-\sum_{k=1}^\infty f(k+1)\left[\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+2)^2}\right].$$

*13. 按12中关于半无限区间上积分的定义，若b_K是常数，$g(x)=b_K$，$k-1<x\leqslant k$，$k=1,\ 2,\ \cdots$。证明

任何一无穷级数 $\sum_{K=1}^{\infty} a_K$ 可表示为（R—S）积分。

14．证明定理12·15。

15．设 $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^3x^2}$ 且 $g_n(x)=x^n$，

$x\in I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$。

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dg_n(x)$ 存在，并求它的值。

16．设 $f(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是有理数}\\ 0 & \text{当}x\text{是无理数.}\end{cases}$

g 是一非常数的在 $I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 上不减的函数。

证明 $\int_0^1 f\,dg$ 不存在。

*17．设在 $I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 上 f 连续，g 不减，证明中值定理：$\exists\,\xi\in I$ 使

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)=f(\xi)\int_a^b dg(x).$$

〔提示：应用定理12·13的（a），及关于 f 的介值性。〕

18．设 f 与 g 于 $I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$ 上连续，定义

$h(x)=\int_a^x g(t)\,dt$，那么 $\int_a^b f\,dh=\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$。

第十三章　距离空间上的函数

§13·1　完备的距离空间

本章详细地研究定义在距离空间上的函数，并证明在现代分析中很有用的连续函数延拓定理、逼近定理。如同完备性对不动点定理那样，这些定理都与空间的完备性有关，此外还与稠密性概念有关。

完备的距离空间S是具有如下性质的距离空间：每一哥西序列都收敛于S内的一个点。R_1，R_2是完备距离空间。另外的重要完备距离空间是$C(S)$，它是定义在距离空间S上的一切有界连续函数f所组成的空间，它的距离函数d定义为

$$d(f, g) = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|, \quad f, g \in C(S), \tag{13·1}$$

$C(S)$中的收敛性是一致收敛（参看定理11·11与定理11·12）。完备距离空间中的闭集作为距离空间是完备的。例如R_1中的闭区间$I = \{x: a \leqslant x \leqslant b\}$是完备的，而开区间$J = \{x: a < x < b\}$不是完备空间，因为$J$内收敛于$a$，$b$的序列是哥西序列，但$a$，$b$却不属于$J$。$R_1$的全体有理数组成的距离空间是不完备的。同样，$C(S)$中的以$O$为中心，以$r$为半径的闭球$\overline{B(O, r)} = \{f: \in C(S), d(f, O)$

$\leqslant r\}$ 是完备的，而开球 $B(O,r)=\{f:f\in C(S),$ $d(f,O)<r\}$ 是不完备的。

定义 设S是一距离空间，称S内的集A是S内的稠密集 $\Longleftrightarrow \overline{A}=S$。设$A$，$B$都是$S$内的集，称$A$在$B$内稠密 $\Longleftrightarrow$ $\overline{A}\supset B$。

例如，$S=\mathrm{R}_1$，A为全体有理数集，A是R_1中稠密集。若B为全体无理数集，A与B不相交，$\overline{A}=\mathrm{R}_1\supset B$，$A$在$B$内稠密。

定义 设S是一距离空间，$A\subset S$，称A在S内无处稠密 $\Longleftrightarrow$ 集$\overline{A}$不含有S内的球。

例如，S为R_1，有限点集是无处稠密的。一个收敛的点序列、整数点集都是R_1中无处稠密的集。重要的是要注意稠密与无处稠密并不是互补的性质，一个集可能不是稠密的又不是无处稠密的。例如R_1中有界的区间在R_1中不是稠密的又不是无处稠密的。

下面定理给出无处稠密概念的另一常用的等价形式。

定理13·1 距离空间S内的集A在S内无处稠密 $\Longleftrightarrow S$的每个开球B含有一个与A不相交的开球B_1。

证明

(a) 设A在S内无处稠密（即$\overline{A}$不含有S的球），证明S的每个开球B含有与A不相交的球。若不然，那么$\exists S$的一个球B_0，B_0内的每个球B_1包含A的点。对$\forall P\in B_0$，那么以P为中心、半径充分小完全含于B_0的球，总包含A的点，因此P点是A的极限点。因为P是B_0的任意点，所以$B_0\subset\overline{A}$。这与$\overline{A}$不含有S的球相矛盾。

(b) 设S的每个开球含有与A不相交的球，证明$\overline{A}$不含有S的球。事实上，若$\overline{A}$含有S的球B，B中点P是$\overline{A}$的内点必为集A极限点，按极限点的定义，以P点为中心的任何球含有A中的点。由p的任意性，这与S的每个球都含有与A不相交的球相矛盾。

注　集A无处稠密性等价定义中，S的每个开球B含有一个与A不相交的"开球"可改述成"闭球"．事实上，设B含有的与A不相交的开球为B_1，那么B_1内的闭球B自：然也与A不相交．

定义　距离空间S内的集A称为第一纲的$\Longleftrightarrow A$是可数个无处稠密集的并集。不是第一纲的集称为第二纲的集。

例　因为R_N内仅含一个点的集是无处稠密的，所以R_N内可数点集是第一纲的。R_N内的有理点集是可列的，它是第一纲的且在R_N中稠密，由此可见第一纲集可能是稠密的。如果整个空间是有理点所组成，那么它的任何集都是第一纲的集，这种空间里不存在第二纲的集。另一方面，若距离空间含有孤立点，那么孤立点的集是开集它是第二纲的集。

完备距离空间总是第二纲的，这一定理常在分析中应用，通常称作纲推理。

定理13·2　设S是一完备的距离空间，A是S内第一纲集。若$C=S-A$（C称为A的余集），那么C在S内是稠密的。

证明　我们证明S的每个球B必定含有C的点，由此C在S内稠密。因为A是第一纲的，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$，这里$T_n$ $(\forall n)$

是无处稠密的。设$B_0 = B_0(P_0, r_0)$是S内以P_0为心、r_0为半径的一个球。因为T_1无处稠密，∃球$B(P_1, r_1) \subset B_0$，$B(P_1, r_1)$与T_1不相交。可以取$r_1 < \frac{r_0}{2}$，且$\overline{B(p_1 r_1)} \subset B_0$。因为$T_2$是无处稠密的，球$B(P_1 r_1)$含有$\overline{B(P_2 r_2)}$与$T_2$不相交，且$r_2 < \frac{r_1}{2}$。继续这一过程，得到递缩球序列：$B(P_n, r_n) \equiv B_n$，$r_n \leqslant \frac{r_{n-1}}{2}$及$\overline{B_n} \subset B_{n-1}$，$B_n$与$T_n$不相交，$n=1, 2, \cdots$。当$n>m$，有

$$d(P_m, P_n) \leqslant r_m < \frac{r_0}{2^m},$$

因此$\{P_n\}$是一哥西序列。由S是完备的，∃一点$q \in S$，使$\lim\limits_{n \to \infty} P_n = q$。对$\forall m$，当$n>m$，$P_n \in B_m$。所以$q \in \overline{B_m}$，$q \overline{\in} T_m$。既然对$\forall m$，$q \overline{\in} T_m$，于是$q \in C$。而$q \in \overline{B_m} \subset B_0$，$B_0$是$S$中任取的一个球，它总含有$C$的点。所以$C$在$S$内稠密。

推论 完备距离空间是第二纲的。

证明 设S是第一纲的，由于$S-S$是空集，便与定理13·2相矛盾。

定理13·3（贝尔纲定理） 完备距离空间内的非空开集是第二纲的。

定理13·3可用类似于定理13·2的方法来证明，细节留给读者。

借助于下面引理，可把由距离空间S_1的集A到距离空间S_2的一致连续映象f，保持一致连续性延拓到$\overline{A}$上，而且延拓是唯一的。

引理13·1 设A是距离空间S_1的子集。

(a) $\forall p\in(\overline{A}-A)$，$p$是$A$的极限点。

(b) 如果$p\in\overline{A}$，$\exists\{p_n\}\subset A$，当$n\to+\infty$，$p_n\to p$。

(c) S_1，S_2分别以d_1，d_2为距离的距离空间，$A\subset S_1$，映象 $f: A\to S_2$在A上一致连续。如果$\{p_n\}$是A中的哥西序列，那么$\{f(p_n)\}$是S_2中的哥西序列。

证明 (a) 设A'是A的极限点集，那么由定义

$\overline{A}=A\cup A'$，$\overline{A}-A=\{p: p\in(A\cup A')-A\}$，因此(a)成立。

(b) 若$p\in(\overline{A}-A)$，p是A的极限点，那么由定理6·4，(b)成立；若$p\in A$，对$\forall n$取$p_n=p$，当然有$p_n\to p$，(b)也成立。

(c) 对$\forall\varepsilon>0$，由一致连续性定义，$\exists\delta>0$，使当p'，$p''\in A$且$d_1(p', p'')<\delta$时，有$d_2(f(p'), f(p''))<\varepsilon$。因为$\{p_n\}$是$A$中的哥西序列，$\exists N$，使当$m$，$n>N$，有$d_1(p_n, p_m)<\delta$。由此当$m$，$n>N$时，有$d_2(f(p_n), f(p_m))<\varepsilon$，即$\{f(p_n)\}$是$S_2$内的哥西序列。

定理13·4 设S_1，S_2是距离空间，S_2是完备的，$A\subset S_1$，$f: A\to S_2$在A上一致连续。那么存在唯一的映象$f^*: \overline{A}\to S_2$，f^*在$\overline{A}$上一致连续，对$\forall p\in A$，有$f^*(p)=f(p)$。

证明 对于$\forall p\in A$，定义$f^*(p)=f(p)$。当$p\in$

$(\overline{A}-A)$，由引理13·1，$\exists\{p_n\}\subset A$，当$n\to\infty$时$p_n\to p$。由$\{p_n\}$是哥西序列，f在A上一致连续仍由引理13·1可知$\{(f)p_n)\}$是S_2中哥西序列。而S_2是完备的，$\{f(p_n)\}$有极限，定义这一极限为$f^*(p)$，下面证明f^*：$\overline{A}\to S_2$在$\overline{A}$上是一致连续的。

对$\forall\varepsilon>0$，因为f在A上一致连续，$\exists\delta>0$，使p'，$p''\in A$且$d_1(p',p'')<2\delta$，便有

$$d_2(f^*(p'),f^*(p''))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

现令q'，$q''\in\overline{A}$，且$d_1(q',q'')<\delta$。设$\{p_n'\}$，$\{p_n''\}$是A中分别以q'，q''为极限的序列，当$n\to\infty$时$p_n'\to q'$，$p_n''\to q''$，且有$\{f^*(p_n')\}$，$\{f^*(p_n'')\}$分别以如上定义的$f^*(q')$，$f^*(q'')$为极限。那么$\exists$自然数N，使当$n>N$，有

$$d_1(p_n',p_n'')\leqslant d_1(p_n',q')+d_1(q',q'')+d_1(q'',p_n'')<2\delta.$$

因而

$$d_2(f^*(p_n'),f^*(p_n''))<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是对充分大的n，

$$d_2(f^*(q'),f^*(q''))<d_2(f^*(q'),f^*(p_n'))+d_2(f^*(p_n'),f^*(p_n''))+d_2(f^*(p_n''),f^*(q''))$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

由q'，q''是$\overline{A}$中任意满足$d_1(q', q'')<\delta$的元素对，所以f^*在$\overline{A}$上一致连续。

现证f^*的唯一性。设f^{**}是在$\overline{A}$上一致连续，且对$P\in A$有$f^{**}(p)=f(p)$。对$p\in\overline{A}-A$，$\exists\{p_n\}\subset A$，使当$n\to\infty$，$p_n\to p$。那么

$$f^{**}(p)=\lim_{n\to\infty}f^{**}(p_n)=\lim_{n\to\infty}f(p_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}f^*(p_n)=f^*(p),$$

即$f^{**}\equiv f^*$，定理获证。

从一距离空间到另一距离空间中能够保持距离不变的映象有特殊的重要性。

定义 称$f: S_1\to S_2$为等距映象$\Longleftrightarrow f$是1－1的，且对$\forall p, q\in S_1$，都有

$$d_1(p, q)=d_2(f(p), f(q)).$$

欧几里得空间R_N中的平移、旋转是等距映射的简单例子。更特殊地，当$S_1=S_2=R_1$，C为常数，$f(x)=x+C$显然是等距映象。又当$S_1=S_2=R_2$时，由

$$y_1=x_1\cos\theta+x_2\sin\theta$$

$$y_2=-x_1\sin\theta+x_2\cos\theta$$

给出的映象$(x_1, x_2)\to(y_1, y_2)$（θ是常数）是等距的。

从几何上来看，任一"刚体运动"的映象是等距的。

定理13·5 设S_1，S_2是距离空间且S_1是完备的，f：$S_1 \to S_2$是等距映象，那么$f(S_1)$作为距离空间，它是完备的。

证明 假设$\{f(p_n)\}$是$f(S_1)$中的哥西序列，因为f是等距的，$\{p_n\}$是S_1中的哥西序列，而S_1又是完备的，$\{p_n\}$有极限$p \in S_1$。f于S_1上有定义，$f(p) \in f(S_1)$，且由$d_1(p_n, p) = d_2(f(p_n), f(p))$可知$n \to \infty$时，$f(p_n) \to f(p)$。因此$f(S_1)$内任一哥西序列在$f(S_1)$中有极限，$f(S_1)$是完备的。

注 当所讨论的问题只涉及到空间的距离时，定理中的$f(S_1)$可抽象地看作就是S_1。

为了多方面的目的，要求距离空间具有完备性。下面证明任意一个距离空间S都可以嵌入一完备的距离空间$\overline{S}$（定理13·7）。即可以填加一些点到空间S，使在新空间$\overline{S}$内每个哥西序列都有极限点，并且$\overline{S}$的距离是S的距离的延拓。

定义 设S是以d为距离函数的距离空间，称S的两个哥西序列$\{p_n\}$与$\{q_n\}$是等价的$\Longleftrightarrow$当$n \to \infty$时$d(p_n, q_n) \to 0$。等价的两个哥西序列，表示为$\{p_n\} \approx \{q_n\}$。

等价的哥西序列的基本性质叙述为下面的定理。

定理13·6 设$\{p_n\}$，$\{q_n\}$都是距离空间S内的哥西序列。

(*a*) 数列$d(p_n, q_n)$，当$n \to \infty$时趋向于极限。

(*b*) 如果$\{p_n\} \approx \{q_n\}$，且$n \to \infty$时$p_n \to p$，那么

$$q_n \to p.$$

(c) 若 $\{p'_n\}$，$\{q'_n\}$ 是哥西序列，且 $\{p'_n\} \approx \{p_n\}$，$\{p'_n\} \approx \{q_n'\}$，那么 $\lim\limits_{n\to\infty} d(p_n, q_n) = \lim\limits_{n\to\infty} d(p'_n, q'_n)$。

证明 (a) 由三角形不等式

$$d(p_n, q_n) \leqslant d(p_n, p_m) + d(p_m, q_m) + d(q_m, q_n).$$

得

$$d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m) \leqslant d(p_n, p_m) + d(q_m, q_n).$$

交换m，n，便得

$$|d(p_n, q_n) - d(p_m, q_m)| \leqslant d(p_n, p_m) + d(q_m, q_n).$$

这说明数的序列 $\{d(p_n, q_n)\}$ 是一哥西序列，由$\mathbf{R}_1$完备当$n\to\infty$时，$d(p_n, q_n)$ 趋向于极限。

(b) 及 (c) 的证明留给读者。

定义 设 $\{p_n\}$ 是距离空间S的哥西序列，$\{p_n\}$ 在 S 内没有极限点。S内所有与 $\{p_n\}$ 等价的哥西序列所组成的类称为S的理想元素。

例如，若Q是全体有理数按通常距离的空间，那么所有趋向于某个无理数的Q的哥西序列构成Q的一个理想元素。把这一理想元素和这一无理数相一致，即以这一理想元素作为这一无理数的定义。令S'表示距离空间S的一切理想元素的集，以$S\cup S'$定义一个包含S的距离空间$\bar{S}$，$\bar{S}$中的距离$\bar{d}$如下定义：对于p，$q\in\bar{S}$，$\exists\{p_n\}$，$\{q_n\}\subset S$分别是确定

p，q的等价类中的哥西序列

$$\bar{d}(p,\ q)=\begin{cases} d\ (p,\ q), & 当p,\ q\in S, \\ \lim\limits_{n\to\infty} d\ (p,\ q_n), & 当p\in S,\ q\in S', \\ \lim\limits_{n\to\infty} d\ (p_n,\ q), & 当p\in S',\ q\in S, \\ \lim\limits_{n\to\infty} d\ (p_n,\ q_n), & 当p,\ q\in S'. \end{cases}$$

容易验证$\bar{S}$在$\bar{d}$之下是距离空间。而使S中点映象为$\bar{S}$的同一点的映象$S\to\bar{S}$，显然是等距的。可见S的点p也可看作含有$\{p=p_n\}$这一特殊哥西序列的等价类。S在$\bar{S}$中是稠密的，而$\bar{S}$是完备的。这一结果一般化为下面的定理。

定理13·7 以$\bar{d}$为距离的空间$\bar{S}$是完备的距离空间，且$\exists$ $S\to\bar{S}$内的等距映象f，使f（S）在$\bar{S}$中稠密。

证明 设$\{p_n\}$是$\bar{S}$内的哥西序列。要证明$\exists\ \bar{p}\in\bar{S}$，当$n\to\infty$，有$\bar{d}$（$\bar{p}$，$p_n$）$\to 0$。按定义对每个元素$p_n\in\bar{S}$，$\exists$ S内的哥西序列$\{q_{nk}\}$，满足$\bar{d}$（p_n，q_{nk}）$\to 0$（$k\to\infty$）。令$\varepsilon_n>0$，且当$n\to\infty$时，$\varepsilon_n\to 0$。从二重序列$\{q_{nk}\}$中可以取出一子序列，$q'_n=q_{nk_n}$，使$\bar{d}$（p_n，q'_n）$<\varepsilon_n$对$\forall n$成立。由三角形不等式导出

$$\bar{d}(q'_n,\ q'_m)\leqslant\bar{d}\ (q'_n,\ p_n)+\bar{d}\ (p_n,\ p_m)+\bar{d}(p_m,\ q'_m). \tag{13·2}$$

(13·2) 式右端的第一、第三项由$\bar{d}(p_n, q'_n)<\varepsilon_n$，而当$n\to\infty$时$\varepsilon_n\to 0$。所以对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使$m$，$n>N$便有$\varepsilon_n<\frac{\varepsilon}{3}$，且$\bar{d}(q'_n, p_n)<\frac{\varepsilon}{3}$，$\bar{d}(p_m, q'_m)<\frac{\varepsilon}{3}$。而由$\{p_n\}$是$\bar{S}$中的哥西序列，对充分大的$N$，也有$\bar{d}(p_m, p_n)<\frac{\varepsilon}{3}$。于是当$n$，$m>N$便有

$$d(q'_n, q'_m)<\varepsilon,$$

即$\{q'_n\}\subset S$，且是S内的哥西序列。设$\bar{p}$是相应于$\{q'_n\}$的$\bar{S}$内的理想元素，那么当$n>N$，

$$\bar{d}(\bar{p}, p_n)\leqslant\bar{d}(\bar{p}, q'_n)+\bar{d}(q'_n, p_n)<2\varepsilon,$$

所以当$n\to\infty$时，$p_n\to p$，即$\bar{S}$是完备的。

设$p\in S$，令$f(p)=p$，这个$S\to\bar{S}$的映象由$\bar{d}$的定义它是等距映象。对$\forall p\in\bar{S}$，由$\bar{S}$的定义$\exists S$的哥西序列$\{p_k\}$，当$k\to\infty$时，$\bar{d}(p_k, p)\to 0$，即S在$\bar{S}$中稠密。

注 (i) $\bar{S}$称作S的完备化空间．由S在$\bar{S}$中稠密可知S的完备化$\bar{S}$是唯一的．

(ii) 距离空间的完备化是数学分析的一个基本的重要思想和方法．由有理数出发构造性地定义无理数得到实数系是这一思想的最初的起源．例如在连续函数空间$C_{[0,1]}$中定义距离

$$d_1(x, y)=\int_a^b |x(t)-y(t)|\,dt, \quad x(t), y(t)\in C_{[0;1]}.$$

在d_1之下$C_{[0;1]}$这个距离空间不完备，把它完备化，所得到的空间是包含$C_{[0,1]}$的函数类．这一函数类就是在现代数学中非常重要的勒贝格可积函数空间$L_{[0,1]}$．$L_{[0;1]}$比黎曼可积函数类还要广泛．

习　题

1. 设S是距离空间，$C(S)$是S上有界连续函数的集。证明伴之如下的距离

$$d(f, g) = \sup_{x\in S}|f(x) - g(x)|,$$

$C(S)$是距离空间，而且是完备的距离空间。

设$M(S)$是S上全体有界函数的集，仍取上面的距离，$M(S)$是否是一距离空间？

2. 设$x = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$及$y = (b_1, b_2, \cdots, b_n \cdots)$都是有界实数序列。定义

$$d(x, y) = \sup_n |a_n - b_n|.$$

证明全体有界实数序列的集合，在上述距离之下是一距离空间。这一空间是完备的吗？

* 3. 设$A = \{x: 0<x<1, x为无理数\}$.证明A是$\mathbf{R}_1$中第二纲的集。

4. 设$p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$是整系数多项式。A表示所有整系数多项式的根的集。证明集A是复平面内的第一纲的集（复平面$\mathbf{C}$的距离 $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}}$.其中

$$z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2.）$$

* 5. 设$I = \{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$是$\mathbf{R}_1$内单位区间，$\forall x\in I$表示为三进制小数：

$$x = 0, a_1\ a_2\ a_3\cdots,$$

其中a_i取0，1，或2。设A是I的这样的子集，它

的点的三进小数表示的a_i不取1。

(a) 证明A是一不可数集。

(b) 证明A在I内无处稠密。

6. 详细地写出贝尔纲定理（定理13·3）的证明。

7. 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$按$R_1$中的距离$I$是距离空间。举出$I$的子集$A$及$f: A\to R_1$的连续映象，而$f$不能被延拓为$\overline{A}\to R_1$的连续函数。即证明定理13·4中要求$f$一致连续性假设不能被减弱为连续性。

8. 设S_1，S_2是离空间且$f: S_1\to S_2$是等距的，S_2是完备的。那么$f(S_1)$是完备的吗？证明你的回答。

9. 证明定理13·6的（b）及（c）。

10. 验证定理13.7之前所定义的$\bar{d}$是一距离，因而$\bar{S}$是一距离空间。

*11. $C_{[0,1]}$表示$I=\{t: 0\leqslant t\leqslant 1\}$上的连续函数的空间，证明：取$d(x,y)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$，那么$C_{[0,1]}$是完备的距离空间。若取$d_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt$。证明在$d_1$之下$C_{[0,1]}$也成为距离空间。举出这距离空间的一个哥西序列$\{x_n\}$，$x_n$不存在极限点。

§13·2 阿采拉定理，连续函数的延拓

在许多应用中要求从距离空间S上定义的连续函数族$\mathscr{F}$当中找出收敛的函数列。这就是要求找出$C(S)$中具有何种

条件的子集$\mathscr{F}$是$C(S)$中的紧集，本节的阿采拉定理就是叙述$C(S)$中紧集条件的，这些条件当中首先是要求距离空间S具有可分性。

定义 距离空间S是可分的$\Longleftrightarrow S$含有在S内稠密的可列子集。

R_1中的有理点集是可列的稠密子集，因此R_1是可分的距离空间。同样，R_N是可分的。事实上R_N中的有理点$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$（$x_i$是有理数），组成$R_N$之可列的稠密子集。

定理13·8 凡紧的距离空间是可分的。

证明 定理6.25指出，对$\forall\delta>0$，$\exists$有限个点$p_1, p_2, \cdots, p_k$（k依赖于δ），使$S\subset\bigcup_{i=1}^{k}B(p_i;\delta)$，即有限个球$B(p_i;\delta)$覆盖了$S$。取$\delta=\frac{1}{n}$（$n=1,2,\cdots$），相应于$\frac{1}{n}$，取这样以$\frac{1}{n}$为半径能覆盖$S$的有限个球的球心集的并，既然它是可列个有限点集的并集，所以是S的可列子集，并且它在S中稠密。

注 这里给出一个不可分距离空间的例子.

设给定实数列$\{x_n\}$，如果存在M，使对$\forall n$，有$|x_n|\leqslant M$，序列$\{x_n\}$称为有界数列. 用x表示有界数列，研究所有有界数列x的空间S. 定义S的距离

$$d(x, y)=\sup_i|x_i-y_i|,(x=\{x_i\}, y=\{y_i\}\in S) \tag{13·3}$$

S是一距离空间. 我们证明S是不可分的.

证明 反证法. 假若S是可分的，那么有可列集$\{x^m\}$，$m=1,2,\cdots$, $\{x^m\}$在S内稠密. 记$x^m=(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m, \cdots)$，并如下构造元素$y=$

$y_1, y_2, \cdots y_n \cdots)$,

$$y_i=\begin{cases}1, & \text{当} x_i^i\leqslant 0, \\ -1, & \text{当} x_i^i>0,\end{cases} \qquad i=1,2,\cdots.$$

据（13·3）式，显然$d(x^m, y)\geqslant 1$对每一m成立．这表明$\{x^m\}$在S内不稠密，因此S是不可分的．

定义 设$\mathscr{F}$是给定距离空间S内集A上定义的函数f所组成的族，$p_0\in A$，称$\mathscr{F}$在p_0点是等度连续的$\Longleftrightarrow$对$\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使所有$p\in A\cap\overline{B(p_0, \delta)}$及$f\in\mathscr{F}$，都有

$$|f(p)-f(p_0)|<\varepsilon。\qquad (13\cdot 4)$$

如果$\mathscr{F}$在A的每个点等度连续，称$\mathscr{F}$在A上等度连续。

由定义，显见等度连续函数族中的每个函数是连续的。但其逆不真，因为等度连续性要求（13·4）式对$\mathscr{F}$中所有函数都成立。

例 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$。$f_n=x^n$，$x\in I$，$\mathscr{F}=\{f_n\}$。对于$I$中的点$x_0\neq 1$，由$|x^n-x_0^n|<\dfrac{|x-x_0|}{1-x_0}$，对于给定$\varepsilon<0$，取$\delta=(1-x_0)\varepsilon$，可使在$|x-x_0|<\delta$时，对一切$n$

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|=|x^n-x_0^n|<\varepsilon。$$

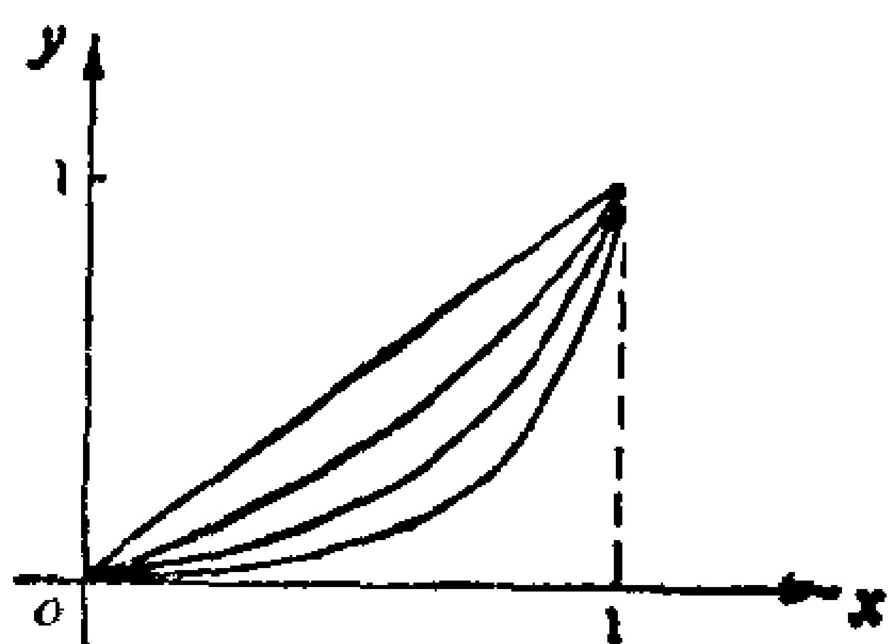


图 13·1

即$\mathscr{F}$在$x_0\neq 1$的每个x_0点是等度连续的。而在$x=1$点的邻域内，对给定的ε，相应的δ随n增大而缩小，当$n\to\infty$时，$\delta\to 0$（图13·1）。因此不存在对一切n都适用的δ，$\mathscr{F}$在$x=1$点非

等度连续。

另一方面，族$\mathscr{F}=\{f_n\}$，$f_n=n\sin\frac{x}{n}$，$x\in J=\{x:0\leqslant x<\infty\}$，$\mathscr{F}$在$J$上是等度连续的。事实上，对$\forall n$，应用微分中值定理，在$x_1$与$x_2$之间$\exists \bar{x}_n$，满足

$$\left|n\sin\frac{x_1}{n}-n\sin\frac{x_2}{n}\right|\leqslant\left|\cos\frac{\bar{x}_n}{n}\right|\cdot|x_1-x_2|\leqslant|x_1-x_2|,$$

这样对给定$\varepsilon>0$，可以取$\delta=\varepsilon$便得（13·4）。

找一个简单的准则以判定函数族的等度连续性是重要的。若区间I上的函数族$\mathscr{F}$中的函数的一阶导数有共同的界，即$\exists M$，对$\forall f\in\mathscr{F}$及$\forall x\in I$，有$|f'(x)|\leqslant M$，那么$\mathscr{F}$在区间I上是等度连续的。事实上，由微分中值定理导出

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|f'(\xi)|\cdot|x_1-x_2|\leqslant M|x_1-x_2|,$$

取$\delta=\frac{\varepsilon}{M}$，便有（13·4）式成立。更一般的判别准则可参考本节的习题3。

定义 设$\mathscr{F}$是距离空间S上定义的实值函数族，称$\mathscr{F}$是一致有界的$\Longleftrightarrow\exists M>0$，使$|f(x)|\leqslant M$，对所有$f\in\mathscr{F}$及$x\in S$成立。

注意到一个等度连续的函数族可以不是一致有界的，甚至还可能是无界的。例如，$f_n(p)=n$，$p\in S$，$\{f_n\}$ $(n=1,$

2，…就是等度连续而不一致有界的函数族。$f_n(x)=\frac{x}{n}$，$x\in R_1$，与$f_n(x)=n\sin\frac{x}{n}$都是等度连续而无界的函数族。

引理13·2 设A是距离空间S内的紧集，$\mathscr{F}$是$A\to R_1$的函数族，$\mathscr{F}$是等度连续且一致有界的。我们令$D=\sup\limits_{p,q\in A} d(p,q)$称为$A$的直径。定义

$$K=\sup_{\substack{p,q\in A\\ f\in\mathscr{F}}}|f(p)-f(q)|$$

那么$\exists$ $I=\{x:0<x<\infty\}$上的函数ψ，具有下列的性质：

(i) ψ是不减的；

(ii) 当$x\geqslant D$，$\psi(x)=K$，

(iii) 当$d(p,q)\leqslant x$时，对一切$f\in\mathscr{F}$有

$$|f(p)-f(q)|\leqslant\psi(x);$$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0^+}\psi(x)=0$ (图13·2)

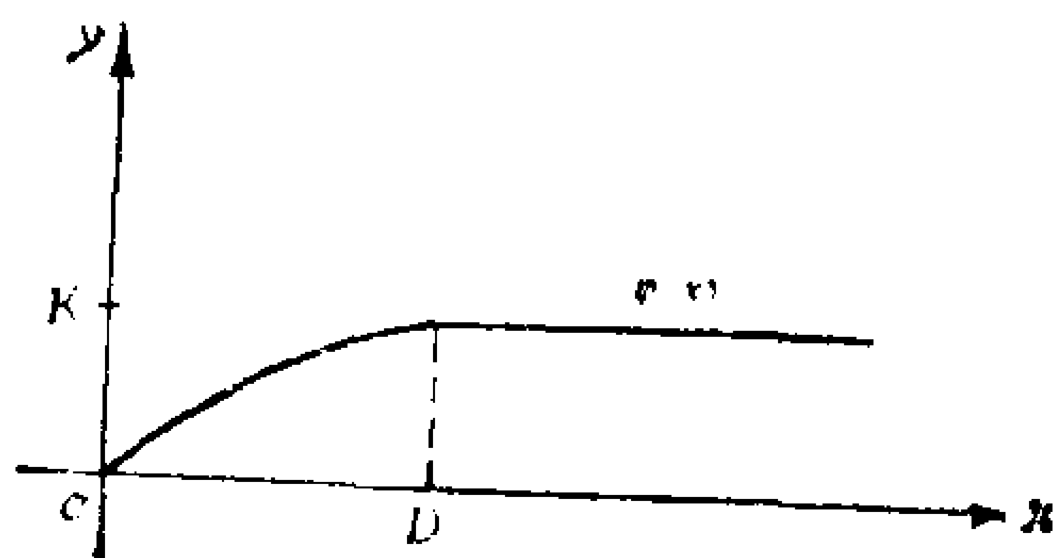


图 13·2

证明 用(iii)来定义ψ：

$$\psi(x)=\sup_{\substack{d(p,q)<x\\ f\in\mathscr{F}}}|f(p)-f(q)|,$$

上确界对A中满足$d(p, q)\leqslant x$的一切p, q, 及$\mathscr{F}$中的一切f所取。由$\mathscr{F}$是一致有界的，因此$\psi(x)$有定义。由$\psi(x)$的定义，显然$\psi(x)$是x的不减函数，即(i)成立。既然当p, $q\in A$, 便有$d(p, q)\leqslant D$, 因此当$x\geqslant D$, $\psi(x)=K$,即(ii)成立。性质(iii)由ψ的定义立即得出。为了证明(iv)，令$\varepsilon>0$, 由$\mathscr{F}$是等度连续的，对$\forall p\in A$, $\exists$以p为中心以某正数r为半径的球$B(p, r)$, 使当$q\in B(p, r)\cap A$, 及一切$\mathscr{F}$中的f, 都有

$$|f(p)-f(q)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

因为A是紧集由勒贝格引理（定理6·27），存在$\delta>0$, 使当$q\in A$, 每个球$B(q, \delta)$位于上述某个球$B(p, r)$内。现设p_0, q_0是A中满足$d(p_0, q_0)<\delta$的任意的两个点，那么p_0, q_0都属于$B(p_0, \delta)$, 而$B(p_0, \delta)$含于上述某球$B(\bar{p}, \bar{r})$之内，当然有p_0, $q_0\in B(\bar{p}, \bar{r})$, 因而对所有$f\in\mathscr{F}$, 都有

$$|f(p_0)-f(q_0)|\leqslant|f(p_0)-f(\bar{p})|+|f(\bar{p})-f(q_0)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$\psi(\delta)\leqslant\varepsilon$, 由$\varepsilon$是任意的，所以$\lim\limits_{x\to 0^+}\psi(x)=0$.

求微分方程或积分方程的解常循如下的途径：首先求出

方程的一列近似解，第二步证明近似解的族是等度连续且一致有界的，借助于下面的阿采拉定理从函数族中找出一收敛的子序列，最后证明函数序列的极限为所求的解．例如求 $\frac{dy}{dx}=f(x,\ y)$，$y_0=y(x_0)$的解的欧拉折线法，就是采用这样的途径。

定理13·9（阿采拉定理） 设S是可分的距离空间，$f_n: S\to R_1$，$n=1,\ 2,\ \cdots$，组成S上等度连续且一致有界的族$\mathscr{F}$。那么

（i）存在$\{f_n\}$的子序列，f_{k1}，f_{k2}，$\cdots$，$f_{k_n}\cdots$，在S的每一点收敛于连续函数f。

（ii）若空间S是紧的，那么子序列$\{f^{k}{}_n$一致收敛于f。

证明 设S可列的稠密子集$A\equiv\{p_n\}$。由$\{f_n\}$一致有界，$\{f_n(p_1)\}$是一有界的实数列，因此$\{f_n(p_1)\}$有一收敛子序列，记为$\{g_{1k}(p_1)\}$。考察$\{g_{1k}(p_2)\}$，，这还是有界实数列，因而它有收敛子列，记为$\{g_{2k}(p_2)\}$，继续这一过程，按“康托对角线过程”得到对角线序列g_{11}，g_{22}，g_{33}，$\cdots g_{kk}$，$\cdots$，在每一点p_n收敛。简记，$g_{kk}=g_k$，g_k在A上的极限函数表示为f。

现在把f由A延拓到S，并证明f在S上连续。设$p\in S$，对$\forall\varepsilon>0$，由$\mathscr{F}$的等度连续性，$\exists\,\delta>0$，使当$d(p,\ q)<\delta$，对一切k，有

$$|g_k(p)-g_k(q)|<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{13·5}$$

因为A在S内稠密，所以$\exists\,q_0\in A$，满足$d(p,\ q_0)<\delta$。由

$$|g_k(p)-g_l(p)| \leqslant |g_k(p)-g_k(q_0)| + |g_k(q_0) - g_l(q_0)| + |g_l(q_0)-g_l(p)|,$$

右端的一、三项据（13·5）都小于$\frac{\varepsilon}{3}$；而中间的项由g_k在A上收敛，$\exists N$，当k，$l>N$便有

$$|g_k(q_0)-g_l(q_0)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是$\{g_k(p)\}$是哥西数列，它的极限定义为$f(p)$。这样定义的f在S上还是连续的。对$\forall p_0\in S$及$\forall\varepsilon>0$，由$\mathscr{F}$等度连续性，对于满足$d(p, p_0)<\delta$的一切p及一切k，都有

$$|g_k(p)-g_k(p_0)|<\varepsilon.$$

令$k\to\infty$，又有$g_k(p)\to f(p)$与$g_k(p_0)\to f(p_0)$，对上面不等式求极限，得

$$|f(p)-f(p_0)|\leqslant\varepsilon.$$

即f在$\forall p_0\in S$连续。定理的(i)获证。

当S是紧空间时，证明收敛是一致的。对于$\forall\varepsilon>0$，由引理13·2，$\exists x>0$。使当$d(p, q)\leqslant x$

$$|g_n(p)-g_n(q)|\leqslant\psi(x)=\frac{\varepsilon}{3}.$$

对一切n都成立。考察S内所有半径为x的球，S是紧的，据定理6·25，$\exists$有限个这样的球，球心为$\bar{p}_1$，$\bar{p}_2$，…，$\bar{p}_m$，使

$S\subset\bigcup_{i=1}^{m}B(\bar{p}_i,\ x)$。因为

$$\lim_{n\to\infty}g_n(\bar{p}_i)=f(\bar{p}_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m。$$

既然m是个定数，可取充分大的N，使当$n>N$，对$i=1,2,\cdots,m$都有

$$|f(\bar{p}_i)-g_n(\bar{p}_i)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

对$\forall p\in S$，p被上述m个球之一所包含，例如$p\in B(\bar{p}_i,\ x)$。于是当$n>N$，就有

$$|g_n(p)-f(p)|\leqslant|g_n(p)-g_n(\bar{p}_i)|+|g_n(\bar{p}_i)-f(\bar{p}_i)|+|f(\bar{p}_i)-f(p)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

而N与p点无关，因此g_n一致收敛于f。

注 (i)从定理13·9的证明可知，要求$\mathscr{F}=\{f_n\}$具有一致有界性在于利用R_1的有界数列存在收敛子列。既然R_N中的有界序列同样存在收敛子列因此若$\mathscr{F}$是定义在S到R_N内的矢值函数族，一致有界性、等度连续性与R_1的情况同样定义，只要把$|f(p)|$及$|f(p)-f(q)|$解释为R_N中的距离，引理13·2及阿采拉定理仍成立。其证明也仅需把R_1中的距离换成R_N中的距离。

(ii)取$S=[a,b]$，对于$C[a,b]$定理12·9可叙述为：定义在$[a,b]$上的等度连续且一致有界的函数族存在一致收敛的子序列。对于$C_N[a,b]$也有同样结论。按照§6·4的紧性概念，可以把阿采拉定理叙述成：$C_N[a,b]$的闭子集$\mathscr{F}$为$C_N[a,b]$中紧集的充分条件是$\mathscr{F}$等度连续且一致有界的。读者容易证明条件还是必要的。

现在研究连续函数延拓问题。设f：$I\to R_1$是$I=\{x$：

$a\leqslant x\leqslant b\}$上连续函数。定义

$$g(x)=\begin{cases}f(a), & 当 x<a,\\ f(x), & 当 a\leqslant x\leqslant b,\\ f(b), & 当 x>b.\end{cases}$$

g是f在R_1上的连续延拓，且$\max_{x\in R_1}|g(x)|=\max_{x\in I}|f(x)|$。例中的区间$I$为闭的条件对能否连续延拓是关键性的。例如函数$f(x)=\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$在$J=\{x: a<x<b\}$内连续，但它不能被连续延拓到$R_1$上。对于距离空间中闭集上连续函数可以保持着上、下确界延拓的一般化定理是数学分析中著名的泰兹延拓定理。

为了证明泰兹延拓定理，需要下面的定义和引理。

定义 设A是距离空间S内的集，$p\in S$，定义点p到A的距离$d(p, A)$为

$$d(p, A)=\inf_{q\in A} d(p, q).$$

对给定的集A，$d(p, A)$是空间S上定义的函数，引理13·3说明这一函数的性质。

引理13·3 设S是距离空间，给定$A\subset S$，$\varphi(p)=d(p, A)$，那么$\varphi(p)$是S上的连续函数且对于$\forall p, q\in S$，$|\varphi(p)-\varphi(q)|\leqslant d(p, q)$（图13·3）。

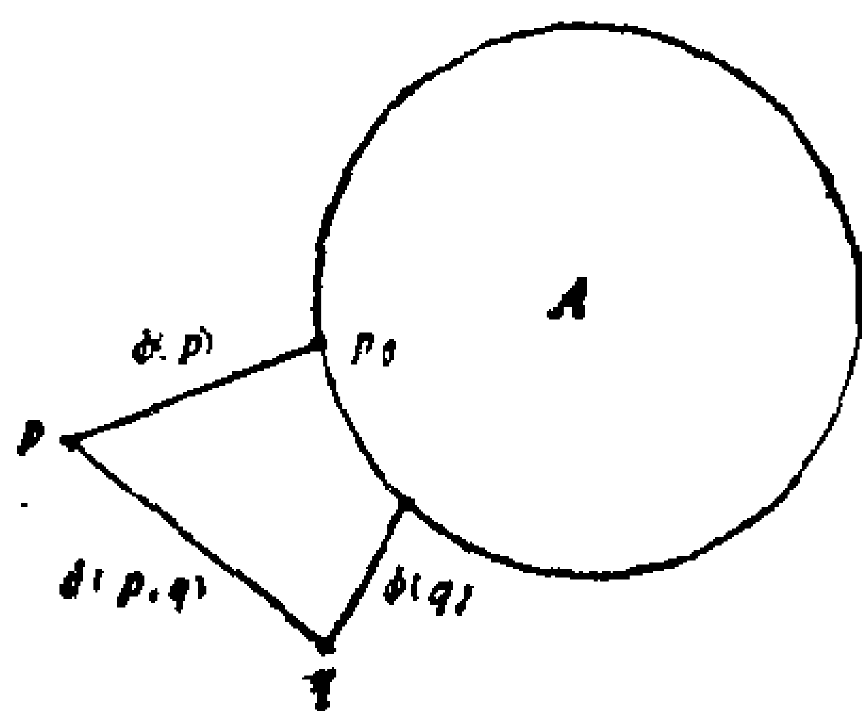


图 13·3

证明 对$\forall\varepsilon>0$，$\exists p_0\in A$满足$\varphi(p)>d(p, p_0)-\varepsilon$。由三

角形不等式有

$$d(q, p_0) \leqslant d(q, p) + d(p, p_0) \leqslant d(p, q) + \varphi(p) + \varepsilon$$

再由 $\varphi(q)$ 的定义，应有

$$\varphi(q) \leqslant d(q, p_0) < d(p, q) + \varphi(p) + \varepsilon,$$

所以

$$\varphi(q) - \varphi(p) < d(p, q) + \varepsilon.$$

由ε的任意性，应有

$$\varphi(q) - \varphi(p) \leqslant d(p, q).$$

交换p与q便导出

$$|\varphi(p) - \varphi(q)| \leqslant d(p, q).$$

引理13·4 设A，B都是距离空间S中的闭集，且A与B不相交。那么存在连续函数$\psi: S \to \mathbf{R}_1$满足：$0 \leqslant \psi(p) \leqslant 1$。$(\forall p \in S)$；当$p \in A$，$\psi(p) = 0$；当$p \in B$，$\psi(p) = 1$。

证明 定义

$$\psi(p) = \frac{d(p, A)}{d(p, A) + d(p, B)},$$

$\psi(p)$具有所要求的性质。

注 对$\forall a > 0$，定义$\psi_1(p) = -a + 2a\psi(p)$具有性质：$-a \leqslant \psi_1(p) \leqslant a$，当$p \in A$，$\psi_1(p) = -a$；当$p \in B$，$\psi_1(p) = a$。

下一节将建立用光滑函数序列一致逼近连续函数的定理，为此扩大连续函数的定义域是重要的。下一结果是连续

函数延拓的基本定理。

定理13·10（泰兹延拓定理） 设A是距离空间S的一个闭集，$f: A \to \mathbf{R}_1$是连续、有界函数，并记$M = \sup_{p \in A} |f(p)|$。那么存在$S$上的连续函数，$g: S \to \mathbf{R}_1$，满足$p \in A$，$g(p) = f(p)$。且对于$S$中的一切$p$，$|g(p)| \leqslant M$。

证明 如下定义函数列$\{f_n\}$，$\{\psi_n\}$并以$\{f_n\}$及$\{\psi_n\}$构成$\{g_n\}$，而所求的g将作为g_n的一致极限。

令$f_1(p) = f(p)$，$p \in A$，并定义集

$$A_1 = \{p: p \in A, f_1(p) \leqslant -\frac{1}{3}M\}$$

$$B_1 = \{p: p \in A, f_1(p) \geqslant \frac{1}{3}M\},$$

集A_1，B_1为不相交的闭集。根据引理13·4的注，$\exists S$上的连续函数$\psi_1(p)$，满足，$\forall p$，$|\psi_1(p)| \leqslant \frac{1}{3}M$，及

$$\psi_1(p) = -\frac{1}{3}M，当p \in A_1，$$

$$\psi_1(p) = \frac{1}{3}M，当p \in B_1。$$

定义

$$f_2(p) = f_1(p) - \psi_1(p), \quad p \in A.$$

那么必有$|f_2(p)| \leqslant \frac{2}{3}M$，$p \in A$，事实上，当$p \in A_1$，

$f_2(p)=f_1(p)+\frac{1}{3}M$，而$-M\leqslant f_1(p)\leqslant-\frac{1}{3}M$，有$|f_2(p)|\leqslant\frac{2}{3}M$。当$p\in B_1$，$f_2(p)=f_1(p)-\frac{1}{3}M$，而由$B_1$定义，$\frac{1}{3}M\leqslant f_1(p)\leqslant M$，仍有$|f_2(p)|\leqslant\frac{2}{3}M$。当$p\in A-(A_1\cup B_1)$，按定义有$|f_1(p)|\leqslant\frac{1}{3}M$，$|\psi_1(p)|\leqslant\frac{1}{3}M$，同样有$|f_2(p)|\leqslant\frac{2}{3}M$。

现在定义

$$A_2=\{p:p\in A,\ 且f_2(p)\leqslant-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M\},$$

$$B_2=\{p:p\in A,\ 且f_1(p)\geqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M\},$$

A_2，B_2是不相交的闭集。用上述同样的方法，按引理13·4，∃S上的连续函数$\psi_2(p)$，$\psi_2(p)$满足：对$\forall p$，$|\psi_2(p)|\leqslant\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M$，及

$$\psi_2(p)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M，当p\in A_2,$$

$$\psi_2(p)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M，当p\in B_2。$$

定义$f_3(p)=f_2(p)-\psi_2(p)$，且有$|f_3(p)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2M$。继续这样作下去，可定义

$$A_n=\left\{P: P\in A\text{且}f_n(P)\leqslant-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M\right\},$$

$$B_n=\left\{p: p\in A\text{且}f_n(P)\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M\right\}.$$

接下来按同样方法定义

$$\psi_n\text{，对}p\in S,\quad|\psi_n(P)|\leqslant\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}M,$$

再定义

$$f_{n+1}(p)=f_n(p)-\psi_n(p)\text{，还有}|f_{n+1}(p)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^nM.$$

按归纳法原理得到连续函数序列$\{f_n\}$及$\{\psi_n\}$，$n=1,2,\cdots$。

使用$\{\psi_n\}$，定义

$$g_n(P)=\psi_1(p)+\psi_2(p)+\cdots+\psi_n(p),\qquad p\in S.$$

对$m>n$，有

$$|g_m(p)-g_n(p)|=|\psi_{n+1}(p)+\psi_{n+2}(p)+\cdots+\psi_m(p)|$$

$$\leqslant|\psi_{n+1}(p)|+|\psi_{n+2}(p)|+\cdots+|\psi_m(p)|\leqslant\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\right.$$

$$+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{m}\Big]\cdot M\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\left[1+\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{m-n}\right]\cdot M$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot M.$$

由此可见，$\{g_n(p)\}$是一哥西序列且收敛是一致的，$\{g_n(p)\}$的一致极限函数为$g(p)$，$g(p)$于S上连续。现在证明g是f的延拓。为此注意到对于$p\in A$，

$$g_n=\psi_1+\cdots+\psi_n=\sum_{i=1}^{n}(f_i-f_{i+1})=f_1-f_{n+1}.$$

而$|f_{n+1}(p)|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n}M$，当$n\to\infty$，$f_{n+1}(p)\to 0$。于是当$n\to\infty$，$g_n(p)\to g(p)=f_1(p)=f(p)$，即当$p\in A$时，有$g(p)=f(p)$，$g$是$f$的延拓。此外，对于$\forall P\in S$，

$$|g(P)|\leqslant\frac{1}{3}M\left[1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+\cdots\right]=M.$$

习　题

1. 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$，且以$\mathscr{B}$表示$I$上全体有界函数的集，对$f$，$g\in\mathscr{B}$，定义

$$d(f,g)=\sup_{x\in I}|f(x)-g(x)|.$$

证明$\mathscr{B}$是一不可分的距离空间。

2. 设$x=(c_1, c_2, \cdots, c_n\cdots)$ $\{c_n\}$是实数序列，且$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=0$，以$\mathscr{C}_0$表示所有这样序列$x$的集

$y=(d_1, d_2, \cdots d_m\cdots)$，$x, y\in\mathscr{C}_0$定义

$$d(x, y)=\sup_{1\leqslant i<\infty}|c_i-d_i|.$$

证明$\mathscr{C}_0$是一可分的距离空间。

〔提示：研究$\mathscr{C}_0$的形如$(r_1, 0, 0, \cdots)$，$(r_1, r_2, 0, 0, \cdots)$，$(r_1, r_2, \cdots r_k, 0, 0, \cdots)$等元素，$r_i$是有理数。〕

3. 设S是一距离空间，f在S上满足罕尔德条件，即∃正数M及a，$0<a\leqslant 1$，使

$$|f(p)-f(q)|\leqslant M[d(p, q)]^a.$$

证明由这样的f组成的函数族$\mathscr{F}$是等度连续的。

4. 设$\mathscr{F}$是在$I=\{x: a\leqslant x<\infty\}$上定义的可微的实函数族。设$M_0$及$M_1$是这样的常数：对所有$f\in\mathscr{F}$，$|f(x)|\leqslant M_0$，$|f'(x)|\leqslant M_1$，$\mathscr{F}$中是否恒有在$I$上一致收敛的子序列？

5. 设$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$，$S=\{(x, y): a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant y\leqslant b\}$，$K: S\to R_1$在$S$上连续。定义

$$f(x)=\int_a^b K(x, y)g(y)dg$$

g是I上的可积函数，且设$\mathscr{G}$是由g织成的在I上一致有界的函数族，相应的f的函数族为$\mathscr{F}$。证明$\mathscr{F}$含有一

致收敛子序列。

6. 对定义在可分距离空间S上于$\mathbf{R}_N$中取值的函数族，证明阿采拉定理。

7. 证明$C_{[a:b]}$中闭集$\mathscr{F}$是$C_{[a:b]}$中的紧集$\Longleftrightarrow\mathscr{F}$在$[a,b]$上等度连续及一致有界。

8. 举出一个定义在$I=\{x: 0<x<1\}$上连续有界的函数它不能被连续地延拓到比I更大的集上。即证明泰兹定理中闭集条件不能去掉。

9. 在引理13·4中，若不假设A与B是闭集，证明可能不存在具有所述性质的ψ。

10. 设$I=\{x: a\leqslant x<\infty\}$，$f: I\rightarrow\mathbf{R}_1$是连续但不必是有界函数，证明$f$可以延拓为$\mathbf{R}_1$上的连续函数。

11. 设F是$\mathbf{R}_1$中的闭集，f是F上的连续函数证明f可以延拓为$\mathbf{R}_1$上的连续函数。

§13·3 斯桃茵—外尔斯特拉斯逼近定理

设f是定义在区间$I=\{x: a<x<b\}$上，且在点$c\in I$有各阶导数的函数，称f在c点为解析的，如果f可展开成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n \qquad (13\cdot 6)$$

的幂级数，这里幂级数的收敛半径大于零。当f在集A的每一点是解析的称f在A上解析。在第九章已研究了函数解析的条件，当时举出函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & x\neq 0, \\ 0 & x=0, \end{cases}$$

说明函数具有各阶导数（叫作无限可微函数，并记为 $f\in C^\infty$），它可能不解析。

本节研究用光滑函数一致逼近连续函数的问题。在这里函数 $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$，$x\neq 0$，$f(0)=0$ 仍将起到重要的作用．对 $\forall n$，$f^{(n)}(0)=0$，展开式（13•6）在 $x=0$ 的邻域中除了 $x=0$ 点之外其他点都不成立，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点不解析。可是在 $x\neq 0$ 的任何点 $f(x)$ 是解析的。

现在定义函数 g_1 与 g：

$$g_1(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x>0, \\ 0 & x\leqslant 0, \end{cases} \qquad g(x)=g_1(x)g_1(1-x).$$

这样定义的 $g(x)$ 在区间 $I=\{x: 0<x<1\}$ 外边等于零，在 I 内取正值（图13•4）．令

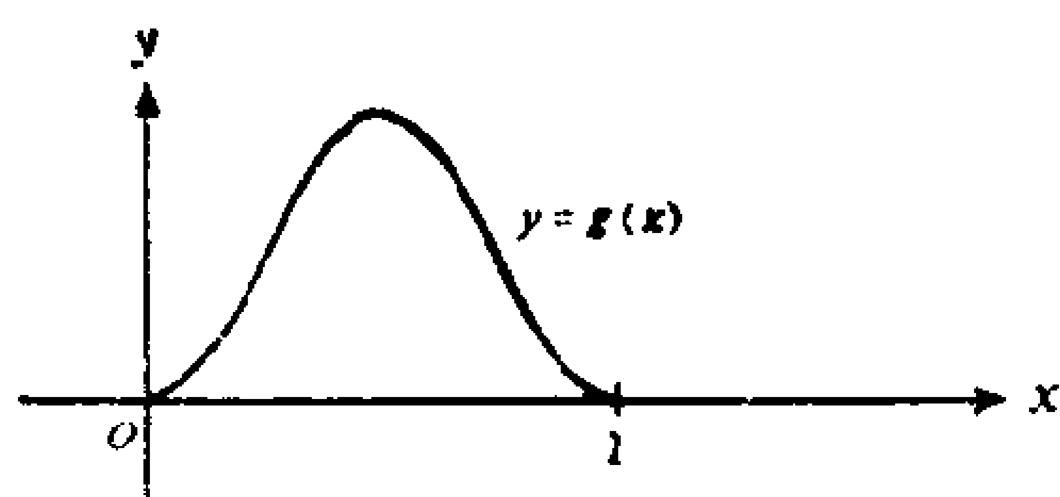


图 13·4

$$M=\int_0^1 g(x)dx$$

并定义

$$h(x)=\frac{1}{M}\int_0^x g(t)dt.$$

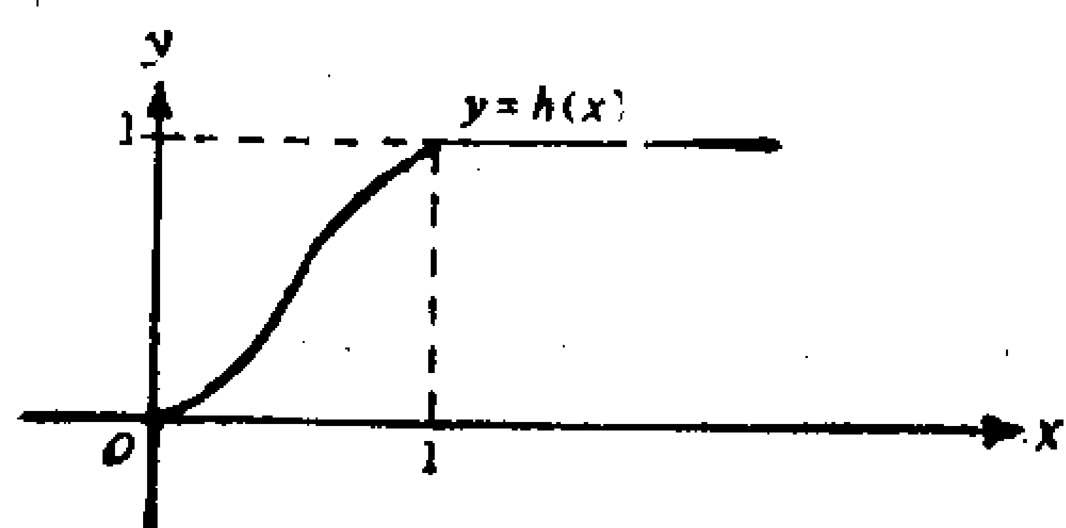


图 13·5

由$g_1(x)$的性质导出$h(x)$具有性质：$h(x)\in C^{\infty}$，当$x\leqslant 0$时$h(x)=0$；当$x\geqslant 1$时$h(x)=1$；$h(x)$是不减函数（图13·5）.

再用$h(x)$定义

$$K(x)=\begin{cases}1-h(2x-1) & \text{当} x\geqslant 0,\\ K(-x) & \text{当} x<0.\end{cases}$$

当$x\leqslant 0$，K是不减的，当$x\leqslant 0$，K是不增的（图13·6）。除了$x=\pm\frac{1}{2}$及$x=\pm 1$之外，K在各点是解析的；而在$x=\pm\frac{1}{2}$，$x=\pm 1$，各点K是无限可微的。象K这样的光滑函数将成为构造光滑函数列来逼近连续函数的有用工具。

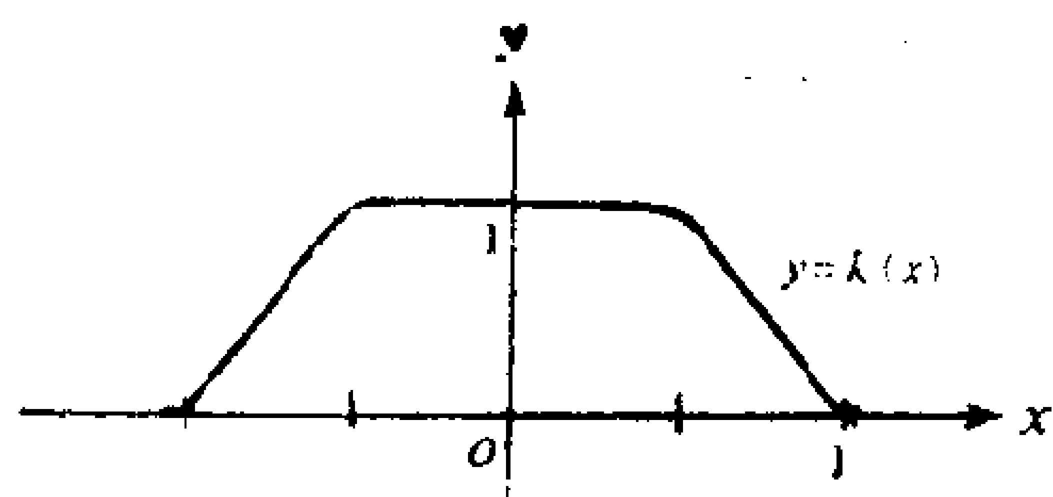


图 13·6

与上面函数有同样性质的多维函数。可以这样来定义：

$$K_2(x,\ y)=K(x)\cdot K(y).$$

K_2在方形$S_0=\{(x,\ y):-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}\}$上等于1；在$S_1=\{(x,\ y):-1\leqslant x\leqslant 1,\ -1\leqslant y\leqslant 1\}$

外边等于零；在R_2上$0\leqslant K_2(x, y)\leqslant 1$，且$K_2$对$x$，$y$具有各阶偏导数。同样地，定义

$$K_N(x_1, x_2, \cdots, x_N)=K(x_1)\cdot K(x_2)\cdots K(x_N),$$

K_N为C^∞中函数，它在以原点为中心边长为1的超立方内等于1，而在边长为2的超立方之外等于零，$0\leqslant K_N\leqslant 1$。

把K_N换成以$r=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$为变量的具有同样性质的函数会更加方便。为此，对于$r\geqslant 0$，定义$\varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_N)=K(r)$。那么当$x=(x_1,\cdots,x_N)$，$\varphi_1(x)$在$R_N$的单位球之外的值为零，在球$B\left(0, \frac{1}{2}\right)$内其值为1。令

$$M_0=\int_{B(0,1)}\varphi_1(x)dx$$

且定义

$$\varphi(x)=\frac{1}{M_0}\varphi_1(x),$$

那么$\varphi\in C^\infty$，在$B(0, 1)$之外$\varphi(x)=0$，且

$$\int_{B(0,1)}\varphi(x)dx=1. \tag{13·7}$$

定义 设函数$\varphi: R_N\to R_1$，如果$\varphi\in C^\infty$；$\varphi\geqslant 0$，且在$B(0, 1)$之外，$\varphi(x)=0$，又满足（13·7），称φ为一个

平滑。对$x\in R_N$，ρ是正数，定义

$$\varphi_\rho^*(x)=\frac{1}{\rho^N}\ \varphi\left(\frac{x}{\rho}\right),$$

φ_ρ^*在$B(0,\ \rho)$之外等于零，且

$$\int_{B(0;\ \rho)}\varphi_\rho^*(x)dx=1,$$

φ_ρ^*也称为平滑或变形的平滑。对于连续函数$f:R_N\to R_1$，定义f的平滑函数$f_{\varphi\rho}$或简记为f_ρ：

$$f_\rho^{(x)}\equiv f_{\varphi\rho}(x)=\int_{R_N}\varphi^*(x-\xi)f(\xi)d\xi.\qquad(13\cdot8)$$

下面定理给出f_ρ的性质。

定理13·11 设$f:R_N\to R_1$是连续函数，φ是R_N上的一个平滑，那么对$\forall\rho<0$，函数$f_{\varphi\rho}$是$C^\infty(R_N)$中的函数，且当$\rho\to0^+$时，$f_{\varphi\rho}$在R_N的紧子集上一致收敛于f。

证明 因为$\rho_\rho^*(x-\xi)$在以x为中心，以ρ为半径的球之外的值是零，因此（13·8）式在R_N上积分相当于在球$\bar{B}(0,\ \rho)$上积分。于是可运用积分号下求导的法则（参看§11·1），得知f_ρ各阶偏导数都存在，即$f_\rho\in C^\infty(R_N)$。

设$R>0$，由f在闭球$\bar{B}$（0，$R+1$）上一致连续，那么根据引理13·2，∃不减函数$\psi(\rho)$定义在$I=\{\rho:0<\rho\leqslant1\}$上，且满足当$\rho\to0^+$，$\psi(\rho)\to0$，及$|f(x)-f(y)|\leqslant\psi(|x-y|)$对所有$x$，$y\in B$（0，$R+1$）且$|x-y|\leqslant\rho<1$的$x,y$都

成立。相应地，当$\rho<1$及$x\in\bar{B}(0, R)$，便有

$$|f_\rho(x)-f(x)|=\left|\int_{B(x,\rho)}\varphi_\rho^*(x-\xi)[f(\xi)-f(x)]d\xi\right|$$

$$\leqslant\int_{B(x,\rho)}\varphi_\rho^*(x-\xi)|f(\xi)-f(x)|d\xi$$

$$\leqslant\psi(\rho)\int_{B(x;\rho)}\psi_\rho^*(x-\xi)d\xi.$$

上式最后不等号是由$|\xi-x|\leqslant\rho$保证的。由ρ_ρ^*的定义
$\int_{B(x;\rho)}\varphi_\rho^*(x-\xi)d\xi=1$，因而上面不等式最右端等于$\psi(\rho)$，

即对$x\in\bar{B}(0, R)$，有

$$|f_\rho(x)-f(x)\leqslant\psi(\rho).$$

既然当$\rho\to0^+$，$\psi(\rho)\to0$，这表明在$\bar{B}(0, R)$上$f_\rho(x)$一致收敛于$f(x)$，因为R是任意的，可知$f_\rho(x)$在R_N的紧子集上一致收敛于f。

根据定理13·11，立即得出紧集上的连续函数能用C^∞中函数序列一致逼近的重要推论。

推论1 设f是$\mathbf{R}_N$内紧集A上的连续函数，G是包含A的开集。那么$\exists C^\infty(G)$内的序列$\{f_n\}$，f_n在A上一致收敛于f。

证明 根据泰兹延拓定理，$\exists$连续函数$F:\mathbf{R}_N\to\mathbf{R}_1$，

在A上有$F=f$。设$\rho_n=\frac{1}{n}$，$F_{\varphi\rho n}$是F的平滑函数，那么当$x\in G$，令$f_n(x)=F_{\varphi\rho n}(x)$，由定理13·11，$f_n$在$A$上一致收敛于$f$。

推论2 设推论1中A的内点的集$A^{(0)}$不空，$f\in C^k(A^{(0)})$。以$D^\alpha f$表示f不超过k阶的偏导数，那么推论1中的f_n在$A^{(0)}$的每一紧子集上有$D^\alpha f_n$一致收敛于$D^\alpha f$。

证明 推论1中的函数F在$A^{(0)}$内有不超过k阶的偏导数，记$G_0=D^\alpha F$，作出G_0的平滑函数$G_{0\varphi\rho n}$。显然当$x\in A^{(0)}$，有$D^\alpha F_{\varphi\rho n}=G_{0\varphi\rho n}$，由$D^\alpha F_{\varphi\rho n}$在$A^{(0)}$内的每一紧子集上一致收敛于$G_0$，而在$A^{(0)}$内$G_0=D^\alpha f$。所以推论2成立。

根据以上两个推论，在R_N内有界闭集上的连续函数可用C^∞中的函数来一致逼近，并且可达到预先提出的精度要求。对于更一般的情况，当S是一紧距离空间，$C(S)$表示S上连续实值函数按通常的距离的距离空间。我们希望找出可以用来逼近$C(S)$的所有元素的$C(S)$的子集，即找出在$C(S)$中稠密的子集。自然这样的子集含有的元素越“少”越是好的。

定义 设$\mathscr{L}$是$C(S)$的子集，如果对S中的不同点p，q，都有$f\in\mathscr{L}$使$f(p)\neq f(q)$，就称$\mathscr{L}$为在S内是可分点的。如果对S中的不同点p，q及实数a，b，都有$f\in\mathscr{L}$，使$f(p)=a$，$f(q)=b$，就称$\mathscr{L}$在S及R_1内是可分点的。

引理13·5 设S是距离空间，f，$g\in C(S)$。对$p\in S$，定义

$$h(p)=\max(f(p),\ g(p)),\quad K(p)=\min(f(p),\ g(p)).$$

那么h，$K\in C(S)$。

引理13·5的证明　基于下面简单等式：对实数a，b

$$\max\{a, b\}=\frac{1}{2}(a+b+|a-b|),$$

$$\min\{a, b\}=\frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

把证明细节留给读者。

定理13·12（斯桃茵逼近定理）　设S是紧距离空间。$\mathscr{L}$是$C(S)$的子集，$\mathscr{L}$在S及$\mathbf{R}_1$内是可分点的，且具有性质：当f，$g\in\mathscr{L}$便有$\max(f, g)$及$\min(f, g)\in\mathscr{L}$。那么对$\forall F\in C(S)$，F可用$\mathscr{L}$内的函数在S上一致逼近。

证明　对给定的$C(S)$中的F，设p，$q\in S$，$a=F(p)$，$b=F(q)$。那么$\exists g=g_{pq}\in\mathscr{L}$，满足

$$g_{pq}(p)=a,\quad g_{pq}(q)=b.$$

因为g及F在q点连续，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists q$的邻域$N(q)$，使当$r\in N(q)$有$g(r)>b-\frac{1}{2}\varepsilon$与$F(r)<b+\frac{1}{2}\varepsilon$。因此，对$r\in N(q)$有

$$g(r)>F(r)-\varepsilon. \tag{13·9}$$

将p固定，对$\forall q\in S$都有如上所述的g_{pq}及$N(q)$。一切$N(q)$覆盖了S，而S是紧的，$\exists$有限个这样的邻域

$$N(q_1),\ N(q_2),\ \cdots,\ N(q_m)$$

覆盖S，且与这些邻域相应的函数g_{pq_1}, g_{pq_2}, $\cdots$, g_{pq_m}都满足不等式（13.9）。现在定义

$$h_p = \max(g_{pq_1},\ g_{pq_2},\ \cdots,\ g_{pq_m}),$$

$h_p \in \mathscr{L}$.按（13·9）式，对$\forall r \in S$，有

$$h_p(r) > F(r) - \varepsilon. \tag{13·10}$$

因为$g_{pq_1}(p) = g_{pq_2}(p) = \cdots = g_{pq_m}(p) = a$，所以$h_p(p) = a$。再由$h_p$及$F$是连续函数，$\exists$一邻域$N(p)$，使当$r \in N(p)$时，有

$$h_p(r) < F(r) + \varepsilon. \tag{13·11}$$

对于$\forall p \in S$，都$\exists$相应的h_p及邻域$N(p)$，一切$N(p)$覆盖了S，由S是紧的，$\exists$有限个邻域

$$N(p_1),\ N(p_2),\ \cdots,\ N(p_n)$$

组成S的覆盖．定义

$$h = \min(h_{p_1},\ h_{p_2},\ \cdots,\ h_{p_n}).$$

$h \in \mathscr{L}$，且由（13·10）及（13·11），对$\forall r \in S$有

$$\left.\begin{aligned} h(r) &> F(r) - \varepsilon, \\ h(r) &< F(r) + \varepsilon, \end{aligned}\right\} \tag{13·12}$$

即对$\forall r \in S$，$|F(r) - h(r)| < \varepsilon$。既然$\varepsilon$是任意给定的，而$h \in \mathscr{L}$，于是定理获证。

定理13·12所指出的$\mathscr{L}$成为$C(S)$中稠密集的充分条件是：(i)$\mathscr{L}$在S与$\mathbf{R}_1$内是可分点的；(ii)当f，$g\in\mathscr{L}$，$\max(f,g)$及$\min(f,g)\in\mathscr{L}$。由引理13·5可知，如果$\mathscr{L}$对加、减及取绝对值是封闭的（即当f，$g\in\mathscr{L}$，有$f+g$，$f-g$，$|f|$都属于$\mathscr{L}$）就能保证条件(ii)成立。下面讨论$C(S)$子集对乘法运算也封闭的情况。

定义 设$\mathscr{A}$是$C(S)$的子集，如果$\mathscr{A}$满足：

(i)当f，$g\in\mathscr{A}$，α，β为实数，有$\alpha f+\beta g\in\mathscr{A}$；

(ii)当f，$g\in\mathscr{A}$，$f\cdot g\in\mathscr{A}$。

称$\mathscr{A}$为$C(S)$内的一个代数。

当S是紧的距离空间，如果$\mathscr{A}$是$C(S)$内的含有常数函数的代数，$\mathscr{A}$在S内是可分点的，就能证明$\mathscr{A}$在$C(S)$内稠密。更确切地说，$\mathscr{A}$由多项式所组成，$C(S)$中的每一f可用多项式f_n一致逼近，这里f_n是$\mathscr{A}$中函数的多项式。这一著名的斯桃茵—外尔斯特拉斯定理的最重要的特殊情况是首先由外尔斯特拉斯所建立的。这一定理指出：定义在闭区间I上的连续函数能用多项式一致逼近。或等价地，多项式的集在$C(I)$内是稠密的。

为了建立斯桃茵—外尔斯特拉斯定理，需要关于$|x|$及$\sqrt{1+x}$的幂级数展开的下述引理。

引理13·6 设$I=\{x:-1\leqslant x\leqslant 1\}$且$\varphi:I\to\mathbf{R}_1$为$\varphi(x)=\sqrt{1+x}$。那么展开式

$$\varphi(x)=1+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)(2n)!}{2^{2n}[(n+1)!]^2}x^{n+1} \tag{13·13}$$

在I上一致收敛。因而 φ在I上可由（13·13）的部分和的多项式一致逼近。

证明 由二项式展开定理（定理9·30），展开式（13·13）对$|x|<1$成立。为了证明级数在I上一致收敛引用斯特林公式①：

$$n!\sim e^{-(n+1)}(n+1)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}\left(1+0\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

据斯特林公式，∃常数$K>0$，使

$$\frac{(n+1)(2n)!}{2^{2n}[(n+1)!]^2}\leqslant\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\frac{(n+1)e^{-(2n+1)}(2n+1)^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n}e^{-2n-4}(n+2)^{2n+3}}$$

$$\leqslant\frac{K}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^3}{(n+2)^{\frac{3}{2}}}$$

因此 φ的级数以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$为控制级数（$x\in I$），于是（13·13）的级数在$I$上一致收敛，进而 φ在$|x|=1$处也有展开式（13·13）成立，且在闭区间I上收敛是一致的。

注 不用斯特林公式，（13·13）在I上一致收敛性的证明，可参看本节的习题12.

引理13·7 设$I_M=\{x: -M\leqslant x\leqslant M\}$，$\psi$：$I_M\to R_1$，

---

① 请参看吉林大学数学系编《数学分析》下册第380页。

$\psi(x)=|x|$，那么$\psi(x)$在I_M上能用x的多项式一致逼近。

证明 设$M=1$，定义$\psi_1(x)=(1+u)^{\frac{1}{2}}$，其中$u=x^2-1$。据引理13·6，函数$(1+u)^{\frac{1}{2}}$在$I$上能用$u$的多项式一致逼近。因为当$x\in I$时，$u\in I$，以$x^2-1$代$u$，可以用$x^2-1$的多项式一致逼近$\psi_1(x)$。而$x^2-1$的多项式是$x$的多项式，所以引理成立。对于$M\neq 1$的一般情况，把$\psi(x)$写成

$\psi(x)=M\psi_1\left(\frac{x}{M}\right)$，便化成已证明了的特殊情况。

定理13·13（斯桃茵—外尔斯特拉斯定理） 设S是一紧距离空间，$\mathscr{A}$是$C(S)$中的在S内可分点的一个代数，并且$f_0\equiv 1$（$\forall p\in S$）的$f_0\in\mathscr{A}$。那么对$\forall f\in C(S)$都可用$\mathscr{A}$中的函数一致逼近，即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\bar{f}\in\mathscr{A}$。对$S$的一切点$p$，满足

$$|f(p)-\bar{f}(p)|<\varepsilon.\quad（或d(f,\bar{f})<\varepsilon，d表C(S)的距离）.$$

证明 设$\mathscr{L}$是$C(S)$中能够由$\mathscr{A}$的函数一致逼近的那些函数所组成的子集，也就是$\mathscr{L}=\overline{\mathscr{A}}$，$\overline{\mathscr{A}}$表示$\mathscr{A}$的闭包。欲证$\mathscr{L}=C(S)$，只要证明$\mathscr{L}$满足定理13·12的条件。为此首先证明$\mathscr{A}$在$S$及$\mathrm{R}_1$内是可分点的。

设a，$b\in\mathrm{R}_1$，p，$q\in S,p\neq q$，$\exists f\in\mathscr{A}$使$f(p)\neq f(q)$。由$f_0(p)=f_0(q)=1$，$\exists$实数α，β使

$$\alpha f(p)+\beta f_0(p)=a,\quad \alpha f(q)+\beta f_0(q)=b,$$

由$\mathscr{A}$是代数，所以函数，$h=\alpha f+\beta f_0\in\mathscr{A}$，且满足$h(p)=a$，$h(q)=b$。即$\mathscr{A}$在$S$及$\mathbf{R}_1$内是可分点的。

现在再证当f，$g\in\mathscr{A}$，$\max(f, g)$及$\min(f, g)$属于$\mathscr{L}$。设给定$f\in\mathscr{A}$，那么$\exists M>0$，使$|f(p)|<M$在S上成立。根据引理13·7，函数$\psi[f(p)]=|f(p)|$可用f的多项式一致逼近。而$\mathscr{A}$是一代数，属于$\mathscr{A}$的f的多项式也属于$\mathscr{A}$，于是$\psi=|f|$可用$\mathscr{A}$的函数一致逼近，即$|f|\in\mathscr{L}$，这样一来，当f，g都属于$\mathscr{A}$，那么$f+g$，$f-g\in\mathscr{A}\subset\mathscr{L}$，且$|f-g|$及$|f+g|$都属于$\mathscr{L}$。我们知道$\max(f,g)=\frac{1}{2}\left(f+g+|f-g|\right)$及$\min(f, g)=\frac{1}{2}\left(f+g-|f-g|\right)$，所以$\max(f, g)$及$\min(f, g)$属于$\mathscr{L}$。再进一步，设$f$，$g\in\mathscr{L}$，证明$\max(f, g)$及$\min(f, g)$属于$\mathscr{L}$。为此，从$\mathscr{A}$中选取$\{f_n\}$及$\{g_n\}$分别一致收敛于$f$，$g$。那么$F_n=\max(f_n,g_n)$及$G_n=\min(f_n, g_n)$都属于$\mathscr{L}$，由等式

$$F_n=\max(f_n, g_n)=\frac{1}{2}\left(f_n+g_n+|f_n-g_n|\right),$$

$$G_n=\min(f_n, g_n)=\frac{1}{2}\left(f_n+g_n-|f_n-g_n|\right),$$

显然当$n\to\infty$，有

$$F_n\to\max(f, g),$$

$$G_n \to \min(f, g).$$

既然F_n，G_n可用$\mathscr{A}$中函数一致逼近，对于$\forall n$，$\exists \bar{f}_n, \bar{g}_n \in \mathscr{A}$，使对$S$中一切$p$，都有

$$|\bar{f}_n - F_n| < \frac{1}{n}, \quad |\bar{g}_n - G_n| < \frac{1}{n}.$$

由三角不等式，

$$d[\bar{f}_n, \max(f, g)] \leqslant d(\bar{f}_n, F_n) + d[F_n, \max(f, g)],$$

$$d[\bar{g}_n, \min(f, g)] \leqslant d(\bar{g}_n, G_n) + d[G_n, \max(f, g)].$$

于是$\max(f, g)$及$\min(f, g)$，可用$\mathscr{A}$的元素一致逼近，它们都属于$\mathscr{L}$，到此，证明了$\mathscr{L}$满足定理13·12的条件.

最后，设$\forall f \in C(S)$，据$\mathscr{L}$满足定理13·12的条件，对$\forall \varepsilon > 0$。$\exists f_1 \in \mathscr{L}$，使

$$d(f, f_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由$\mathscr{L}$的定义，$\exists \bar{f} \in \mathscr{A}$，使

$$d(f_1, \bar{f}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

由三角不等式得到

$$d(f, \bar{f}) \leqslant d(f, f_1) + d(f_1, \bar{f}) < \varepsilon,$$

也即证明了$\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{L} = C(S)$.

推论（外尔斯特拉斯定理）　设S是R_N内的有界闭集，那么定义在S上的任一连续函数可用坐标x_1，x_2，…，x_N的多项式一致逼近。

为证明推论，仅须证明多项式的集是可分点的。把证明细节留给读者。

习　题

1．设函数$f(x)=\begin{cases}\exp\left[\dfrac{1}{x^2(1-x^2)}\right], & 当x\neq 0,\ 1;\\ 0 & 当x=0,\ 1.\end{cases}$

证明$f^{(n)}(0)=f^{(n)}(1)=0$，$n=1$，2，….

*2．设G是R_N内具有光滑边界∂G的有界区域。对于$x_0\in G$，可以给出一个无限可微的平滑$\varphi(x)$，φ在含于G内的x_0的某邻域之外等于零。证明$\exists K$个这样的平滑φ_1，φ_2，…，φ_k，对$\forall x\in G$，有

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_k(x)\equiv 1.$$

〔提示：对$\bar{G}$用汉茵—波赖尔定理，可得相应邻域上的平滑为，ψ_1，ψ_2，…，ψ_k，令$\varphi_i(x)=\psi_i(x)\Big/\sum_{i=1}^{k}\psi_i(x)$.〕

3．证明引理13·5.

4．证明定义在$I=\{x:-1\leqslant x\leqslant 1\}$上的全体多项式的

集P在I及$\mathbf{R}_1$内是可分点的$C(I)$内的代数。但是P并非定理13·12中$\mathscr{L}$那样性质的$C(I)$的子集。

5. 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$.$\mathscr{L}$是$C(I)$内由所有分段线性、连续的函数组成的子集。证明$\mathscr{L}$满足定理13·12的条件。

6. 证明定理13·13中，若S不是紧集，那么定理结论不成立。〔提示：设$I=\{x: 0\leqslant x<\infty\}$ $\mathscr{A}$是多项式的集，考察$f(x)=e^x$。〕

7. 证明定理13·13的推论。

8. 设$I=\{x: 0<x\leqslant 1\}$，证明定理13·13的结论对于I上多项式组成的$\mathscr{A}$并不成立。

9. 设A是$\mathbf{R}_N$内的超闭立方，证明空间$C(A)$是可分的距离空间。〔提示：研究以有理数为系数的n元多项式的集。〕

10. 设$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$\mathscr{L}$表示$C(I)$中一切满足$f(0)=0$的函数的集。$\mathscr{L}$在$C(I)$中是否稠密。

11. 证明$\mathbf{R}_N$内不存在处处解析的平滑。

12. 不用斯特林公式证明（13·13）式一致收敛。

〔提示：定义

$$b_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2n-2}\right),\ n=2,\ 3\cdots,$$

令 $a_n=(-1)^{n+1}\dfrac{b_n}{2n}$，那么$\varphi(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$的幂级数展开式即（13·13）式的右端为

$$1+\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}a_n x^n.$$

运用不等式：

$$\log(1-x)\leqslant -x,\qquad 0<x<1.$$

可得

$$\log b_n\leqslant -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).$$

而由

$$\log n=\int_1^n\frac{1}{x}dx\leqslant\int_1^2\frac{1}{x}dx+\int_2^3\frac{1}{x}dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x}dx$$

$$\leqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1},$$

于是 $\log b_n\leqslant -\frac{1}{2}\log n$，由此$b_n\leqslant\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$进而导出

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$]

第十四章　凸集与凸函数

§ 14·1　　凸　　集

凸集、凸函数的理论近年来已发展成为数学中有广泛应用的基础学科——凸分析。这里只能介绍它的最初等、最初步的结果。

凸集概念是平面上三角形、圆等图形的几何特性的抽象：图形中任何两点所连接的直线段位于图形内。推广到R_N导出如下的定义，对于R_N凸集的结论还能推广到线性空间。

定义　R_N内集S是凸的$\Longleftrightarrow$联结S的任意两点P_1，P_2的线段$\overline{p_1p_2}$上的点都在S内（图14·1）

为了方便，规定空集也是凸集。

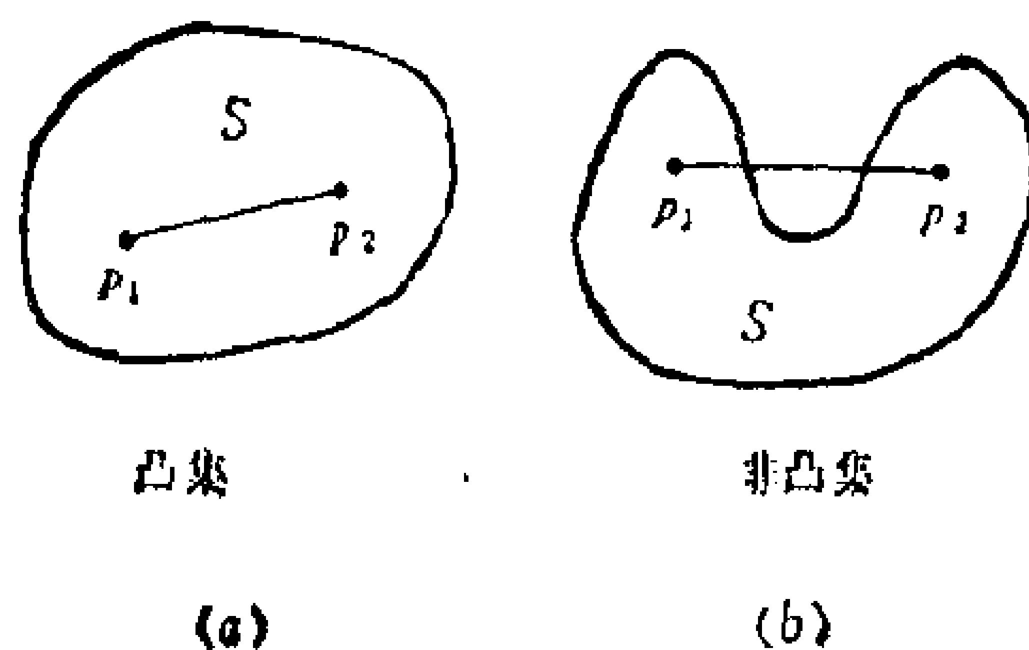


图　14·1

定理14·1　凸集族的交是一凸集。

这一简单事实的证明留给读者去作。

定理14·2 若S是凸集，那么$\overline{S}$是一凸集。

证明 设p，$q\in\overline{S}$，$\exists$ $\{p_n\}$ 及 $\{q_n\}\subset S$分别收敛于p与q。因为S是凸集，所有线段$\overline{p_n q_n}$上的点都属于S。而$\overline{p_n q_n}$上的点r_n可表示成

$$r_n=\lambda p_n+(1-\lambda)q_n,\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

也即当$p_n=(x_1^n,\ x_2^n\cdots,\ x_N^n)$，$q_n=(y_1^n,\ y_2^n,\ \cdots,\ y_N^n)$，那么$r_n$的坐标为$\lambda x_i^n+(1-\lambda)y_i^n$，$i=1,2,\cdots,N$。当$n\to\infty$时$r_n\to\lambda p+(1-\lambda)q\in\overline{S}$，这一事实对$\forall\lambda\in[0,1]$成立。这就是说$\overline{pq}$线段上的点属于$\overline{S}$，所以$\overline{S}$是凸集。

定理14·3 设S是一凸集，$P_1,P_2,\cdots,P_K$都是S中的点，$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_K$是满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_K=1$的$K$个非负实数。那么点$\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\cdots+\lambda_KP_K\in S$。

证明 $K=2$时，由凸集定义即得。现设结果对$K-1$个点成立，证明对K个点结果成立。由归纳假设，对$\forall\mu_i\geqslant 0$，$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{K-1}=1$有$\sum_{i=1}^{K-1}\mu_iP_i\in S$。因此

$$(1-\lambda_K)(\mu_1P_1+\mu_2P_2+\cdots+\mu_{K-1}P_{K-1})+\lambda_KP_K\in S.$$

选取$\mu_i=\lambda_i/(1-\lambda_K)$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$，便得$\sum_{i=1}^{K}\lambda_iP_i\in S$。

定义 以$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_N)$表示$\mathbf{R}_N$中坐标为$x_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$的点，称$\mathbf{R}_N$内的集

$$\{x: \sum_{i=1}^{N} a_i x_i + b = 0\} \tag{14·1}$$

为超平面，这里a_i，b都是实数，a_i不全为零。不失一般性，可以假定$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1$，不然仅须将上述方程除以$\left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$便可。

$N=2$时，超平面是一条直线，当$N=3$时超平面就是通常的平面。

定义：称集

$$l = \{x: x_i = x_i^0 + \lambda_i t \quad i=1, 2, \cdots, N, \\ -\infty < t < +\infty\} \tag{14·2}$$

为R_N内直线。其中$x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_N^0)$是$l$通过的固定点。$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_N$是$l$的方向数，$t$是实参数。不失一般性，可以认为$\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_N^2 = 1$（否则可以$\lambda_i / \left(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$代替$\lambda_i$），这里诸方向数$\lambda_i$称为$l$的方向余弦。过点$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_N^1)$与(14·2)给出的直线$l$相垂直的超平面的方程是

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^1) = 0. \tag{14·3}$$

定理14·4 设S是R_N内的凸集，S不含有内点。那么$\exists$一超平面H，$S \subset H$。

证明 若定理不真，S不能被超平面所含有，那么S中有$N+1$个点不在同一超平面上。设这些点是坐标系之原点O及x^1，x^2，…，x^N。那么从O到x^i的矢（$i=1, 2, \cdots, N$）是线性无关的。因为S是凸集，对于$0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N\leqslant 1$都有 $\lambda_1 x^1+\cdots+\lambda_N x^N$属于$S$。必可选取

$$\overline{x}=\overline{\lambda}_1 x^1+\overline{\lambda}_2 x^2+\cdots+\overline{\lambda}_N x^N \tag{14·4}$$

对每一i，$0<\overline{\lambda}_i<1$且$\overline{\lambda}_1+\overline{\lambda}_2+\cdots+\overline{\lambda}_N<1$，$\overline{x}\in S$。于是以$\overline{x}$为中心半径足够小的球内的每一点$x$，$x$的表示式为

$$x=\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2+\cdots+\lambda_N x^N$$

也有$0<\lambda_i<1$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_N<1$，因而$x\in S$。即$\overline{x}$是$S$的内点，这与$S$不包含内点相矛盾。所以定理成立。

定理14·5 设S是R_N内不同于R_N的一个凸集，以$S^{(0)}$表示S的内点的集。那么对$\forall x^0\in(\overline{S}-S^{(0)})$，$\exists$一超平面$H$，$H$通过$x^0$使$S$位于$H$所界开的两个半空间之一内（图14·2），$H$称为$S$的支撑超平面。

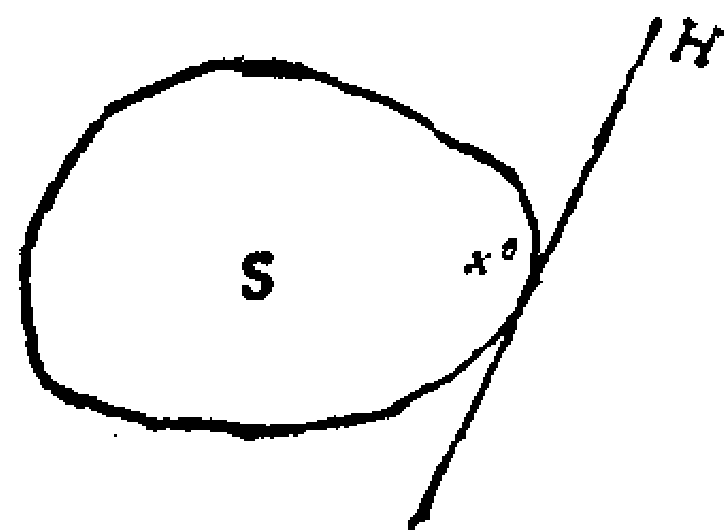


图 14·2

证明 考察$x^0\in(\overline{S}-S^{(0)})$。因为$S$不同于整个空间，$\exists$ $\{x^m\}\subset(R_N-\overline{S})$，$x^m\to x^0\ (m\to\infty)$。因为$\overline{S}$是闭集，对每个$x^m$点，$\exists y^m\in\overline{S}$，$y^m$满足

$$d(y^m, x^m)=\inf_{y\in\overline{S}} d(y, x^m)>0,$$

这里d表示R_N中距离（图14•3）。

以H_m表示过x^m且与线段$\overline{x^m y^m}$相垂直的超平面，若$\lambda_{m1},\lambda_{m2},\cdots,\lambda_{mN}$是$\overline{x^m y^m}$的方向余弦，那么$H_m$的方程为

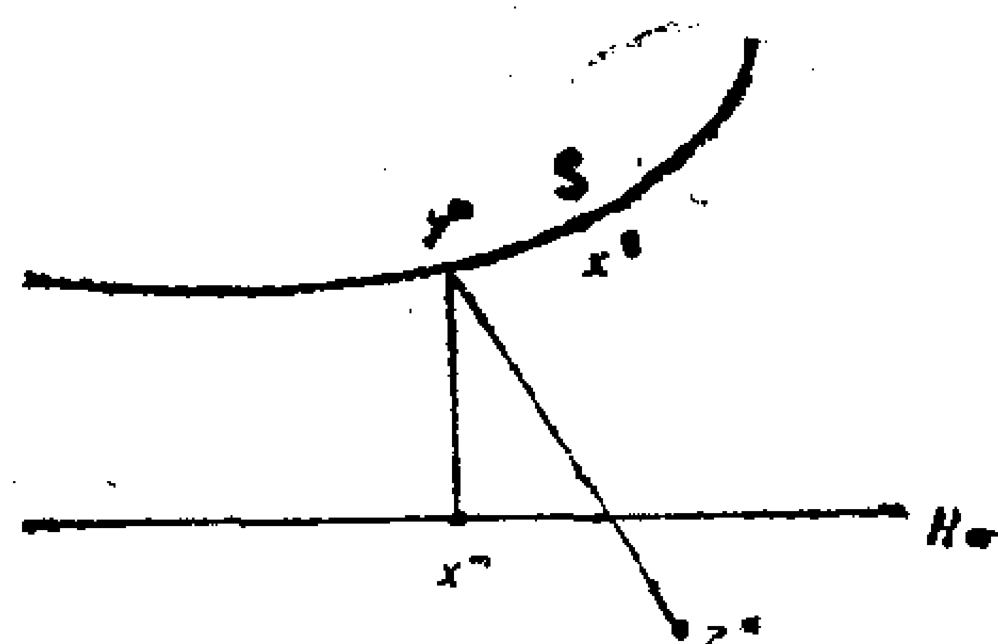


图 14·3

$$H_m = \{x: \sum_{i=1}^{N} \lambda_{m_i}(x_i - x_i^m) = 0\}, \qquad (14•5)$$

其中$x^m=(x_1^m,x_2^m,\cdots,x_N^m)$.如果在$H_m$与$y^m$异侧$\exists$点$z^m\in\overline{S}$，据$\overline{S}$的凸性，线段$\overline{y^m z^m}$上的一切点在$\overline{S}$内，在这种情况下，$y^m$不是$\overline{S}$中最逼近$x^m$的点。这一矛盾表明$\overline{S}$被包含在半空间

$$P_m = \{x: \sum_{i=1}^{N} \lambda_{m_i}(x_i - x_i^m) \geqslant 0\} \qquad (14•6)$$

或半空间

$$P_m^* = \{x: \sum_{i=1}^{N} \lambda_{m_i}(x_i - x_i^m) \leqslant 0\}$$

两者之一当中。为了确定起见设为P_m。因为$x^m \to x^0$，存在x_{m_i}，使当$m_k \to +\infty$时，对$i=1, 2, \cdots, N$都有$\lambda_{m_k i} \to \lambda_{0i}$，

因为$\sum_{i=1}^{N} \lambda_{m_k i}^2$对每一$m_k$都等于1，所以$\sum_{i=1}^{N} \lambda_{0i}^2 = 1$.构造通过点$x^0$的超平面：

$$H=\{x:\sum_{i=1}^{N}\lambda_{0i}(x_i-x_i^0)=0\}.$$

超平面H_{mk}趋向于H，且由$\bar{S}\subset P_{mk}$取极限得

$$\bar{S}\subset P_0=\{x:\sum_{i=1}^{N}\lambda_{0i}(x_i-x_i^0)\geqslant 0\}.$$

§14·2 凸 函 数

现在研究$R_N\to R_1$的凸函数，我们将证明凸函数是连续函数（定理14·10）.

定义 设S是R_N内的凸集，S上的函数f称为凸的$\Longleftrightarrow$对$\forall x^1$，$x^2\in S$，及$\forall\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant 1$，有

$$f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\leqslant\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2). \quad (14·7)$$

注意函数的定义域不是凸集，它不能是凸函数，即凸集上才可能定义凸函数.

凸函数图象的"上方"是R_{N+1}内的凸集，如图14·4所示，这一结果叙述为下面的定理.

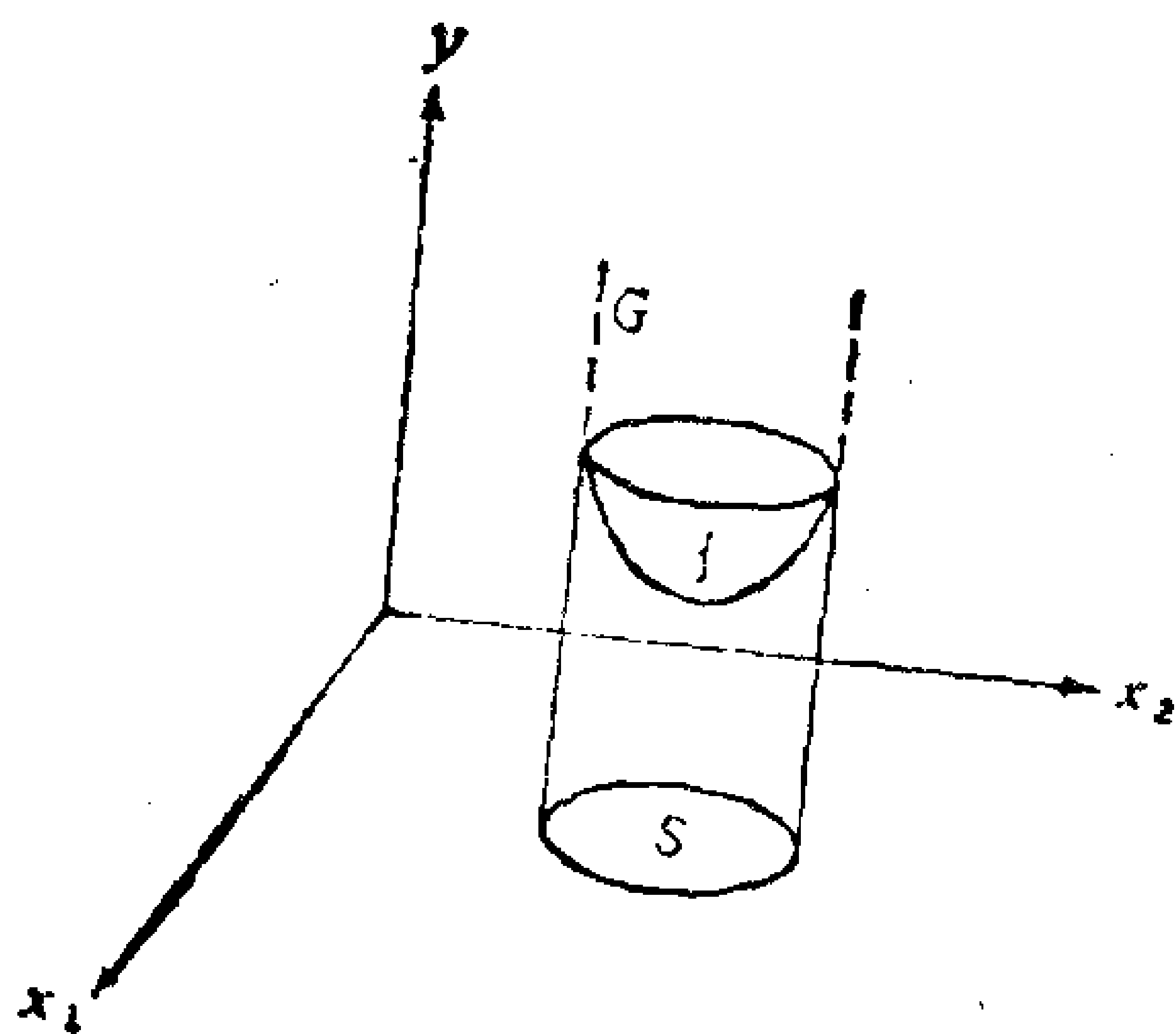


图 14·4

定理14·6 设S是R_N内一凸集且$f:S\to R_1$是凸函数，那么集$G=\{(x,y):x\in S,y\in R_1,y\geqslant f(x)\}$是$R_{N+1}$内的凸集. 反之，$S$是$R_N$内凸

集，G是R_{N+1}内的凸集，那么f是S上的凸函数。

定理14·6的证明是凸集、凸函数定义的直接推论，把它留给读者。集G通常称为函数f的铭图(epigraph)。

下面三个定理所述凸函数的简单性质，不仅在证明凸函数的连续性时要用到，下一章也有应用。

定理14.7 设$\mathscr{F}=\{f\}$是定义在R_N内凸集S上的凸函数的族。若$\exists$函数g：$S\to R_1$，使对所有$f\in\mathscr{F}$及$x\in S$都有$f(x)\leqslant g(x)$成立。那么定义

$$F(x)=\sup_{f\in\mathscr{F}}f(x),\quad x\in S,$$

则$F(x)$是S上的凸函数。

证明 设x^1，x^2是S内任意两点，对$\forall\varepsilon>0$及$\forall\lambda\in[0,1]$，由上确界定义，$\exists f\in\mathscr{F}$

$$F[\lambda x^1+(1-\lambda)x^2]<f[\lambda x^1+(1-\lambda)x^2]+\varepsilon.$$

因为f是凸函数，于是

$$\begin{aligned}F[\lambda x^1+(1-\lambda)x^2]&<f(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\\&\leqslant\lambda f(x^1)+(1-\lambda)f(x^2)+\varepsilon\\&\leqslant\lambda F(x^1)+(1-\lambda)F(x^2)+\varepsilon.\end{aligned}$$

由ε的任意性，所以F是凸函数。

定理14·8 设S是R_N内的凸集，x^1，x^2，$\cdots x^m$是S中的点，λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_m是满足$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m=1$的$m$个非负数。如果$f$是$S$上的凸函数，那么

$$f(\lambda_1x^1+\lambda_2x^2+\cdots+\lambda_mx^m)\leqslant\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_mf(x^m).$$

证明 $m=2$时，即凸函数定义。假定当$k=m-1$时定

理成立，证明$k=m$时定理仍成立。据归纳假设，有

$$f(\mu_1 x^1+\cdots+\mu_{m-1}x^{m-1})$$
$$\leqslant \mu_1 f(x^1)+\cdots+\mu_{m-1}f(x^{m-1})。$$

其中$\mu_i \geqslant 0$，$\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{m-1}=1$。取$\mu_i=\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_m}$，

$i=1, 2, \cdots m-1$，便有

$$f(\lambda_1 x^1+\cdots+\lambda_m x^m)$$
$$=f[(1-\lambda_m)(\mu_1 x^1+\cdots+\mu_{m-1}x^{m-1})+\lambda_m x^m]$$
$$\leqslant (1-\lambda_m)f(\mu_1 x^1+\cdots+\mu_{m-1}x^{m-1})+\lambda_m f(x^m)$$
$$\leqslant (1-\lambda_m)[\mu_1 f(x^1)+\cdots+\mu_{m-1}f(x^{m-1})]$$
$$+\lambda_m f(x^m)$$
$$=\lambda_1 f(x^1)+\lambda_2 f(x^2)+\cdots+\lambda_{m-1}f(x^{m-1})+\lambda_m f(x^m),$$

即对$k=m$定理仍然成立。根据归纳法原理，定理对任意自然数m都成立。

定理14·9 设S是$\mathbf{R}_N$的凸集，$\mathbf{A}$是$N\times N$的矩阵，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_N)$。定义$\mathrm{T}: \mathbf{R}_N \to \mathbf{R}_N$的线性变换$y=\mathbf{A}x+b$。那么

(i) $\mathrm{T}(S)$是$\mathbf{R}_N$内的凸集。

(ii) 若$f: S\to \mathbf{R}_1$是凸函数，$\mathbf{A}$是非奇异矩阵，那么$S'=\mathrm{T}(S)$上定义$g(y)=f[\mathbf{A}^{-1}(y-b)]$是$S'$上的凸函数。

(iii) 定义在凸集上的任何线性函数是凸函数。

证明 (i)设$x^1, x^2\in S$。那么$0\leqslant\lambda\leqslant 1, \lambda x^1+(1-\lambda)x^2 \in S$。由T是线性的，有

$$\mathrm{T}(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)=\lambda\mathrm{T}(x^1)+(1-\lambda)\mathrm{T}(x^2)$$

即$y^1=\mathrm{T}x^1$，$y^2=\mathrm{T}x^2\in\mathrm{T}(S)$，对$\forall\lambda\in[0,1]$，便有

$$\lambda\mathrm{T}(x^1)+(1-\lambda)\mathrm{T}(x^2)=\lambda y^1+(1-\lambda)y^2$$
$$=\mathrm{T}(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\in\mathrm{T}(S),$$

因此$S'=\mathrm{T}(S)$是凸集。

(ii) 设y^1，$y^2\in S'$，那么按g的定义及f是凸的

$$g(\lambda y^1+(1-\lambda)y^2)$$
$$=f[\lambda A^{-1}(y^1-b)+(1-\lambda)A^{-1}(y^2-b)]$$
$$\leqslant\lambda f[A^{-1}(y^1-b)]+(1-\lambda)f[A^{-1}(y^2-b)]$$
$$=\lambda g(y^1)+(1-\lambda)g(y^2).$$

(iii) 设线性函数$y=L(x)$，所谓线性函数是指L满足：$L(\alpha x^1+\beta x^1)=\alpha L(x^1)+\beta L(x^2)$，$\alpha$，$\beta$是实数。对$\forall x^1$，$x^2\in S$，由$S$是凸集，对$\forall\lambda\in[0,1]$，有$\lambda x^1+(1-\lambda)x^2\in S$，再由$L(x)$是线性函数，那么

$$L(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)\leqslant\lambda L(x^1)+(1-\lambda)L(x^2)$$

成立，即L是凸函数。

引理14·1 设$I=\{x:a\leqslant x\leqslant b\}$是$\mathrm{R}_1$内的区间，而$f$是$I$上的凸函数。对$\forall x^0\in(a,b)$，定义$m=\dfrac{f(x^0)-f(a)}{x^0-a}$，$l(x)=f(a)+m(x-a)$，$x\in I$。那么对于$x^0\leqslant x\leqslant b$，有$f(x)\geqslant l(x)$。

证明 定理具有明显的几何意义，如图14·5所示，在$x^0\leqslant x\leqslant b$区间的$l(x)$线段位于$f$之下。现在给出严格的证明，首先注意$f(x^0)=l(x^0)$，对于$x\in[x^0,b]$，由$f$是凸函数，有$f(x^0)\leqslant(1-\lambda)f(a)+\lambda f(x)$。

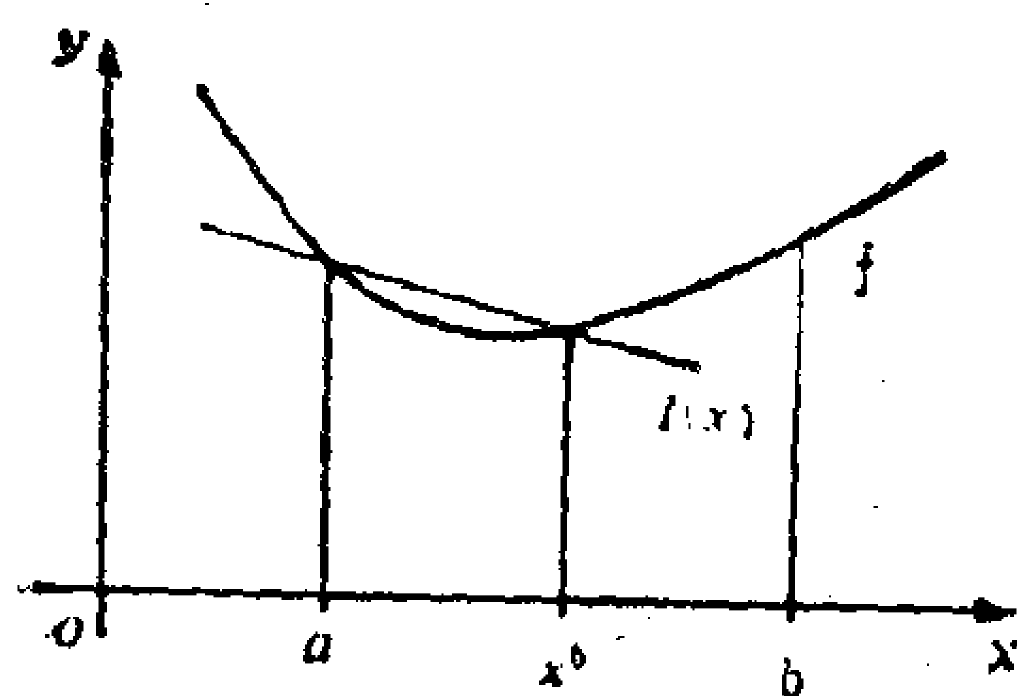


图 14·5

选取$\lambda=\frac{x^0-a}{x-a}$，这样$1-\lambda$

$$=\frac{x-x^0}{x-a}，并且$$

$$f(x)\geqslant\frac{1}{\lambda}[f(x^0)-(1-\lambda)f(a)]=f(a)+\frac{f(x^0)-f(a)}{x^0-a}(x-a)=l(x)。$$

下一技术性引理对于证明凸函数在其定义域的内点的连续性是必要的。

引理14·2 设$I=\{x:x^1\leqslant x\leqslant x^4\}$是一区间；$f:I\to R_1$是$I$上的凸函数。$x^2$，$x^3$满足$x^1<x^2<x^3<x^4$，定义

$$m_{ij}=\frac{f(x^i)-f(x^j)}{x^i-x^j},\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ i\neq j。$$

若$|f(x)|\leqslant M$，$x\in I$，且$\delta>0$，满足$x^1+\delta<x^2<x^3<x^4-\delta$，那么

$$\text{(i)}\quad m_{12}\leqslant m_{23}\leqslant m_{34}。\tag{14·8}$$

$$\text{(ii)}\quad |f(x^3)-f(x^2)|\leqslant\frac{2M}{\delta}|x^3-x^2|\tag{14·9}$$

证明 (i)的几何解释如图14·6所示，m_{ij}是联结点$(x^i,f(x^i))$，$(x^j,f(x^j))$的直线之斜率。因为函数f是凸的，x^2，x^3之间的上述直线段位于f图象的上方，即当$x\in[x^2,x^3]$，有

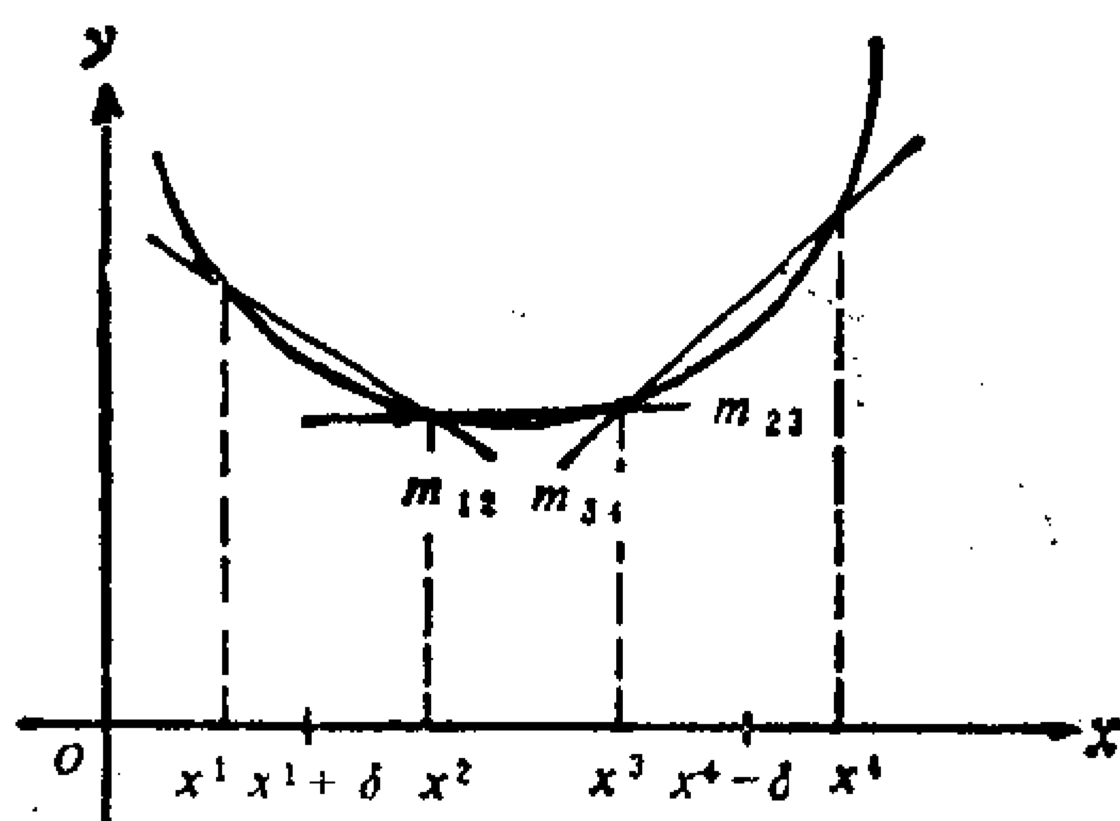


图 14·6

$$f(x^2)+m_{23}(x-x^2)\geqslant f(x). \tag{14·10}$$

再据引理14·1，取引理 14·1中$a=x^1$，$x^0=x^2$，有

$$f(x)\geqslant f(x^1)+m_{12}(x-x^1),\quad x\geqslant x^2. \tag{14·11}$$

综合（14·10）及（14·11）得

$$f(x^2)+m_{23}(x-x^2)\geqslant f(x^1)+m_{12}(x-x^1),$$

$$x^2\leqslant x\leqslant x^3,$$

或者

$$m_{23}(x-x^2)\geqslant m_{12}(x-x^1)-[f(x^2)-f(x^1)]$$

$$=m_{12}(x-x^1)-m_{12}(x^2-x^1)$$

$$=m_{12}(x-x^2),$$

即$m_{23}\geqslant m_{12}$。同样可证$m_{34}\geqslant m_{23}$。

为了证明(ii)，注意到

$$m_{34}\leqslant\frac{|f(x^4)-f(x^3)|}{|x^4-x^3|}\leqslant\frac{|f(x^4)|+|f(x^3)|}{|x^4-x^3|}$$

$$\leqslant\frac{2M}{\delta}.$$

类似地，$m_{12}\geqslant-\frac{2M}{\delta}$。因此得出

$$-\frac{2M}{\delta}\leqslant m_{12}\leqslant m_{23}\leqslant m_{34}\leqslant\frac{2M}{\delta}$$

$$及|m_{23}|\leqslant\frac{2M}{\delta},$$

或

$$|f(x^3)-f(x^2)|\leqslant\frac{2M}{\delta}|x^3-x^2|.$$

注　引理14·2的（ii）说明凸函数$f:I\to R_1$在I的内部的每一闭区间上满足李布希兹条件，因而f在I的内部是连续的，下面定理14·10将证明这一结果对R_N内凸集上定义的凸函数也成立.

以$Q_N=\{x: -1\leqslant x_i\leqslant 1, i=1, 2, \cdots, N\}$ 表示R_N中以原点为中心边长为 2 的超立方格。当$\xi\in Q_N$且ξ_i取 0，1，或 -1的值，这种ξ点叫作Q_N的格点。例如原点，（1，0，…0），(0，-1，0，1,0,…0)等都是格点。显然超立方格是凸集。

引理14·3　假设$f:Q_N\to R_1$是凸函数。ξ表示Q_N的格点，$M_0=\max\limits_{\xi\in Q_N}|f(\xi)|$。那么对于$\forall x\in Q_N$,

$$|f(x)|\leqslant M，这里M=3^N M_0.$$

证明　对R_N的维数N用归纳法证明。当$N=1$，$Q_1=I=\{x: -1\leqslant x\leqslant 1\}$．先用引理14·1，取$a=-1, x_0=0$。那么对于$0\leqslant x\leqslant 1$

$$f(-1)+[f(0)-f(-1)](x+1)\leqslant f(x).$$

又因为f是凸的，对 $0\leqslant x\leqslant 1$ 有

$$f(x)\leqslant(1-x)f(0)+xf(1).$$

令$M_0=\max[|f(-1)|,|f(0)|,|f(1)|]$，对$0\leqslant x\leqslant 1$可知$f(x)$介于$\max[f(0), f(1)]$及$\min[f(0), (2f(0)-f(-1))]$之间，应有$|f(x)|\leqslant 3M_0$。再就函数$g(y)=f(-x)$，$y=-x$而论，对$0\leqslant y\leqslant 1$，应有$|g(y)|\leqslant 3M_0$，即对$-1\leqslant x\leqslant 0$，$|f(x)|\leqslant 3M_0$。综合起来，当$N=1$时定理成立。

现设$N=k$时定理成立，证明对$N=k+1$定理成立。设f在Q_{k+1}上是凸的，定义

$\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_k)=f(x_1,x_2,\cdots,x_k,i)$，$i=-1$，0，1。因为$\varphi_i$在$Q_k$上是凸的，且由归纳假设

$$|f(x_1,x_2,\cdots,x_k,i)|$$
$$\leqslant 3^k\max_{\xi\in Q_k}|f(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,i)|, \tag{14·12}$$

这里$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k)$是$Q_k$中的格点。函数$f(x_1,x_2,\cdots x_k,x_{k+1})$对固定的$(x_1,x_2,\cdots,x_k)\in Q_k$是关于$x_{k+1}$的单变量的凸函数，用$N=1$的结果和不等式(14·12)便得

$$|f(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})|\leqslant 3^k\cdot 3M_0=3^{k+1}M_0,$$

其中$M_0=\max\limits_{\xi\in Q_{k+1}}|f(\xi)|$。据归纳法原理，定理对任意自然数$N$都成立。

定理14·10 设S是R_N内凸集，$f: S\to\mathrm{R}_1$是一凸函数。那么f在S的内点之集$S^{(0)}$上连续。若对$\forall x\in S$，$|f(x)|\leqslant M$，那么当$B(x^1,\delta)$及$B(x^2,\delta)\subset S$时

$$|f(x^1)-f(x^2)|\leqslant\frac{2M}{\delta}|x^1-x^2| \tag{14·13}$$

成立。

证明 假设S的内部$S^{(0)}$是非空集，$\forall x^0 \in S^{(0)}$，由$S^{(0)}$是开集，$\exists$以x^0为中心的立方格含于$S^{(0)}$内，据引理14·3，f在这立方格上有界，按有限覆盖定理，可以断定f在$S^{(0)}$内的紧子集K上有界。

先证明不等式(14·13)。设x^1，$x^2 \in S$，且x^1，x^2是能使$B(x^1, \delta)$及$B(x^2, \delta)$都属于S的内点。设L是过x^1及x^2的直线，那么交集$L \cap S$是一线段（当然是凸集）。取$l = L \cap S$上的点$\overline{x}$，把l写为参数方程：

$$x = \overline{x} + \lambda t,\ t \in [t_1, t_2],\ \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N),$$

λ_i是l的方向余弦，$t = t_1$对应x^1点，$t = t_2$对应x^2点。那么所有对应于$t \in (t_1 - \delta, t_2 + \delta)$的点都是$S$的内点。定义

$$\varphi(t) = f(\overline{x} + \lambda t),\ t_1 - \delta < t < t_2 + \delta.$$

$\varphi(t)$在定义域上满足$|\varphi(t)| \leqslant M$，对$\varphi(t)$使用引理14·2之不等式(14·9)，得出(14·13)：

$$|f(x^2) - f(x^1)| = |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|$$

$$\leqslant \frac{2M}{\delta}|t_2 - t_1| = \frac{2M}{\delta}|x^2 - x^1|.$$

因为f在$S^{(0)}$的紧子集上有界，由(14·13)式断定f在S的每一内点$x^0 \in S^{(0)}$的某球$B(x^0, \delta)$上满足李布希兹条件，因此f在x^0点连续。

注 凸函数可能在其边界点发生间断。例如，取$I = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，定义$f: I \to R_1$为$f(x) = x$，当$x \in (0, 1)$；$f(0) = 1$，$f(1) = 2$。那么$f$是$I$上的凸函数，它在$x = 0$，1间断。

若一凸函数在定义域内点是可微的，那么可得到下一定

理所述的关于这种函数的支撑超平面的更精确的结果。

定理14·11 设S是R_N内的一凸集，且$f: S\to R_1$是凸函数，$x^0\in S^{(0)}$。

(i) $\exists$实数$a_1, a_2, \cdots, a_N$，使对$x\in S$有

$$f(x)\geqslant f(x^0)+\sum_{i=1}^{N}a_i(x_i-x_i^0).$$

(ii) 若$f\in C^1(S^{(0)})$，那么$a_i=\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x=x^0}$。

(iii) 若$f\in C^2(S^{(0)})$，那么f在$S^{(0)}$上是凸的$\Longleftrightarrow$

对$\forall\lambda\in R_N$，$x_0\in S^{(0)}$，不等式

$$\sum_{i,j}^{N}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{ex_i\partial x_j}\right|_{x=x^0}\right]\lambda_i\lambda_j\geqslant 0.$$

证明

(i) 设f的铭图为G，$G=\{(x,y): x\in S, y\in R_1, y\geqslant f(x)\}$，由定理14·6$G$为$R_{N+1}$中凸集。令$y^0=f(x^0)$，则有$(x^0, y^0)\in\partial G$。由定理14·5，$\exists R_{N+1}$中的超平面$H_0$通过$(x^0, y^0)$使$G$在$H_0$的一侧。因$f$在$S^{(0)}$连续，点$(x^0, y^0+1)$是$G$的内点。于是$H_0$不是一"竖直"的超平面（指平面不过$(x^0, y^0+1)$），因此$H_0$的方程为

$$y=f(x^0)+\sum_{i=1}^{N}a_i(x_i-x_i^0),$$

区域G在H_0的上侧（指$y>f(x^0)+\sum_{i=1}^{N}a_i(x_i-x_i^0)$的半空

间）.

(ii)及(iii)的证明，可用f带余项的台劳展开及(i)的结果得出。细节留给读者。

习　题

1. 设A及B是R_N内的凸的不相交的非空闭集，证明$A\cup B$不是凸集。
2. 证明R_2内每个凸多边形是有限多个半平面的交集。
3. 证明R_2内每一含有不在一直线上三个点的凸集S必有内点（要求不用定理14·4，直接证明）。
4. 设f_1，f_2，…，f_p都是定义在R_N内凸集S上的凸函数。而$\alpha_i \geqslant 0, i=1$，2，…$p$是给定的数。证明$\sum_{i=1}^{p}\alpha_i f_i$是凸函数。举例说明当允许$\alpha_i$取负值时结论不真。
5*. 设S是R_2内具有内点且在边界∂S上的每一点∃唯一切线的凸域。证明S能内切于一个正方形。
6. 研究3—维空间内满足以下不等式的锥形域的族：$(\alpha x^2+\beta y^2)^{\frac{1}{2}}\leqslant z$，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha$，$\beta$是常数．证明任意多个这样域的交是一凸集。
7. 设f，g是定义在区间$I\subset R_1$上的非负的凸函数。找出使fg成为凸函数的条件。
8. 证明定理14·6。
9. 设$f(x)=\sum_{N=0}^{\infty}a_n x^n$在$I=\{x: 0\leqslant x\leqslant 1\}$上收敛。若对∀$n$，$a_n\geqslant 0$，那么$f$是$I$上的凸函数。

10. 设$S\subset \mathbf{R}_N$，S的凸包是指所有包含S的凸集的交。证明S的凸包是集$\{x: x=\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_k x_k, x_i\in S, \lambda_i\geqslant 0, \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1\}$。

11. 证明$\mathbf{R}_N$内开集S的凸包是开集（参看习题10）。

*12. $\mathbf{R}_N$的子集K称为锥，如果$K\in k$，则对$\forall\lambda>0$，$\lambda x\in K$。证明K是凸的$\Longleftrightarrow$若x，$y\in K$，有$x+y\in K$。给出一非凸的锥的例子。证明：若K_1，K_2都是锥，那么$K_1\cap K_2$及$K_1\cup K_2$都是锥。

若K_1及K_2是凸锥，在什么条件下有$K_1\cap K_2$，$K_1\cup K_2$是凸锥？

13. 设K是$\mathbf{R}_N$内含有过原点一整条直线l的凸锥。若K含有内点，证明K是$\mathbf{R}_N$或是一半空间。

〔提示：参看习题12。〕

14. 在引理14•2中若还有$f(x^1)\leqslant f(x^4)$，那么$m_{13}\leqslant m_{24}$。

15. 证明定理14•11之(ii)及(iii)。

16. 设$\mathbf{R}_N$内一开的凸集A，且$f_n: A\to\mathbf{R}_1$，$n=1, 2, \cdots$。证明当$\{f_n\}$在A的每一点收敛时，那么$\{f_n\}$在A的紧子集上一致收敛。

17. 设A是$\mathbf{R}_N$内开的凸集，且$f_n: A\to\mathbf{R}_1$是凸函数，$n=1, 2, \cdots$。证明当$\{f_n\}$一致有界时，那么$\{f_n\}$含有在A的紧子集上一致收敛的子序列。

18. 设A是$\mathbf{R}_N$内的凸集且$A^{(0)}$非空。$\{f_n\}$是C^1类中函数序列且$|f_n(x)|\leqslant M_0$，及$|\nabla f_n(x)|\leqslant M_1$对所有$x\in A$成立。那么$\exists$在$A$上一致收敛的$\{f_n\}$的子序列。

第十五章　场理论、格林定理和斯托克斯定理

§15·1　R_1上的矢函数，弧，运动三面形

设$\overrightarrow{OP}$是从R_N的原点到点$p=(1,0,0\cdots,0)$的有向线段。我们把与$\overrightarrow{OP}$同向平行，其长度为1的有向线段的等价类定义为单位矢$\mathbf{e}_1$。同样，从原点到点$(0,1,0,\cdots,0)$，$(0,0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$(0,0,\cdots 0,1)$的各有向线段的等价类定义为$\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\cdots,\mathbf{e}_N$。由集$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_N\}$及实数域$R_1$构成的所有线性组合所生成的线性空间记为$V_N(R_N)$，简记为$V_N$。$V_N$中元素$\mathbf{v}$称为矢，即

$$\mathbf{v}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\cdots+a_N\mathbf{e}_N,$$

这里a_i是实数。线性空间V_N中矢间的加法及数乘运算是读者熟知的二维、三维矢空间中的运算的直接推广（参看线性代数或本书附录3）。

矢$\mathbf{v}$的长度记为$|\mathbf{v}|$，

$$|\mathbf{v}|=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_N^2)^{\frac{1}{2}}.$$

设$D\subset R_1$，f_1，f_2，$\cdots$，f_N是从D到R_1内的函数。定义$D\to V_N$的映象：$t\in D$

$$\mathbf{f}(t)=f_1(t)\mathbf{e}_1+f_2(t)\mathbf{e}_2+\cdots+f_N(t)\mathbf{e}_N, \qquad (15\cdot1)$$

$\mathbf{f}$是从D到V_N的一个矢函数。

若给定$\mathbf{f}: D\to V_N$，$\mathbf{c}\in V_N$，当$t\to a$时$\mathbf{f}\to\mathbf{c}\Longleftrightarrow$当$t\to a$时$|\mathbf{f}(t)-\mathbf{c}|\to 0$。记为$\lim\limits_{t\to a}\mathbf{f}(t)=\mathbf{c}$。或等价地，$\mathbf{c}=c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+\cdots+c_N\mathbf{e}_N$，

$$\lim_{t\to a}f_i(t)=c_i,\quad i=1,2,\cdots,N.$$

当$\mathbf{c}=\mathbf{f}(a)$时，称$\mathbf{f}$在$t=a$处连续。$\mathbf{f}$在D的每一点连续称$\mathbf{f}$在D上连续。

给定$\mathbf{f}: D\to V_N$，$\mathbf{f}$在$t=a$点的导数为

$$\mathbf{f}'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{f}(a+h)-\mathbf{f}(a)}{h} \qquad (15\cdot2)$$

若$\mathbf{f}$按(15·1)给出，当且仅当$f_i'(a), i=1,2,\cdots,N$存在时$\mathbf{f}'(a)$存在，且

$$\mathbf{f}'(a)=\sum_{i=1}^{N}f_i'(a)\mathbf{e}_i.$$

若$P\in\mathbf{R}_N$，把含有有向线段$\overrightarrow{OP}$的等价类的矢表示为$\mathbf{v}(\overrightarrow{OP})$。用有向线段$\overrightarrow{OP}$来表示矢，由(15·2)式给出的导数$\mathbf{f}'(a)$其几何解释如图15·1所示。

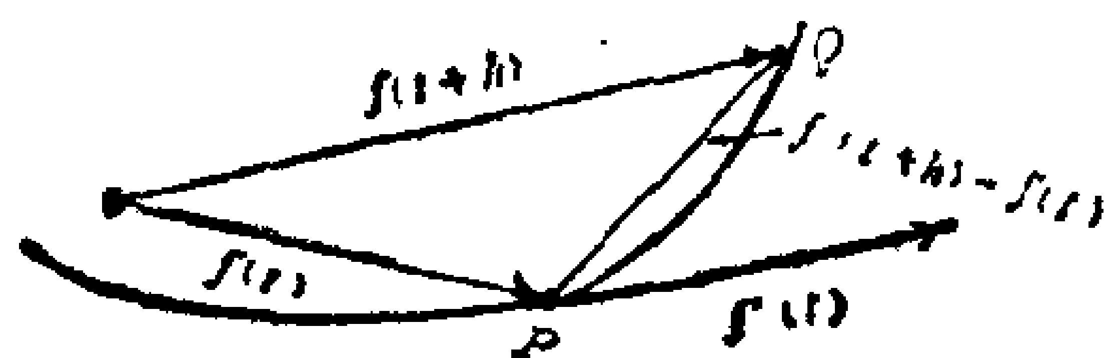


图 15·1

用$\mathbf{R}_N$内的笛卡尔坐标$(x_1, x_2, \cdots, x_N)$的术语，函数$\mathbf{f}$是从D到$\mathbf{R}_N$内如下给出的映象：

$$x_i = f_i(t) \quad (t \in D), i = 1, 2, \cdots, N. \tag{15·3}$$

如果f_i及f_i'在$t_0 \in D$的一邻域内连续，且$i = 1,2,\cdots,N$中有一k，$f_K'(t_0) \neq 0$，那么∃区间$t_0 - h \leqslant t \leqslant t_0 + h$. 在这区间上$f_K'(t)$不等于零（假定这区间含于$D$内）。应用反函数定理在$x_K^0 = f_K(t_0)$的某一邻域内有

$$t = g_K(x_K), \quad g_K[f_K(t)] = t.$$

代入(15·3)得到

$$x_1 = f_1[g_K(x_K)], \quad x_2 = f_2[g_K(x_K)], \cdots, x_N = f_N[g_K(x_K)],$$

参数t便被消去了。

设f是从R_1的闭区间I到V_N内的连续函数，如果f是1—1的，把f的值域$R(f)$称为V_N中的一条弧（图15·2）。一般说



图 15·2

同一条弧可以是若干函数的值域，每一这样的f都是弧的参数表示，参数t在I中取值. 定理15·1说明一条弧的两个不同的参数表示之间的关系。

引理15·1 设I是R_1内的区间，$S: I \to R_1$满足$t_1 \neq t_2$时$s(t_1) \neq s(t_2)$，且s是连续函数. 那么$s(t)$在I上是严格的单调函数。

证明 若不然，∃t_1，t_2及t_3，t_4都属于I，$t_2 > t_1$，$t_4 > t_3$，而有

$$s(t_2)>s(t_1),\ s(t_4)<s(t_3).$$

定义

$$\varphi(\lambda)=s(t_2+\lambda(t_4-t_2))-s(t_1+\lambda(t_3-t_1)),$$
$$0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$

显然 $\varphi(\lambda)$是连续的，且 $\varphi(0)>0$， $\varphi(1)<0$. 因此在0，1之间有$\overline{\lambda}$，使 $\varphi(\overline{\lambda})=0$，即

$$S[t_2+\overline{\lambda}(t_4-t_2)]=S[t_1+\overline{\lambda}(t_3-t_1)].$$

但是，对于$0<\overline{\lambda}<1$，$t_2+\overline{\lambda}(t_4-t_2)\neq t_1+\overline{\lambda}(t_3-t_1)$，这与$s=s(t)$是1—1的相矛盾．因此$S$是$I$上严格单调函数.

定理15·1 设$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$及$J=\{x: c\leqslant x\leqslant d\}$ $\mathbf{f}: I\to V_N$，$\mathbf{g}: J\to V_N$都是连续的，且它们的值域是同一弧C，那么$\exists I\to J$的单调连续函数$S(t)$，使

$$\mathbf{f}(t)=\mathbf{g}[S(t)],\ t\in I.$$

证明 因为$\mathbf{g}$是1—1的，由定理6·42的(d)断定$\mathbf{g}^{-1}$是从弧C到J的1—1的连续映象．由复合函数连续性定理，函数$S=\mathbf{g}^{-1}\mathbf{f}$是$I\to J$上的1—1的连续映象．由引理15·1可知$S$是严格单调的连续函数.

定义 一轨道是指由R_1的区间到V_N的连续函数的类，类中任两个函数之间满足定理15·1所述的关系．类中的任一$\mathbf{f}$称为轨道的参数表示（或参数式）．若联系类中$\mathbf{f}$，$\mathbf{g}$，使$\mathbf{f}(t)=\mathbf{g}[s(t)]$的$S(t)$总是递增的，称轨道是定向的.

常常把轨道与它的参数式$\mathbf{f}$等同起来．若R_N中从原点出发的有向线段$\overrightarrow{OP}$是$\mathbf{f}(t)$的代表，随t变化在R_N中描出一条曲线C，C是轨道$\mathbf{f}$的几何解释．也把轨道与曲线C等同起来.

注 轨道及弧的定义可以推广到函数定义域是R_1的区间，而值域属于一距离空间的情况.因为定理6·42对这样的函数有效，这里定理15·1的证明不变，同样，下面V_N中轨道的长度概念也能推广为距离空间中的轨道长度概念.

定义 设f：$I\to V_N$是连续函数，定义轨道f的长度为

$$l(f)=\sup_{\Delta}\sum_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})| \tag{15·4}$$

这里上确界是对I的所有划分 Δ：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ 所取。若$l(f)$是有限数，称轨道f是可求长的。

注 在V_N的$N=1$的特殊情况，轨道f：$I\to V_1$的长度为$\sup\limits_{\Delta}\sum\limits_{i=1}^{n}|f(t_i)-f(t_{i-1})|=V_a^bf$.即$l(f)=V_a^bf$.

下一结果与定理12·1及定理12·2类似。

定理15·2 (a)设f：$I\to V_N$是一轨道，且I的划分Δ：$a=T_0<T_1<\cdots<T_n=b$，g_K是限制f在区间$I_K=\{t:T_{K-1}\leqslant t\leqslant T_K\}$的函数，$K=1,2,\cdots,n$.那么

$$l(f)=l(g_1)+l(g_2)+\cdots+l(g_n).$$

(b)设$T\in I$，$I_T=\{t:a\leqslant t\leqslant T\}$，f限制在$I_T$上为$f_T$，定义$s(T)=l(f_T)$，那么$s$是$I$上非负的连续函数。

当$N=2$时(a)的证明与定理12·1证明相似。一般情况借助于归纳法证明。(b)可用定理12·2同样证明步骤获证。细节留给读者。

定理15·2的(a)简述为：轨道总长度等于它所分成的若干互不相交的子轨道之长度的总和。

下面定理指出一条弧的长度与其参数方程的选择无关。

定理15·3 设f与g是同一弧的参数式，那么

$$\iota(\mathrm{f})=\iota(\mathrm{g}).$$

证明 设S是定理15·1中的函数，令

$$L_f=\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{f}(t_i)-\mathrm{f}(t_{i-1})|,$$

$$L_g=\sum_{i=1}^{m}|\mathrm{g}(\tau_i)-\mathrm{g}(\tau_{i-1})|,\qquad(15\cdot5)$$

这里Δ：$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$是f的区间的划分，而S当递增时取$\tau_i=S(t_i)$(当S递减时取$\tau_i=S(t_{m-i})$)所得g的区间的划分Δ'：$c=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m=d$。因为$\mathrm{g}(\tau_i)=\mathrm{f}(t_i)$(或$\mathrm{g}(\tau_i)=\mathrm{f}(t_{m-i})$)，都有$L_f=L_g$。于是$\iota(\mathrm{f})=\iota(\mathrm{g})$。

定理15·4 设f：$I\to V_N$是连续的，且$\mathrm{f}(t)=f_1(t)\mathrm{e}_1+f_2(t)\mathrm{e}_2+\cdots+f_N(t)\mathrm{e}_N$。那么轨道f是可求长的$\Longleftrightarrow f_i$，$i=1,2,\cdots,N$都在$I$上是有界变差的。

证明 设Δ：$a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$是I的划分，有

$$|f_i(t_K)-f_i(t_{K-1})|\leqslant|\mathrm{f}(t_K)-\mathrm{f}(t_{K-1})|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{N}|f_i(t_K)-f_i(t_{K-1})|,K=1,2,\cdots,m.$$

因此

$$V_a^bf_i\leqslant\iota(\mathrm{f})\leqslant\sum_{i=1}^{N}V_a^bf_i.$$

当弧的参数表示具有充分的可微性，初等微积分中计算弧长、切矢等几何量的公式对R_N的曲线仍然成立。

定义 弧$\Gamma\subset R_N$称为光滑的$\Longleftrightarrow$ Γ具有参数表示f，它在区间$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$上连续，且f′在$I$的内部一致连续，在$a$，$b$点f′的极限不等于零。弧$\Gamma$称为分段光滑的$\Longleftrightarrow$ (i) f在I上连续；(ii) $\exists$ I的划分：$a=T_0<T_1<\cdots<T_n=b$，对$K=1, 2, \cdots, n$，f限制于$I_K=\{x: T_{K-1}\leqslant x\leqslant T_K\}$上的$f_K$是光滑的。

定义中不要求f′在T_K的左右极限相等。当在其中的T_i，f′左右极限不相等，总规定是其分量不成比例的情况。光滑及分段光滑的轨道其定义是同样的。

定理15·5（分段光滑轨道的长度）设f：$I\to V_N$是分段光滑的轨道，f在划分：$a=T_0<T_1<\cdots<T_n=b$的诸子区间上是光滑的，那么

$$l(f)=\int_a^b|f'(t)|dt=\sum_{K=1}^{n}\int_{T_{K-1}}^{T_K}|f'(t)|dt.$$

证明 由定理15·2。只要对f在I上光滑的情况证明定理就行了。据l(f)定义，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists$划分Δ：$a=u_0<u_1<\cdots<u_p=b$，使

$$l(f)-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^{p}|f(u_i)-f(u_{i-1})|\leqslant l(f). \qquad (15\cdot6)$$

另一方面由$|f'(x)|$在I上连续，它在I上黎曼积分存在，且对上述$\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当划分Δ_1：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$

的网孔$\|\Delta_1\|<\delta$，$\forall\xi_i\in[t_{i-1},\ t_i]$都有

$$\left|\sum_{i=1}^{m}|\mathbf{f}'(\xi_i)|(t_i-t_{i-1})-\int_a^b|\mathbf{f}'(t)|dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \quad (15\cdot7)$$

可以认为Δ_1是Δ的细分，对于$\mathbf{f}$的分量f_1，…，f_N在$[t_{i-1},\ t_i]$区间上应用微分中值定理，$\exists\,\xi_{Ki}\in(t_{i-1},\ t_i)$，使

$$f_K(t_i)-f_K(t_{i-1})=f'_K(\xi_{Ki})(t_i-t_{i-1}),\ i=1,\ 2,\ \cdots,$$

$m,k=1,2\cdots,N$。按照$|\mathbf{f}|$的定义，

$$\sum_{i=1}^{m}|\mathbf{f}(t_i)-\mathbf{f}(t_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left\{\sum_{K=1}^{N}[f_K(t_i)-f_K(t_{i-1})]^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{K=1}^{N}[f'_K(\xi_{Ki})]^2\right)^{\frac{1}{2}}(t_i-t_{i-1}).$$

再由不等式：

$$\left|\left(\sum_{K=1}^{N}(f_K'(\xi_{Ki}))^2\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\sum_{K=1}^{N}(f'(\xi_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$

$$\leqslant\left(\sum_{K=1}^{N}(f_K'(\xi_{Ki})-f_K'(\xi_i))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

及f_1'，f_2'，…，f_N'在I上一致连续，当δ充分小，对$\|\Delta_1\|$

$<\delta$的划分Δ_1可使右端之中的$[f_K'(\xi_{Ki})-f_K'(\xi_i)]^2$对$\forall i$及$\forall k$一致地小于$\left(\frac{\varepsilon}{4N(b-a)}\right)^2$，于是

$$\left|\sum_{i=1}^{m}|\mathbf{f}'(\xi_i)|(t_i-t_{i-1})\right.$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{N}[f_K'(\xi_{Ki})]^2\right)^{\frac{1}{2}}(t_i-t_{i-1})\right|<\frac{\varepsilon}{4}. \qquad (15\cdot8)$$

综合(15·6)，(15·7)及(15·8)，得

$$\left|l(\mathbf{f})-\int_a^b|\mathbf{f}'(t)|dt\right|<\varepsilon.$$

由ε的任意性，所以$l(\mathbf{f})=\int_a^b|\mathbf{f}'(t)|dt$.

假设$\mathbf{f}:\mathbf{R}_1\to V_N$是光滑函数，定义

$$s(t)=\int_a^t|\mathbf{f}'(\tau)|d\tau. \qquad (15\cdot9)$$

s表示矢径$\overrightarrow{OP}$端点P描出的曲线Γ从点$\mathbf{f}(a)$到点$\mathbf{f}(t)$的“有向弧长”. 微分(15·9)式得$s'(t_0)=|\mathbf{f}'(t_0)|$，并确定一单位矢：

$$\mathbf{T}=\frac{\mathbf{f}'(t_0)}{|\mathbf{f}'(t_0)|}=\frac{\mathbf{f}'(t_0)}{s'(t_0)}.$$

矢T在曲线的每一点$\mathbf{f}(t_0)$与曲线Γ相切参看(图15·1)因为s是t的非负递增函数，可取s为参数把f,T作为s的矢函数来研究，通常称s为自然参数。对自然参数s，，便有

$$\frac{d\mathbf{f}}{ds}=\mathbf{T}.$$

任意两矢c，d，其数量积c·d定义为

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=|\mathbf{c}||\mathbf{d}|\cos\theta$$

θ为对应于代表c，d的从同一点出发的两有向线段的夹角。若$\mathbf{c}=c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+\cdots+c_N\mathbf{e}_N$，$\mathbf{d}=d_1\mathbf{e}_1+d_2\mathbf{e}_2+\cdots+d_N\mathbf{e}_N$，那么

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=c_1d_1+c_2d_2+\cdots+c_Nd_N.$$

如果$\mathbf{c}\cdot\mathbf{d}=0$，称矢c，d正交（或垂直）.

现在假定$\mathbf{f}\in C^2$，即f的每一分量有连续的二阶导数。由$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}=1$对$\forall s$成立。对这一恒等式求导得

$$\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds}+\frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{T}=0\text{或}\mathbf{T}\cdot\frac{d\mathbf{T}}{ds}=0.$$

这说明T与$\frac{d\mathbf{T}}{ds}$是互相正交的矢。定义曲线Γ的曲率κ为

$$\kappa=\left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right\|.$$

T表示Γ的方向，κ是Γ的方向对弧长之变化率。把$\frac{d\mathbf{T}}{ds}$方向上的单位矢N定义为Γ的主法矢。这样，有

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N},$$

并称$R=\dfrac{1}{\kappa}$为Γ的曲率半径。

如果f是充分可微的，对恒等式$\mathbf{N}\cdot\mathbf{N}=1$求导，便知$\dfrac{d\mathbf{N}}{ds}$与N正交。把$\dfrac{d\mathbf{N}}{ds}$表示为

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\kappa_2\mathbf{N}_1+\beta\mathbf{T},$$

这里$\mathbf{N}_1$是与N，T所决定的平面相正交的单位矢，κ_2称为Γ的第二曲率.微分$\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=0$得$\dfrac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{N}+\mathbf{T}\cdot\dfrac{d\mathbf{N}}{ds}=0$即$\kappa+\beta=0$，而得$\beta=-\kappa$。继续这一过程可得$\kappa$，$\kappa_2,\cdots,\kappa_{N-1}$等$\Gamma$的曲率及相应的$N-1$条法矢N，$\mathbf{N}_1,\cdots$，$\mathbf{N}_{N-2}$。

对于通常的三维欧几里得空间，$\mathbf{N}_1$称为副法矢，习惯上表示为B。在Γ的每一点处T，N，B构成一正交系，称之为运动三面形。κ_2通常以τ表示，称τ为Γ的挠率。容易证明对平面曲线有$\tau=0$。选取三维空间的定向，使

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N},$$

这里"×"表示V_3内的矢积运算。微分$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$得

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{d\mathbf{T}}{ds}\times\mathbf{N}+\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\mathbf{T}\times\frac{d\mathbf{N}}{ds}$$

$$=\mathbf{T}\times(\tau\mathbf{B}-\kappa\mathbf{T})=-\tau\mathbf{N}.$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N},\quad \frac{d\mathbf{N}}{ds}=-\kappa\mathbf{T}+\tau\mathbf{B},\quad \frac{d\mathbf{B}}{ds}=-\tau\mathbf{N}. \qquad (15\cdot10)$$

就是著名的伏莱乃特公式。

例 设$\mathbf{f}:\mathbf{R}_1\to V_3$定义为

$$\mathbf{f}(t)=t\mathbf{e}_1+t^2\mathbf{e}_2+\frac{2}{3}t^3\mathbf{e}_3,$$

求T，N，B，κ及τ。

解 对$\mathbf{f}(t)$求导，$\mathbf{f}'(t)=\mathbf{e}_1+2t\mathbf{e}_2+2t^2\mathbf{e}_3$，因而

$|\mathbf{f}'(t)|=(1+2t^2)$，$s(t)=\int_0^t|\mathbf{f}'(t)|dt=t+\frac{2}{3}t^3$，长度$s$以

$t=0$点算起。所以

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{f}}{ds}=\frac{\mathbf{f}'}{s'}=(1+2t^2)^{-1}[\mathbf{e}_1+2t\mathbf{e}_2+2t^2\mathbf{e}_3].$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\frac{d\mathbf{T}}{dt}(1+2t^2)^{-1}$$

$$=(1+2t^2)^{-2}[-4t\mathbf{e}_1+(2-4t^2)\mathbf{e}_2+4t\mathbf{e}_3]$$

$$\kappa=\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=2(1+2t^2)^{-2}.$$

$$\mathbf{N}=(1+2t^2)^{-1}[-2t\mathbf{e}_1+(1-2t^2)\mathbf{e}_2+2t\mathbf{e}_3].$$

为求B，计算$\frac{d\mathbf{N}}{ds}=\frac{d\mathbf{N}}{dt}(1-2t^2)^{-1}$并由公式$\frac{d\mathbf{N}}{ds}=-\kappa\mathbf{T}+$

τB求出挠率τ。剩下的细节留给读者。

习　题

1. 设$\mathbf{f}$：$R_1\to V_N$，$\mathbf{f}=(t, t^2, \cdots, t^N)$。试消去参数$t$，以$x_2$表示$x_1$，$x_3$，…，$x_N$。在$R_1$的什么样点集内这种消去法成立？

2. 设$\mathbf{f}(t)$：$I\to V_2$，$f_1(t)=t^2-t$，$f_2(t)=t^3-3t$，$I=\{t: -3\leqslant t\leqslant 3\}$。
确定由$\mathbf{f}$表示的轨道的Γ是否是一条弧？

3. 设S是一距离空间，I，J是R_1内的区间。假定f：$I\to S$，g：$J\to S$都是连续的，其像集是同一弧。证明存在单调函数h：$I\to J$使
$$f(t)=g[h(t)],\quad t\in I.$$

4. 设f是区间$I\to S$的连续函数，S是距离空间。给出f表示之轨道的长度的定义。并证明与定理15·2同样的定理。

5. 对习题4中f叙述并证明与定理15·3同样的定理。

6. 设$\mathbf{f}=(f_1, f_2, f_3)$，$f_1=3\cos t$，$f_2=3\sin t$，$f_3=2t$，$t\in I$，$I=\{t: 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$。求由$\mathbf{f}$表示的弧的长度。

7. 设$\mathbf{f}$：$I\to V_2$，$I=\{t: 0\leqslant t\leqslant 1\}$及$\mathbf{f}=(f_1, f_2)$，$f_1=t$，

$$f_2=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\sin\dfrac{\pi}{t} & t>0\\ 0 & t=0\end{cases}$$，$\mathbf{f}$是否可求长？

习题8—11中函数$\mathbf{f}$：$R_1\to V_3$，在给定的t值处求$\mathbf{T}$，$\mathbf{N}$，$\mathbf{B}$，

κ及τ。

8. $\mathbf{f}(t)=e^t[((\cos t)\mathbf{e}_1+(\sin t)\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3]$, $t=0$。

9. $\mathbf{f}(t)=\frac{1}{3}t^3\mathbf{e}_1+2t\mathbf{e}_2+\frac{2}{t}\mathbf{e}_3$, $t=2$。

10. $\mathbf{f}(t)=t\mathbf{e}_1+\frac{3}{2}t^2\mathbf{e}_2+\frac{3}{2}t^3\mathbf{e}_3$, $t=2$。

11. $\mathbf{f}(t)=(t\cos t)\mathbf{e}_1+(t\sin t)\mathbf{e}_2+t\mathbf{e}_3$, $t=0$。

12. 设$\mathbf{f}: I\to V_N$是$\mathbf{R}_N$内曲线Γ的参数式。且$\mathbf{f}\in\mathbf{C}^N$。$s$表示弧长,$\mathbf{T}$表示切矢。那么$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\kappa\mathbf{N}$,$\mathbf{N}$正交于$\mathbf{T}$,求$\frac{d\mathbf{N}}{ds}$并确定单位矢$\mathbf{N}_1$,使

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt}=-\kappa\mathbf{T}+\kappa_1\mathbf{N}_1.$$

求$\frac{d\mathbf{N}_1}{dt}$并确定单位矢$\mathbf{N}_2$,使

$$\frac{d\mathbf{N}_1}{ds}=-\kappa_1\mathbf{N}+\kappa_2\mathbf{N}_2.$$

继续这一过程,得出相互正交的单位矢$\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_1$, …, $\mathbf{N}_{N-2}$,满足

$$\frac{d\mathbf{N}_K}{ds}=-\kappa_K\mathbf{N}_{K-1}+\kappa_{K+1}\mathbf{N}_{K+1},\quad \kappa=2,\ 3,\cdots,\ N-3.$$

最后 $$\frac{d\mathbf{N}_{N-2}}{ds}=-\kappa_{N-2}\mathbf{N}_{N-3}.$$

κ，κ_1，…，κ_{N-2}称为Γ的曲率。

14. 已知$\mathbf{f}: I \to V_3$，$I = \{t: a \leqslant x \leqslant b\}$，$\mathbf{f} \in C^3$。

(a)证明

$$\kappa^2 = \frac{(\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'') \cdot (\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'')}{|\mathbf{f}'|^6}$$

(b)证明

$$\tau = \frac{\mathbf{f}' \cdot (\mathbf{f}'' \times \mathbf{f}''')}{|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''|^3}.$$

§15·2 矢函数与$\mathbf{R}_N$上的场

这一节研究的$\mathbf{R}_M \to V_N$的函数的微分、积分的基本性质。虽然将利用坐标系作为论证和计算的工具，但所给出的定义与结果具备和坐标系的选取无关的特征时，才着重地加以讨论。

定义 设$D \subset \mathbf{R}_M$，从D到V_N的矢函数是指映象$\mathbf{f}: D \to V_N$。若V_N就是V_1(很自然地把V_1和$\mathbf{R}_1$等同)那么$\mathbf{f}$称为数量函数。矢函数、数量函数也称为矢场、数量场。

在客观物理世界中存在着各种实际的场，如温度场、力场、速度场等，因而场的概念把矢函数、数量函数想象为分布于$\mathbf{R}_M$区域D上的矢场、数量场有着很重要的实际意义（图15·3所示是$M = N = 2$的情况)。

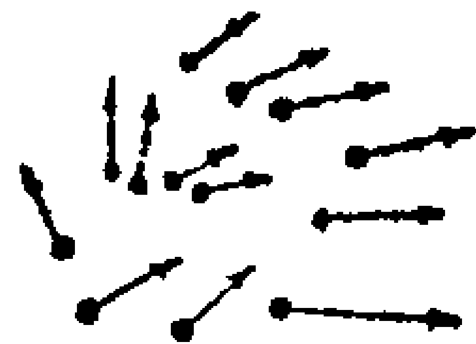


图 15·3

设$D \subset \mathbf{R}_M$，$\mathbf{f}: D \to V_N$是矢函数。V_N的正交基是互相

正交的N个单位矢$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, …, $\mathbf{e}_N$的集。即

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当i=j,\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N.\\ 0 & 当i\neq j,\end{cases}$$

这样，对$\forall p\in D$，$\mathbf{f}$能表示为

$$\mathbf{f}(p)=\sum_{i=1}^{N}f_i(p)\mathbf{e}_i \tag{15·11}$$

其中$f_i: D\to\mathbf{R}_1$, $i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$.

根据(15·11)式，矢场$\mathbf{f}$由数量场f_1, f_2, …, f_N来描写。这样，于第六、七、八章所研究过的$\mathbf{R}_M\to\mathbf{R}_1$的函数的性质，通过(15·11)式转化为$\mathbf{R}_M\to V_N$的矢函数的性质。例如，$\mathbf{f}$在$p$点连续，当且仅当$f_i$都在$p$点连续($i=1,\ 2,\ \cdots,N$)。

为简便，将经常研究$\mathbf{R}_N\to V_N$的函数$\mathbf{f}$，许多结果仅需稍作修改，对$\mathbf{R}_M\to V_N$的函数也成立。

与第八章对数量函数给出的积分定义类似，定义矢函数的积分概念。

定义 设D是$\mathbf{R}_N$内的开集，$\mathbf{u}: D\to V_N$是矢函数。$F\subset D$为$\mathbf{R}_N$内的图形。$\mathbf{u}$在F上是可积的$\Longleftrightarrow\exists$矢$\mathbf{L}\in V_N$，$\mathbf{L}$具有性质：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$F$的划分$\Delta=\{F_1,\ F_2,\ \cdots,\ F_n\}$，$\Delta$的网孔$\|\Delta\|<\delta$，及在$F_i$内任取点$p_i$都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{u}(p_i)V(F_i)-\mathbf{L}\right|<\varepsilon,$$

这里$V(F_i)$表示F_i的体积。称L为u在F上的积分，记为

$$\mathbf{L}=\int_F \mathbf{u}dV.$$

如果$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{N}u_i(p)\mathbf{e}_i$， (15·12)

那么u在F上可积$\Longleftrightarrow$每一数量函数u_i在F上可积，这时有

$$\int_F \mathbf{u}dV=\sum_{i=1}^{N}\left(\int_F u_i dV\right)\mathbf{e}_i. \tag{15·13}$$

据(15·13)立即得出u在F上的积分具有唯一性。同样，可得矢函数积分的基本性质。

设$\mathbf{v}\in V_N$，以$\mathbf{R}_N$中的有向线段$\overrightarrow{P_0P}$表示，通常用$\mathbf{v}(\overrightarrow{P_0P})$表示这一矢。

定义 设$P_0\in D\subset \mathbf{R}_N$，a是$V_N$中的一单位矢。$\mathbf{W}: D\to V_N$。W沿方向a在$P_0$点的方向导数为

$$D_a\mathbf{W}(P_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\mathbf{W}(p)-\mathbf{W}(P_0)}{h}$$

这里$P\in D$，使$\mathbf{v}(\overrightarrow{P_0P})=h\mathbf{a}$，$h$为正数（图15·4）。

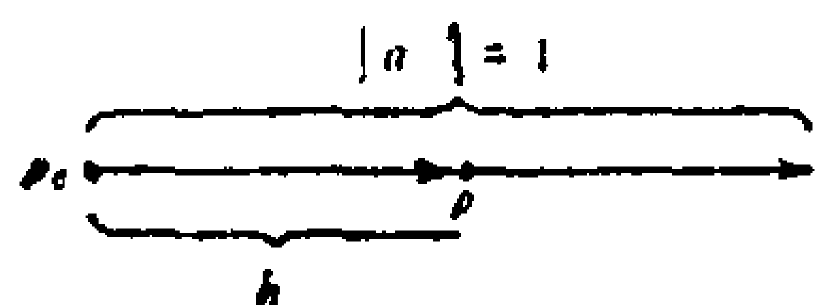


图 15·4

称W在D内是连续可微的$\Longleftrightarrow$W及$D_a\mathbf{W}$在D上连续，这里a表示V_N中任意的单位矢。把连续可微的W仍记成$\mathbf{W}\in C'(D)$。

为了导出方向导数的计算公式，引用R_N中的坐标系。采用$W(P)$，$P\in R_N$的记法是指函数与坐标无关的特性。当引入了笛卡尔坐标系$(x_1, x_2, \cdots, x_N)\in R_N$，这时采用$W(x_1, x_2, \cdots, x_N)$或$W(x)$的记法。若$e_1, e_2, \cdots, e_N$是$V_N$内的正交基，并在$R_N$中引入笛卡尔坐标系，那么

$$W(x)=\sum_{i=1}^{N}W_i(x)e_i,$$

这里每一数量函数$W_i(x)$是用坐标系的坐标变数表示出来的。总之，对W采用上述两种表示是为了清楚地看出在什么地方用了坐标系。

定理15·6

(i)设a是单位矢，$a\in V_N$。W是D上连续可微数量场，$D\subset R_N$。如果$a=a_1e_1+a_2e_2+\cdots+a_Ne_N$，那么

$$D_aW=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial W}{\partial x_i}a_i \qquad (15\cdot14)$$

(ii)如果$W: D\to V_N$是矢场，且$W=\sum_{i=1}^{N}W_ie_i$，W_i在D上是连续可微的数量函数。那么

$$D_aW=\sum_{i=1}^{N}D_aW_ie_i=\sum_{i,j=1}^{N}W_{i;j}a_je_i \qquad (15\cdot15)$$

证明 (i)当a是某坐标方向的单位矢，例如说x_i轴方向，

那么$D_{\mathbf{a}}W$是W关于x_j的偏导数，即$D_{\mathbf{a}}W=\frac{\partial W}{\partial x_j}$，(15•14)成立。在一般情况下，固定点，$x^0=(x_1^0, \cdots, x_N^0)$，并定义

$$\varphi(t)=W(x_1^0+a_1t, \cdots, x_N^0+a_Nt).$$

按方向导数定义，并应用定理7•3所述的链法则求$\varphi'(0)$，便得

$$D_{\mathbf{a}}W=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial W}{\partial x_i}a_i.$$

(ii)由$\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{N}W_i\mathbf{e}_i$及公式(15•14)立即可得

$$D_{\mathbf{a}}\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{N}(D_{\mathbf{a}}W_i)\mathbf{e}_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}W_{i;j}a_j\right)\mathbf{e}_i$$

$$=\sum_{i;j=1}^{N}W_{i;j}a_j\mathbf{e}_i$$

下一定理指出数量函数的方向导数，可以表示成所给方向的单位矢与一确定的矢场的数量积。尽管在定理证明中使用了坐标系，但这一结果与坐标系无关。

定理15•7 设$f: D\to\mathrm{R}_1$是定义在$D\subset\mathrm{R}_N$的连续可微的数量场。那么存在唯一的矢场，$\mathbf{W}: D\to V_N$，使对$\forall\mathbf{a}\in V_N$，$|\mathbf{a}|=1$及$P\in D$，有

$$D_{\mathbf{a}}f(P)=\mathbf{a}\cdot\mathbf{W}(P) \tag{15•16}$$

如果$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$是V_N内单位矢的正交系，那么对

$\forall x \in D$

$$\mathbf{W}(x)=\sum_{j=1}^{N} f_{;j}(x)\mathbf{e}_j. \qquad (15\cdot17)$$

证明 由公式(15·14)，求得

$$D_a f(x)=\sum_{j=1}^{N} f_{;j}(x)a_j. \qquad (15\cdot18)$$

按(15·17)定义$\mathbf{W}(x)$，显然$\mathbf{W}$与$\mathbf{a}$的数量积为$\sum_{j=1}^{N} f_{,j}(x)a_j$，即满足(15·16)式。为了证明矢场$\mathbf{W}$的唯一性，设$\mathbf{W}'$是满足(15·16)的另一矢场。那么对任意的单位矢$\mathbf{a}$，都有

$$(\mathbf{W}-\mathbf{W}')\cdot\mathbf{a}=0.$$

如果$\mathbf{W}-\mathbf{W}'\neq 0$，取$\mathbf{a}=\dfrac{\mathbf{W}-\mathbf{W}'}{|\mathbf{W}-\mathbf{W}'|}$这一单位矢，而

$$(\mathbf{W}-\mathbf{W}')\cdot\mathbf{a}=|\mathbf{W}-\mathbf{W}'|\neq 0,$$

便导致矛盾。

定义 定理15·7中(15·16)式所确定的矢$\mathbf{W}$称为f的梯度，以$\mathrm{grad}f$或∇f表示。

注 当f是从R_N到R_1的数量场，通常称$f(p)=$常数的那些p的集合是R_N内的超曲面．过曲面的点p与曲面相切的矢a满足$\sum_{i=1}^{N} f_{,i}(P)a_i=0$，这里$a=\sum_{i=1}^{N} a_i e_i$．因此$\nabla f$在超曲面（$f(p)=$常数）的每个点$p$处与曲面相正交．

例1 设$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$是$V_3(\mathbf{R}_3)$内的单位正交基。给定

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-3x_1x_2x_3,$$

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)=(x_1^2-x_2+x_3)\mathbf{e}_1+(2x_2-3x_3)\mathbf{e}_2$$
$$+(x_1+x_3)\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{a}=\lambda\mathbf{e}_1+\mu\mathbf{e}_2+\nu\mathbf{e}_3,\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,$$

求出∇f及$D_a\mathbf{u}$用x_1，x_2，x_3，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$表示的公式。

解 按照(15·17)，求得

$$\nabla f=3(x_1^2-x_2x_3)\mathbf{e}_1+3(x_2^2-x_1x_3)\mathbf{e}_2$$
$$+3(x_3^2-x_1x_2)\mathbf{e}_3.$$

应用(15·15)得

$$D_a\mathbf{u}=(2x_1\lambda-\mu+\nu)\mathbf{e}_1+(2\mu-3\nu)\mathbf{e}_2+(\lambda+\nu)\mathbf{e}_3.$$

定理15·8 设f，g，u都是$D\subset\mathbf{R}_N$上的连续可微的数量场，而$h:\mathbf{R}_1\to\mathbf{R}_1$是连续可微函数，$u$的值域含于$h$的定义域内。那么

$$\nabla(f+g)=\nabla f+\nabla g,$$

$$\nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f$$

$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{1}{g^2}[g\nabla f-f\nabla g],\ (g\neq 0)$$

$$\nabla h(u)=h'(u)\nabla u.$$

证明 仅证明第二个公式其余留给读者去作。设$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，

…，$\mathbf{e}_N$是V_N内正交基。由(15·17)式计算$\nabla(f\cdot g)$得

$$\nabla(f\cdot g)=\sum_{i=1}^{N}(fg)_{,i}\mathbf{e}_i,$$

而 $(fg)_{,i}=fg_{,i}+f_{,i}g$代入上式，求得

$$\nabla(fg)=\sum_{i=1}^{N}(fg_{,i}+f_{,i}g)\mathbf{e}_i=f\nabla g+g\nabla f.$$

算子∇作用于$\mathrm{R}_N\to\mathrm{R}_1$的连续可微的数量场得出一$\mathrm{R}_N\to V_N$的连续的矢场，在笛卡尔坐标系里可以把算子$\nabla$形式地记为公式

$$\nabla\cdot=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i.$$

假设$\mathbf{W}$是R_N到V_N的矢场，其坐标表示为$\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{N}W_i\mathbf{e}_i$，

我们把$\nabla\cdot\mathbf{W}$定义为

$$\nabla\cdot\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial W_i}{\partial x_i}.$$

称为$\mathbf{W}$的散度。

∇及$\nabla\cdot\mathbf{W}$都具有与坐标系无关的意义，前者由定理15·7可见，后者将于定理15·9证明。

定义 数量函数f在其定义域D中满足$f(P)\neq 0$的P点所组成集的闭包称为f的支集，若f的支集是紧集，称f在D内有

紧支集。n是非负整数，若$f\in C^n$且f具有紧支集，则用$f\in C_0^n(D)$表示。

引理15·2 设D是R_N内的开图形且设$f\in C_0^1(D)$，那么

$$\int_D f_{,j}(x)dV=0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ N.$$

证明 设S是f的紧支集，那么在$D-S$上$f\equiv 0$，$\nabla f\equiv 0$。设$R=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_N);\ a_j\leqslant x_j\leqslant b_j,j=1,\ 2,\ \cdots,N\}$是其内部含有$\overline{D}$的超方格，延拓$f$，于$R-D$上令$f=0$。先对$x_j$而后对其余$N-1$个变量积分，显然有

$$\int_D f_{,j}(x)dV_N=\int_R f_{,j}(x)dV_N$$

$$=\int_{R'}\left[\int_{a_j}^{b_j}f_{,j}(x)dx_j\right]dV_{N-1}$$

$$=\int_{R'}[f(b_j,x')-f(a_j,x')]dV_{N-1}$$

$$=0,$$

这里x'表示$x=(x_1,x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_N)$去掉第$j$个坐标的$R_{N-1}$中点$x'=(x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\ \cdots,x_N)$。

下一引理在分析的许多分支内有用，它指出当连续函数f与任一有紧支集的光滑函数的乘积函数的积分恒为零时，f必恒为零。

引理15·3 设D是R_N内的开图形，数量函数f在D上连续，如果对$\forall g\in C_0^1(D)$，都有

$$\int_D fg dV_N = 0. \tag{15·19}$$

那么在D上$f\equiv 0$。

证明 用反证法。假若$\exists x^0\in D$，$f(x^0)\neq 0$。可以认为$f(x^0)>0$，不然可以讨论$-f$。由f是连续的，而D是开的，$\exists$球$B(x^0,\ 3r_0)\subset D$，且在球$B(x^0,\ 3r_0)$上$f>\delta>0$。以r表示x到x^0的距离，定义函数

$$g(x)=\begin{cases}1,\ 0\leqslant r\leqslant r_0, & \text{当}0\leqslant r\leqslant r_0,\\ \dfrac{1}{r_0^3}(2r-r_0)(r-2r_0)^2, & \text{当}r_0\leqslant r\leqslant 2r_0,\\ 0, & \text{当}2r_0\leqslant r,\end{cases}$$

容易验证$g(x)\in C_0^1(D)$，且$g(x)\geqslant 0$。而

$$\int_D fg dV_N=\int_{B(x^0;3r_0)} fg dV_N\geqslant\int_{B(x^0;r_0)} fg dV_N$$

$$=\int_{B(x^0;r_0)} f dV_N>\delta V[B(x^0,r_0)]>0,$$

这与(15·19)式相矛盾。因此在D上$f\equiv 0$。

注 (15·19)式中限制$g\in C_0^\infty(D)$时，引理结论仍成立.为此，以g的平滑(参看§13·3)代替g，按同样方法证明.

现在证明散度算子与坐标系无关。

定理15·9 设D是R_N内一开图形，$W\in C^1(D)$是一矢场，那么存在唯一的在D上连续的数量场v，使对$\forall u\in C_0^1(D)$，有

$$\int_D (uv + \nabla u \cdot \mathbf{W})dV = 0. \qquad (15 \cdot 20)$$

并且若$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$是一正交基，对每一点$x \in D$，$\mathbf{W}(x) = \sum_{j=1}^{N} W_j(x)\mathbf{e}_j$。那么

$$v(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} W_j(x). \qquad (15 \cdot 21)$$

证明 按(15·21)式来定义v。对$\forall u \in C_0^1(D)$，据引理15.2，

$$\int_D (uv + \nabla u \cdot \mathbf{W})dV = \int_D \sum_{j=1}^{N} (u \frac{\partial}{\partial x_j} W_j + \frac{\partial u}{\partial x_j} W_j)dV$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int_D \frac{\partial}{\partial x_j}(uW_j)dV = 0.$$

为了证明v的唯一性，再设v'也是满足(15·20)的数量场。将v，v'满足的(15·20)相减得

$$\int_D (v - v')udV = 0 \quad 对\forall u \in C_0^1(D)成立.$$

根据引理15·3，便有$v' \equiv v$。

定义 按(15·20)所确定的数量场v，它在任一坐标系之下由(15·21)所定义，称为$\mathbf{W}$的散度。记作$v = \mathrm{div}\mathbf{W}$或$v = \nabla \cdot \mathbf{W}$。

注意(15·20)式所确定的 v 不依赖于坐标系的选取。引用坐标系的(15·21)式，适合于实际计算 v。

定理15·10 设D是R_N内的开集，且$\mathbf{W}$，$\mathbf{W}_1$，…，$\mathbf{W}_N$是属于C^1的D上的矢场。f是属于C^1的D上的数量场，c_1，c_2，…，c_n都是实数。那么

$$(a)\quad \mathrm{div}\left(\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{W}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathrm{div}\mathbf{W}_i,$$

$$(b)\quad \mathrm{div}(f\mathbf{W}) = f\mathrm{div}\mathbf{W} + \nabla f\cdot\mathbf{W}.$$

证明留给读者。

例2 把地球当作球体，取坐标原点在地球中心，R为地球半径，g表示地面上的重力加速度。对$\mathbf{R}_3$中的点p，$\mathbf{r}$是以$\overrightarrow{OP}$为其表示的矢，令$r=|\mathbf{r}|$。经典物理中把重力矢场叫作地球的重力场，表示为

$$\mathbf{v}(p) = -\frac{gR^2}{r^3}\mathbf{r},\ \text{当} r>R.$$

试证明$\mathrm{div}\mathbf{v}(p)=0\quad(r>R)$。

解 用定理15·10的(b)求得

$$\mathrm{div}\mathbf{v} = \mathrm{div}\left(-\frac{gR^2}{r^3}\mathbf{r}\right) = -\frac{gR^2}{r^3}\mathrm{div}\mathbf{r} - \left(\nabla\frac{gR^2}{r^3}\right)\cdot\mathbf{r}.$$

下一步引入正交基$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，有

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,\quad \mathrm{div}\mathbf{r} = 1+1+1=3,$$

$$r = (x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\nabla r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3)=\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

用定理15·8的公式及上面等式，得

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=-\frac{3gR^2}{r^3}-\left(\frac{-3gR^2}{r^4}\right)\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r}=0.$$

在V_3中两矢的矢积（或称叉积）可以用来引入一个作用于光滑矢场的新的微分算子．下面我们讨论这一微分算子，若$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$是V_3的正交基，形式地构造一个算子

$$\nabla\times\mathbf{u}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ u_1 & u_2 & u_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_3+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3$$

(15·22)

定理15·11 设D是$\mathbf{R}_3$内开集，$\mathbf{u}\in C^1(D)$是D上的矢场，且设$\mathbf{R}_3$两个可能定向已选定一种定向．那么∃唯一的$D\to V_3$的连续矢场$\mathbf{W}$，使对每个常矢$\mathbf{a}$，有

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{a})=\mathbf{W}\cdot\mathbf{a} \tag{15·23}$$

如果$\mathbf{e}_1$．$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$为定向的$\mathbf{R}_3$中坐标系的正交基，那么矢$\mathbf{W}$由公式(15·23)确定．

注 R_3的两种定向是指在R_3中选取两正交单位矢e_1,e_2，第三个单位矢可能有两种选取：其一是$e_1\times e_2$，其二是$e_2\times e_1$．我们说e_1,e_2,e_3为定向R_3的正

交基，指取$e_3=e_1\times e_1$.

定理15.11的证明 在给定正交基$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$之下，记$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3$，$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$。由矢积公式可得

$$\mathbf{u}\times\mathbf{a}=(u_2a_3-u_3a_2)\mathbf{e}_1+(u_3a_1-u_1a_3)\mathbf{e}_2$$
$$+(u_1a_2-u_2a_1)\mathbf{e}_3$$

运用散度公式(15•21)，求得

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{a})=a_3\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-a_2\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+a_1\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-a_3\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$
$$+a_2\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-a_1\frac{\partial u_2}{\partial x_3}.$$

若令 $W_1=\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$，$W_2=\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)$，

$$W_3=\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right),$$

那么

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{a})=W_1a_1+W_2a_2+W_3a_3=\mathbf{W}\cdot\mathbf{a},$$

最右端的$\mathbf{W}=W_1\mathbf{e}_1+W_2\mathbf{e}_2+W_3\mathbf{e}_3$。这样得到的$\mathbf{W}$是唯一的。如果$\mathbf{W}'$是另一这样的矢场，对任一单位矢，都有$\mathbf{W}\cdot\mathbf{a}=\mathbf{W}'\cdot\mathbf{a}$，由此$\mathbf{W}=\mathbf{W}'$。

定义 定理15•11中的矢$\mathbf{W}$称为$\mathbf{u}$的旋度，以curl$\mathbf{u}$或$\nabla\times\mathbf{u}$表示。

注意这样定义的W，由(15•23)式可知与坐标系无关，而引入坐标系的(15•22)式，运用来实际计算curl u。旋度算子的基本性质如下：

定理15•12 设D是R_3中开集，u，v，u_1，…，u_n都是D到V_3的属于C^1的矢场，f是D上的数量场，C_1，C_2，…，C_n是实数．那么

(a) $\operatorname{curl}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{u}_j\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j(\operatorname{curl}\mathbf{u}_j)$。

(b) $\operatorname{curl}(f\mathbf{u})=f\operatorname{curl}\mathbf{u}+\nabla f\times\mathbf{u}$。

(c) $\operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{u}-\mathbf{u}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{v}$。

(d) 当$\nabla f\in C^1(D)$，有$\operatorname{curl}\nabla f=0$。

(e) 当$\mathbf{v}\in C^2(D)$，有$\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathbf{v}=0$。

证明 只证明(b)，余下的留给读者．设$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$是一组正交基，令$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$．那么由(15•22)式

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{u})=\left(\frac{\partial(fu_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial(fu_2)}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1$$

$$+\left(\frac{\partial(fu_1)}{\partial x_3}-\frac{\partial(fu_3)}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2$$

$$+\left(\frac{\partial(fu_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial(fu_1)}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3.$$

因此

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{u})=f\operatorname{curl}\mathbf{u}+\left(u_3\frac{\partial f}{\partial x_2}-u_2\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1$$

$$+\left(u_1\frac{\partial f}{\partial x_3}-u_3\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2$$

$$+\left(u_2\frac{\partial f}{\partial x_1}-u_1\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3. \tag{15·24}$$

由$\nabla f=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_3$，并用矢积公式，(15·24)恰好成为

$$\mathrm{curl}(f\mathbf{u})=f\,\mathrm{curl}\,\mathbf{u}+\Delta f\times\mathbf{u}.$$

定理15·12的(d)指出：若$\mathbf{u}$是数量场f的梯度，即$\mathbf{u}=\nabla f$，那么$\mathrm{curl}\,\mathbf{u}=0$。自然要问条件$\mathrm{curl}\,\mathbf{u}=0$是否蕴含$\mathbf{u}$是某一数量函数$f$的梯度？在一定条件之下这一命题成立。当$\mathbf{u}=\nabla f$，这时也即

$$u_1=\frac{\partial f}{\partial x_1},\quad u_2=\frac{\partial f}{\partial x_2},\quad u_3=\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

或者

$$df=u_1dx_1+u_2dx_2+u_3dx_3. \tag{15·25}$$

如果由条件$\mathrm{curl}\,\mathbf{u}=0$，导出$\exists f$，使$\mathbf{u}=\nabla f$，这等价于(15·25)式右端恰好是某一函数的全微分。

例3 设矢场为

$$\mathbf{u}=2x_1x_2x_3\mathbf{e}_1+(x_1^2x_3+x_2)\mathbf{e}_2+(x_1^2x_2+3x_3^2)\mathbf{e}_3,$$

验证$\mathrm{curl}\,\mathbf{u}=0$，并求函数$f$，使$\nabla f=\mathbf{u}$。

解 用公式(15·22)计算$\nabla\times\mathbf{u}$，有

$$\text{curl}\,\mathbf{u}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial}{\partial x_2}, & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ 2x_1x_2x_3, & x_1^2x_3+x_2, & x_1^2x_2+3x_3^2\end{vmatrix}$$

$$=(x_1^2-x_1^2)\mathbf{e}_1+(2x_1x_2-2x_1x_2)\mathbf{e}_2$$

$$+(2x_1x_3-2x_1x_3)\mathbf{e}_3=0.$$

寻求函数f，使

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2x_1x_2x_3,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^2x_3+x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=x_1^2x_2+3x_3^2.$$

积分第一方程，得

$$f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2x_2x_3+c(x_2, x_3).$$

将f对x_2，x_3求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^2x_3+\frac{\partial c}{\partial x_2}=x_1^2x_3+x_2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}=x_1^2x_2+\frac{\partial c}{\partial x_3}=x_1^2x_2+3x_3^2,$$

得出

$$\frac{\partial c}{\partial x_2}=x_2,\qquad \frac{\partial c}{\partial x_3}=3x_3^2,$$

对$\dfrac{\partial c}{\partial x_2}=x_2$积分得

$$c=\frac{1}{2}x_2^2+K(x_3),\ K'(x_3)=3x_3^2,\ K(x_3)=x_3^3+K_1.$$

最后得

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=x_1^2x_2x_3+\frac{1}{2}x_2^2+x_3^3+K_1,$$

这里K_1是常数.

习　　题

1. 设D是$\mathbf{R}_N$内的开集. $\mathbf{u}:D\to V_N$是矢函数，F是含于D内的图形，且$\int_F \mathbf{u}dV$存在，证明积分值是唯一的.

2. 在习题1的条件之下，设$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_N$是$V_N$的正交基，证明公式

$$\int_F \mathbf{u}dV=\sum_{i=1}^{N}\left(\int_F u_i dV\right)\mathbf{e}_i.$$

3. 设$\mathbf{u}:\mathbf{R}_2\to V_2$，$\mathbf{u}(x_1,\ x_2)=(x_1^2-x_2^2)\mathbf{e}_1+2x_1x_2\mathbf{e}_2$，

$$F=\{(x_1,\ x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}.\ 求\ \int_F \mathbf{u}dV.$$

习题4—7，用(x_1,x_2,x_3)及$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)$表示$\nabla f(x)$，并求$D_{\mathbf{a}}f(\overline{x})$，$\mathbf{a}$是给出的单位矢，$\overline{x}$是给出的点.

4. $f(x)=2x_1^2+x_2^2-x_1x_3-x_3^2$，

$$\mathbf{a}=\frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3),\ \overline{x}=(1,\ -1,\ 2).$$

5. $f(x)=x_1^2+x_1x_2-x_2^2+x_3^2$，

$$\mathbf{a}=\frac{1}{7}(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-6\mathbf{e}_3),\quad \bar{x}=(2,1,-1).$$

6. $f(x)=e^{x_1}\cos x_2+e^{x_2}\cos x_3$,

$$\mathbf{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3),\ \bar{x}=(1,\pi,-\frac{1}{2}).$$

7. $f(x)=x_1^2\log(1+x_2^2)-x_3^3$,

$$\mathbf{a}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3),\ \bar{x}=(1,\ 0,\ -2).$$

习题8—9，以(x_1,x_2,x_3)，$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$表示$D_a\mathbf{W}(x)$并求$D_a\mathbf{W}(x)$在给定的点$\bar{x}$的值。

8. $\mathbf{W}(x)=(x_1-2x_2)\mathbf{e}_1+x_2x_3\mathbf{e}_2-(x_2^2-x_3^2)\mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{a}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3),\ \bar{x}=(2,\ -1,\ 3).$$

9. $\mathbf{W}(x)=x_2x_3\mathbf{e}_1+x_1x_3\mathbf{e}_2+x_1x_2\mathbf{e}_3$,

$$\mathbf{a}=\frac{1}{3}(\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2-2\mathbf{e}_3),\ \bar{x}=(1,\ 2,\ -1).$$

10. 证明定理15·8中未证明的第一、三、四公式。

11. 证明如果引理15·3的(15·19)的g限于$C_0^\infty(D)$类中的函数，引理仍成立。

12. 证明定理15·10。

习题13—17求给定的x点的$\operatorname{div}\mathbf{v}(x)$值。

13. $\mathbf{v}(x)=x_1x_2\mathbf{e}_1+x_3^2\mathbf{e}_2-x_1^2\mathbf{e}_3$，$\bar{x}=(1,0,1)$。

14. $\mathbf{v}(x)=(x_1^2-x_2x_3)\mathbf{e}_1+(x_2^2-x_1x_3)\mathbf{e}_2+(x_3^2-x_1x_2)\mathbf{e}_3$，

$\overline{x}=(2, -1, 1)$。

15. $\mathbf{v}(x)=\nabla u$, $u=3x_1x_2^2-x_2^3+x_3$, $\overline{x}=(-1, 1, 2)$.

16. $\mathbf{v}(x)=r^{-n}\mathbf{r}$, $\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$, $r=|\mathbf{r}|$,

$\overline{x}=(2, 1, -2)$。

17. $\mathbf{v}=\mathbf{a}\times\mathbf{r}$，$\mathbf{a}$是常矢，$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$,

$\overline{x}=(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$。

习题18—20求给出v的curlv。当 curlv=0时求 f 使 $\nabla f=\mathbf{v}$。

18. $\mathbf{v}(x)=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{-1}(x\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3)$.

19. $\mathbf{v}(x)=(x_1^2+x_2x_3)\mathbf{e}_1+(x_2^2+x_1x_3)\mathbf{e}_2$

$+(x_3^2+x_1x_2)\mathbf{e}_3$.

20. $\mathbf{v}(x)=e^{x_1}[(\sin x_2)(\cos x_3)\mathbf{e}_1+(\sin x_2)(\sin x_3)\mathbf{e}_2$

$+(\cos x_2)\mathbf{e}_3]$.

21. 求例2中重力场v的curlv。

22. 证明定理15·12的(*a*)，(*c*)，(*d*)，(*e*)。

23. 设$\mathbf{u}=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+u_3\mathbf{e}_3$，且$u_1,u_2,u_3$都属于$C^2(\mathbf{R}_3)$。求出用$(x_1,x_2,x_3)$及$(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$表示curl(curlu)的公式。

§15·3 线积分

设$I=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$，$\mathbf{f}: I\to D\subset V_N$是$I$上的矢函数．如果从$\mathbf{R}_N$的原点出发的有向线段$\overrightarrow{OP}$是f的表示，$P$点在$\mathbf{R}_N$内

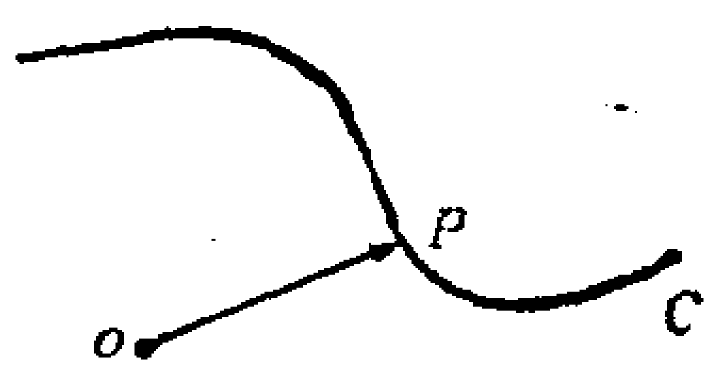


图 15·5

描出一条曲线C（图15·5）．$\overrightarrow{OP}$是$\mathbf{f}$值域D的矢的表示。当$\mathbf{f}$连续且曲线C有有限长度，就说C是可求长的轨道（参看§15·1）．

设$\mathbf{g}$是从C到V_N的连续矢函数。如果上述$\mathbf{f}$是可求长的，那么可以定义$\mathbf{g}$关于$\mathbf{f}$的$(R—S)$积分。为此在V_N中引入坐标系，坐标系是关于V_N的正交基$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$的。记

$$\mathbf{g}(x)=g_1(x)\mathbf{e}_1+g_2(x)\mathbf{e}_2+\cdots+g_N(x)\mathbf{e}_N,\ x\in C,$$

$$\mathbf{f}(t)=f_1(t)\mathbf{e}_1+f_2(t)\mathbf{e}_2+\cdots+f_N(t)\mathbf{e}_N. \qquad (15\cdot26)$$

由$\mathbf{f}$是可求长的，那么函数f_i，$i=1, 2, \cdots, N$是连续的有界变差函数。同样，$\mathbf{g}$是连续的，那么g_i，$i=1, 2, \cdots, N$，是$C\to\mathbf{R}_1$的连续函数。把$g_i[f_1(t), \cdots, f_N(t)]$表示成$g_i[f(t)]$，注意到下列$(R—S)$积分存在：

$$\int_a^b g_i[f(t)]df_i(t), \quad i=1, 2, \cdots, N. \qquad (15\cdot27)$$

现在建立把$(R—S)$积分推广到矢函数$\mathbf{g}$关于矢函数$\mathbf{f}$的一般情况的定理。

定理15·13 设$\mathbf{f}: I\to V_N$，曲线$C\subset\mathbf{R}_N$是由矢径$\overrightarrow{OP}=\mathbf{f}(t)$的$P$点描出的可求长轨道。而$\mathbf{g}$是从$C$到$V_N$内的连续矢场。那么$\exists$数$L$具有如下性质：对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$使对网孔$\|\Delta\|<\delta$的任意划分$\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$，及$\forall\xi_i\in[t_{i-1}, t_i]$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\mathbf{g}[\mathbf{f}(\xi_i)]\cdot[\mathbf{f}(t_i)-\mathbf{f}(t_{i-1})]-L\right|<\varepsilon. \qquad (15\cdot28)$$

数L是唯一的。

证明 于V_N中选取正交基$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$，并按(15·26)写出$\mathbf{g}$及$\mathbf{f}$。令

$$L=\sum_{i=1}^{N}\int_a^b g_i[\mathbf{f}(t)]df_i(t).$$

显然上式右端N个积分都存在，若把每一积分用(R—S)和代替便得(15·28)式成立。

定义 称定理15·13中的L为$\mathbf{g}$关于$\mathbf{f}$的(R—S)积分，并

记为 $L=\int_a^b \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)]d\mathbf{f}(t)$.

例1 设$\mathbf{f}$，$\mathbf{g}$分别为

$$\mathbf{f}(t)=t^2\mathbf{e}_1+2t\mathbf{e}_2-t\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{g}(x)=(x_1^2+x_3)\mathbf{e}_1+x_1x_3\mathbf{e}_2+x_1x_2\mathbf{e}_3. \text{ 求}\int_0^1 \mathbf{g}d\mathbf{f}.$$

解

$$\int_0^1 \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)]\cdot d\mathbf{f}(t)$$

$$=\int_0^1[(t^4-t)\mathbf{e}_1+t^2(-t)\mathbf{e}_2+t^2(2t)\mathbf{e}_3]$$

$$[d(t^2\mathbf{e}_1+2t\mathbf{e}_2-t\mathbf{e}_3)]$$

$$=\int_0^1[(t^4-t)(2t)+t^2(-t)\cdot 2+t^2(2t)(-1)]dt=-\frac{4}{3}.$$

设$I_1=\{t: a_1\leqslant t\leqslant b_1\}$，$I_2=\{t: a_2\leqslant t\leqslant b_2\}$，$C$是$\mathbf{R}_N$中轨道，$\mathbf{f}_1: I_1\to C$及$\mathbf{f}_2: I_2\to C$都是1—1连续映象.由定

理15·1，∃单调连续函数$U: I_1 \to I_2$，使

$$\mathbf{f}_1(t)=\mathbf{f}_2[U(t)],\ t\in I_1. \qquad (15·29)$$

如果C是可求长的而$\mathbf{g}: C\to \mathrm{V}_N$是连续的，那么

$$\int_{a_1}^{b_1}\mathbf{g}[\mathbf{f}_1(t)]d\mathbf{f}_1(t)=\pm\int_{a_2}^{b_2}\mathbf{g}[\mathbf{f}_2(U)]\cdot d\mathbf{f}_2(U),$$

当U递增取正号，当U递减取负号。

设$\mathbf{f}: I\to \mathrm{V}_N$是1－1连续的映象。由$\mathbf{f}$的表示$\overrightarrow{OP}$，矢径$\mathbf{r}(t)=\mathbf{v}(\overrightarrow{OP})$定义了$\mathrm{R}_N$内的弧$C$。

定义 设所有$\mathbf{f}_a: I_a\to \mathrm{V}_N$的集为$\mathscr{A}$，$\mathbf{f}_a$与上述$\mathbf{f}$的值域是同一弧$C$，且使$\mathbf{f}_a(t)=\mathbf{f}[U_a(t)]$的$U_a(t)$总是递增函数。把序偶$(C,\ \mathscr{A})$称为定向弧，仍记为$C$，$\mathscr{A}$内的任一$\mathbf{f}_a$是$C$的参数式。如果联系$\mathbf{f}_a$与$\mathbf{f}$的单调函数$U_a$总是递减的，这时弧的定向与$C$相反，记为$C_-=-C$。不限制$U$的增、减性质的弧$C$称为无向弧。每一无向弧可有两种定向（图15·6），以下说弧C总指定向的。

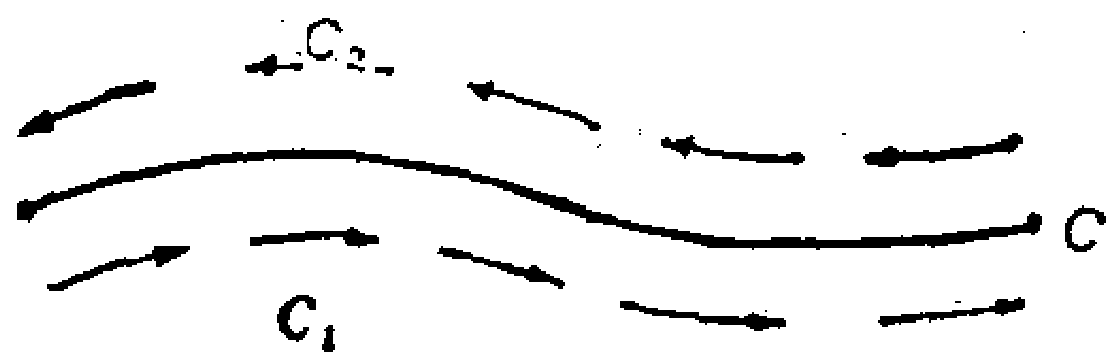


图 15·6

若弧C是可求长的，$\mathbf{g}: C\to V_N$连续，由定理15·13，$\mathbf{g}$关于$\mathbf{f}$的$(R—S)$积分存在。

定义 沿定向弧C的$(R—S)$积分为

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)]\cdot d\mathbf{f}(t), \qquad (15·30)$$

其中$\mathbf{f}$是C的参数式。

容易看出(15·30)积分与C的参数式$\mathbf{f}$的选择无关，并有

$$\int_{C^-} \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = -\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}.$$

一条定向弧可以被分解成定向子弧的并。若划分 $I = \{t : a \leqslant t \leqslant b\}$ 为 $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$，c 的参数式 $\mathbf{f} : I \to V_N$，限制 $\mathbf{f}$ 于子区间 $I_K = \{t : t_{K-1} \leqslant t \leqslant t_K\}$ 上确定的 $f_K : I_K \to V_N$，f_K 所表示的定向弧 C_K，记

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

下面结果由(R—S)积分的基本性质立即得出。

定理15·14

(a)设 C 是可求长的弧，$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$，若 $\mathbf{g}$ 在 C 上连续，那么

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \sum_{K=1}^{n} \int_{C_K} \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}. \tag{15·31}$$

(b)若 C 的表示 $\mathbf{f}$ 分段光滑，$\mathbf{g}$ 在 C 上连续，那么

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{g}[\mathbf{f}(t)]\cdot \mathbf{f}'(t)\,dt. \tag{15·32}$$

(15·32)的右端实际应用来计算沿定向弧的积分。

例2 在 V_3 中取正交基 $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，设

$$\mathbf{g} = 2x_1\mathbf{e}_1 - 3x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3,$$

$C = C_1 + C_2$，C_1 为由(1，0，1)到(2,0,1)的有向线段，而 C_2 为由(2，0,1)到(2,0，4)的有向线段(图15·7).求

$$\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}.$$

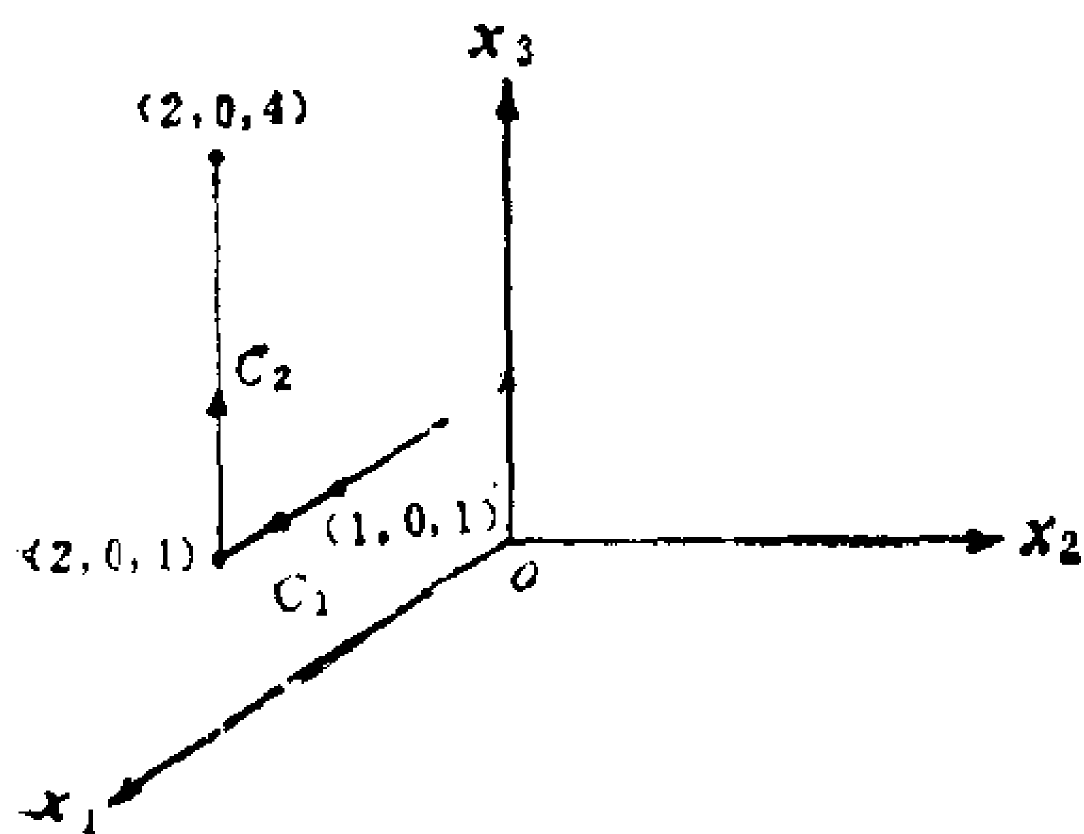


图 15·7

解 $C_1=\{\mathbf{r}:\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3,\ 1\leqslant x_1\leqslant 2\}$

$C_2=\{\mathbf{r}:\mathbf{r}=2\mathbf{e}_1+x_3\mathbf{e}_3,\ 1\leqslant x_3\leqslant 4\}$.

在C_1上有$d\mathbf{r}=(dx_1)\mathbf{e}_1$，而在$C_2$上有$d\mathbf{r}=(dx_3)\mathbf{e}_3$。因此

$$\int_{C_1}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}=\int_1^2 2x_1dx_1=3,\quad \int_{C_2}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}=\int_1^4 x_3dx_3=\frac{15}{2},$$

$$\int_D\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_1}\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}+\int_{C_2}\mathbf{g}d\mathbf{r}=\frac{21}{2}.$$

若函数$\mathbf{g}$在$\mathbf{R}_N$的开集D上连续，那么$\int_C\mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}$将依赖于轨道$C$在$D$内的选取。但确有这样的情况：在$D$内有相同端点的各轨道$C$上积分值相同。这种情况出现时，就说积分与轨道无关。

定理15·15 设u是在开集$D\subset\mathbf{R}_N$上的连续可微的数量函数，$P,Q\in D$。C是分段光滑的轨道，C的参数式$\mathbf{f}$满足：$\forall t\in I=\{t:a\leqslant t\leqslant b\}$，$\mathbf{f}(t)\in D$（指$\mathbf{f}(t)$的表示$\overrightarrow{OP}$的$P\in D$），$\mathbf{f}(a)=P$，$\mathbf{f}(b)=Q$。那么对任意的这样的轨道$C$，都有

$$\int_C\nabla u\cdot d\mathbf{r}=u(Q)-u(P).$$

证明 据定理15·14的(a)，仅对$\mathbf{f}$为光滑的情况证明就够了。定义

$$G(t)=u[\mathbf{f}(t)],\quad t\in I.$$

选取坐标系的正交基为$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$，表示

$$\mathbf{f}(t)=f_1(t)\mathbf{e}_1+f_2(t)\mathbf{e}_2+\cdots+f_N(t)\mathbf{e}_N.$$

用链法则求得

$$G'(t)=\sum_{i=1}^{N}u_{,i}[\mathbf{f}(t)]f_i'(t)=\nabla u[\mathbf{f}(t)]\cdot\mathbf{f}'(t).$$

因此

$$\int_C \nabla u\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b \nabla u[\mathbf{f}(t)]\cdot\mathbf{f}(t)dt=\int_a^b G'(t)dt$$

$$=G(b)-G(a)=u(Q)-u(P).$$

下面给出定理15·15的逆定理。

定理15·16 设D是R_N内的连通开集，$\mathbf{v}: D\to V_N$，是连续的矢场。如果对位于D内的每一光滑弧C，$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$与轨道无关。那么$\exists D$上连续可微的数量场使对$\forall p\in D$，$\nabla u(P)=\mathbf{v}(P)$。

证明 设$\forall P_0\in D$。C是从P_0到P点的一条光滑的弧。定义

$$u(p)=\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r},$$

由定理条件，$u(p)$与$\overrightarrow{C}$的选取无关，$u(p)$在D上有定义。设p_1是D内一点，C_0是p_0到p_1的位于D内的弧，从p_1点加上有向线段L延伸C_0为C_0+L，且使C_0+L为光滑的。并且以a表

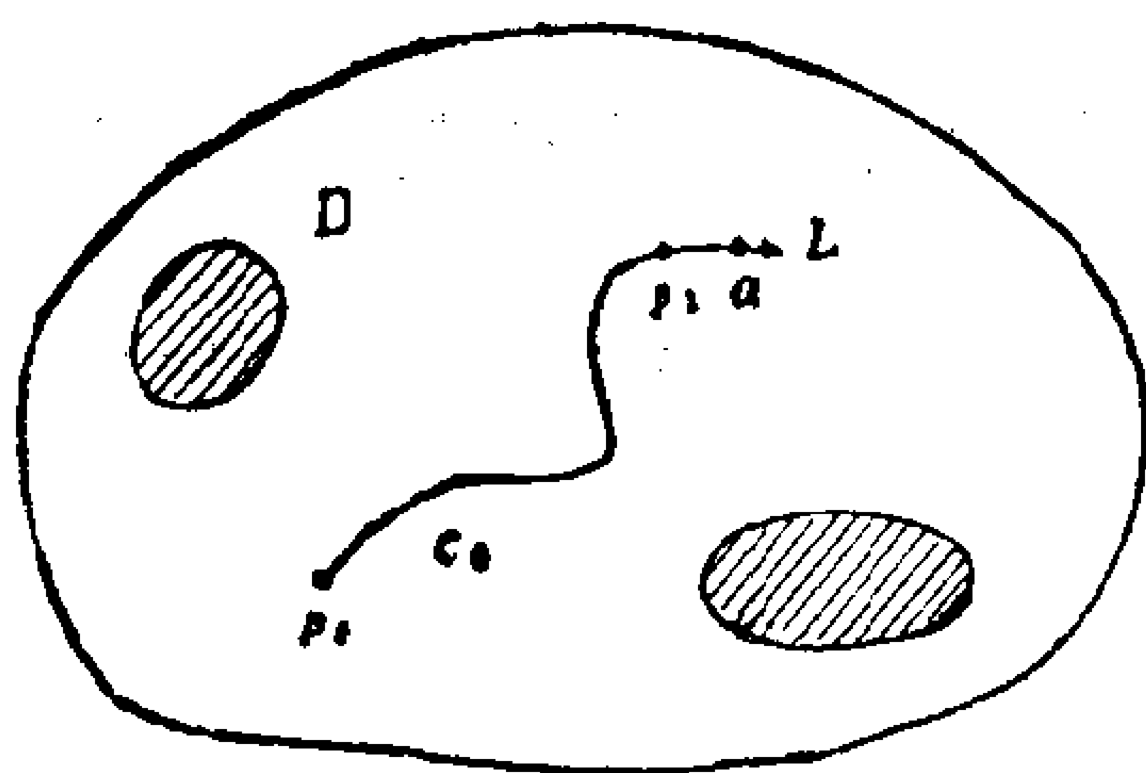


图 15·8

示$\vec{L}$方向的单位矢（图15·8）。于R_N中引入坐标系，以x^0表p_1点坐标，那么L上的任一点q的坐标为$x^0+t\mathbf{a}$，$t\in R_1$。这样一来，当$h>0$，有

$$\frac{1}{h}[u(x^0+h\mathbf{a})-u(x^0)]=\frac{1}{h}\int_{x^0}^{x^0+h\mathbf{a}}\mathbf{v}(t)\cdot\mathbf{a}dt.$$

因而

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}[u(x^0+h\mathbf{a})-u(x^0)]=\mathbf{v}(x^0)\cdot\mathbf{a}$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{h}[u(x^0+h\mathbf{a})-u(x^0)]$$

$$=-\lim_{K\to+0}\frac{1}{K}[u(x^0-K\mathbf{a})-u(x^0)]$$

$$=-\mathbf{v}(x^0)\cdot(-\mathbf{a})=\mathbf{v}(x^0)\cdot\mathbf{a}.$$

由定理15·7可知$\nabla u=\mathbf{v}$在D的任意点x^0成立。

假若u是R_3内光滑的数量场，在上节已经知道当$\mathbf{v}=\nabla u$时，$\text{curl}\,\mathbf{v}=0$。但是逆命题要附加一定条件才可能成立。下面的例子指出$\text{curl}\,\mathbf{v}=0$而$\mathbf{v}$的积分与轨道有关，由定理15·15，$\mathbf{v}$不能是某数量场的梯度。取

$$\mathbf{v}=(x_1^2+x_2^2)^{-1}(-x_2\mathbf{e}_1+x\mathbf{e}_2+o\mathbf{e}_3),$$

$$D=\{(x_1,\ x_2,\ x_3):\frac{1}{2}\leqslant x_1^2+x_2^2\leqslant\frac{3}{2},\ |x_3|<1\}.$$

C: $\mathbf{r}(t)=(\cos t)\mathbf{e}_1+(\sin t)\mathbf{e}_2+o\mathbf{e}_3, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$。那么

$$\int_C=\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

这表明积分$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$与轨道选取有关（否则积分应等于零）。原因在于$C$包围了$\mathbf{v}$的奇异线$x_1=x_2=0$，而定义域$D$却不包含$x_1=x_2=0$的直线。

如果光滑矢场$\mathbf{v}$的定义域不仅是连通的，而且含于D内的闭轨道“不包围$\mathbf{v}$的奇异点”，那么当$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}=0$时，$\mathbf{v}$便是一数量场的梯度。上述的$D$叫作单连通的。

定义 称$\mathbf{R}_N$中连通开集D为单连通的，如果对从$I=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$到$D$内的轨道$\mathbf{f}_0$及$\mathbf{f}_1$且有$\mathbf{f}_0(a)=\mathbf{f}_1(a),\mathbf{f}_0(b)=\mathbf{f}_1(b)$时，都$\exists$函数$\mathbf{f}(t,s)$，$\mathbf{f}(t,s)$是从矩形$\{(t,s): a\leqslant t\leqslant b,\ 0\leqslant s\leqslant 1\}$到$D$内连续的函数$\mathbf{f}$，满足：

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{f}(t,0)=\mathbf{f}_0(t),\\&\mathbf{f}(t,1)=\mathbf{f}_1(t),\\&\mathbf{f}(a,s)=\mathbf{f}_0(a)=\mathbf{f}_1(a)\\&\mathbf{f}(b,s)=\mathbf{f}_0(b)=\mathbf{f}_1(b)\ \ (s\in[0,1]).\end{aligned}\right\}\qquad(15\cdot33)$$

换句话说，D称为单连通的是指D内任何两条端点相同的轨道，可以不离开D由其中一条连续变形为另一条。（图15·9）



图 15·9

$\mathbf{R}_1$中的单连通的开集是单一的开区间；$\mathbf{R}_2$中的单连通开集有平面，及一条闭光滑曲线围起来的内部等；$\mathbf{R}_3$中单连通开集有整个空间、光滑封闭曲面的内部等，更高维的单连通开集难以直观的说明。通常把连通开集称为$\mathbf{R}_N$中的区

域，或更简单地称为域（请与数域相区别）。

下面引理指出，用来把单连通域内一条轨道连续变形为另一条轨道的$\mathbf{f}(t,s)$，可以要求它有一定光滑性质。这一引理的证明请参看本节习题17中所给出的提示。

引理15·4 设D是$\mathbf{R}_N$内一单连通区域，$\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1$是$I\to D$内的光滑轨道，$I=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$，且$\mathbf{f}_0(a)=\mathbf{f}_1(a)$，$\mathbf{f}_0(b)=\mathbf{f}_1(b)$。那么$\exists R=\{(t,s): a\leqslant t\leqslant b,\ 0\leqslant s\leqslant 1\}$上的连续函数$\mathbf{f}(t,s)$满足(15·33)所列的条件且(i)$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{f})$在$R$内连续；(ii)$\exists$充分大的$n$，对$\forall t\in I$，$\mathbf{f}$关于$S$在区间$J_i=\{s: \frac{i-1}{n}\leqslant s\leqslant\frac{i}{n}\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$上是线性的，且$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s}$，$\frac{\partial^2\mathbf{f}}{\partial t\partial s}$在每个矩形$I\times J_i$上一致连续。

定理15.17 设$\mathbf{v}$是$\mathbf{R}_3$内单连通域D上的连续可微矢场，且在D上$\operatorname{curl}\mathbf{v}=0$。那么$\exists D$上的连续可微的数量场$u$满足$\mathbf{v}=\nabla u$。

证明 仅需证明$\int_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$与轨道无关，为此设$p$，$q\in D$，而$\mathbf{f}_0,\mathbf{f}_1$表示$D$内联结$p$，$q$的两条光滑轨道$C_0$，$C_1$且$\mathbf{f}_0(a)=f^1(a)=p$，$\mathbf{f}_0(b)=\mathbf{f}_1(b)=q$。选取以$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$为正交基的坐标系表示$\mathbf{v}$，$\mathbf{v}=v_1\mathbf{e}_1+v_2\mathbf{e}_2+v_3\mathbf{e}_3$。由引理15·4，$\exists\mathbf{f}(t,s)=f_1\mathbf{e}_1+f_2\mathbf{e}_2+f_3\mathbf{e}_3$，$\mathbf{f}(t,s)$对$t$可微，对$s$分段线性且满足(15·33)。定义函数

$$\varphi(s)=\int_a^b\left[v_1(\mathbf{f})\frac{\partial f_1}{\partial t}+v_2(\mathbf{f})\frac{\partial f_2}{\partial t}+v_3(\mathbf{f})\frac{\partial t_3}{\partial t}\right]dt.$$

由(15·33)诸等式导出

$$\varphi(0)=\int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{f}_0)\cdot\mathbf{f}_0' dt=\int_{\vec{C}_1}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$$

$$\varphi(1)=\int_a^b \mathbf{v}(\mathbf{f}_1)\cdot\mathbf{f}_1' dt=\int_{\vec{C}_2}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

将证明 $\varphi'(s)\equiv 0$，因而导出所要证明的积分与轨道无关。由v，f，$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}$的连续性，所以 $\varphi(s)$在$s\in J=\{s:0\leqslant s\leqslant 1\}$是连续的，而在每一子区间 $J_i=\{S:\left(\frac{1}{n}\right)(i-1)\leqslant S\leqslant\left(\frac{1}{n}\right)i\}$上$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial s}$及$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t\partial s}$是一致连续的，因此可以在积分号下求导而得

$$\varphi'(s)=\int_a^b\left[\sum_{i=1}^3\left\{v_i(\mathbf{f})\frac{\partial^2 \mathbf{f}_i}{\partial s\partial t}+\sum_{i=1}^3 v_{i,j}(\mathbf{f})\frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial s}\right\}\right]dt,$$

$\frac{i-1}{n}\leqslant s\leqslant\frac{i}{n}$. 对含有 $\frac{\partial^2 f_i}{\partial t\partial s}$的项用部分积分法，得

$$\varphi'(s)=\sum_{i=1}^3\left\{[v_i[f(b,s)]\frac{\partial f_i(b,s)}{\partial s}-v_i[f(a,s)]\frac{\partial f_i(a,s)}{\partial s}\right\}+\int_a^b\left\{\sum_{i;j=1}^3\left(v_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial s}-v_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial s}\frac{\partial f_j}{\partial t}\right)\right\}dt. \qquad (15\cdot34)$$

既然$f(a,s)$及$f(b,s)$都是与s无关的，那么应有$\frac{\partial f_i(a,s)}{\partial s}=\frac{\partial f_i(b,s)}{\partial s}=0$，$i=1,2$，3.因此(15·34)中第一个和等于零。

这样便有

$$\varphi'(s)=\int_a^b\sum_{i;j=1}^{3}\left(v_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial t}-v_{i,j}\frac{\partial f_i}{\partial s}\frac{\partial f_j}{\partial t}\right)dt$$

$$=\int_a^b\sum_{i;j=1}^{3}(v_{i;j}-v_{j;i})\frac{\partial f_i}{\partial t}\frac{\partial f_j}{\partial s}dt.$$

由$\operatorname{curl} v=0$，即$v_{i;j}-v_{j;i}\equiv 0$，（i，$j=1$，2，3），得$\varphi'(s)\equiv 0$。

注 容易推广定理15·17到V是从V_N到V_N的函数的情况，只要把$\operatorname{curl} V=0$换成条件：

$$v_{i;j}-v_{j;i}=0,\quad i,j=1,2,\cdots,N.$$

这里$V=v_1e_1+v_2e_2+\cdots+v_Ne_N$，当$D$是单连通区域时$V$是一数量场$u$的梯度.

为了运用定理15·17，要求建立区域的单连通性的充分性条件，读者不难证明下面的结果.

定理15·18

(a) 若D是R_N中的凸区域，那么D是单连通的。

(b) 设h是R_N内域D上到另一域D_1上的1—1的连续映象，当D是单连通域时，则D_1也是单连通域。

习 题

习题1—8中假设g从R_N内域D到V_N的连续矢场，e_1，

$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$构成坐标系的正交基，计算

$$\int_C \mathbf{g}\cdot d\mathbf{r}.$$

1．$\mathbf{g}=x_1x_3\mathbf{e}_1-x_2\mathbf{e}_2+x_1\mathbf{e}_3$；$C$是从（0，0，0）点到(1，1，1）点的有向线段。

2．$\mathbf{g}=x_1x_3\mathbf{e}_1-x_2\mathbf{e}_2+x_1\mathbf{e}_3$，$C$：$f(t)=t\mathbf{e}_1+t^2\mathbf{e}_2+t^3\mathbf{e}_3$，$t\in[0,1]$，$t$从0到1。

3．$\mathbf{g}=-x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2-x_3\mathbf{e}_3$；$C$：$\mathbf{f}(t)=(\cos t)\mathbf{e}_1+(\sin t)\mathbf{e}_2+\dfrac{t}{\pi}\mathbf{e}_3$，$t\in[0,2\pi]$，$t$从0到$2\pi$。

4．$\mathbf{g}=-x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2-x_3\mathbf{e}_3$；$C$是从（1,0,0)到(1，0，2)的定向线段。

5．$\mathbf{g}=x_1^2\mathbf{e}_1+x_1x_2\mathbf{e}_2+0\mathbf{e}_3$；$C=\{(x_1,x_2,x_3):x_2=x_1^2,\ x_3=0,\ 0\leqslant x_1\leqslant 1$，从(0，0，0)到(1，1，0)$\}$。

6．$\mathbf{g}=2x_2x_3\mathbf{e}_2+(x_3^2-x_2^2)\mathbf{e}_3$；$C$是圆弧：$x_1=0$，$x_2^2+x_3^2=4$，从（0，2，0)到（0，0，2）。

7．$\mathbf{g}=x_1x_4\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2-x_2x_4\mathbf{e}_3+x_3\mathbf{e}_4$；$C$是从(0,0,0,0)到（$a_1$，$a_2$，$a_3$，$a_4$)的定向直线段。

8．$\mathbf{g}=\sum\limits_{i=1}^{N}x_i^2\mathbf{e}_i$；$C$是定向直线段为$\mathbf{f}(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}a_it\mathbf{e}_i$，$a_i$是常数，$t\in[0,1]$，$t$从0到1。

9．$\mathbf{R}_4$内定义的数量函数$u(x)=x_1^2+2x_2^2-x_3^2+x_4$。

C_1：从(0，0，0，0）到（1，1，1，1）的定向直线段。

C_2：从(0，0，0，0)到(1，0，0，0)接下从(1,0,0,0)到(1，1，1，1)的定向直线段。通过计算沿C_1，C_2的积分$\int_C \nabla u \cdot d\mathbf{r}$验证积分$\int_C \nabla u \cdot d\mathbf{r}$与轨道无关。

10. 设$\mathbf{R}_N$内定义的数量函数$u(x)=\sum_{i=1}^{N} x_i^2$，$C_1$：从(0,0,…，0)到(1，1，…，1)的定向直线段；

C_2：$\mathbf{f}(t)=t^2\mathbf{e}_1+\sum_{i=2}^{N} t\mathbf{e}_i$，$0\leqslant t\leqslant 1$；计算$\int_{\vec{C}} \nabla u \cdot d\mathbf{r}$沿$C_1$及沿$C_2$的值，验证积分与轨道无关。

11. 设$\mathbf{R}_2$内给出矢场$\mathbf{v}=(x_1^2+x_2^2)^{-1}(-x_2\mathbf{e}_1+x_1\mathbf{e}_2)$，$C$为定向弧$\mathbf{f}(t)=(\cos t)\mathbf{e}_1+(\sin t)\mathbf{e}_2$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$。用定理15·17证明$\mathbf{R}_2$去掉原点后不再是单连通的。

12. 证明定理15·18

13. (*a*) 证明$\mathbf{R}_2$的半平面是凸集。

(*b*) 证明$\mathbf{R}_N$中由$x_N\geqslant 0$给出的半空间是凸的。

14. 证明$\mathbf{R}_2$内的集$S=\{(x_1, x_2): x_1\geqslant 0, -\pi\leqslant x_2\leqslant \pi\}$是凸集。

15. 设$I=\{x_1: a\leqslant x_1\leqslant b\}$，$f: I\to\mathbf{R}_1$是连续的正值函数，证明集$S=\{(x_1, x_2): a<x_1<b, 0<x_2<f(x_1)\}$是$\mathbf{R}_2$中的单连通集。

16. 平面上的圆绕与它不相交的轴旋转得到一环面。环面内部为集：$S=\{(x_1, x_2, x_3): (\sqrt{x_1^2+x_2^2}-b)^2+$

$x_3^2 < a^2\}$，试用习题11的方法证明S是非单连通集（图15·10）。

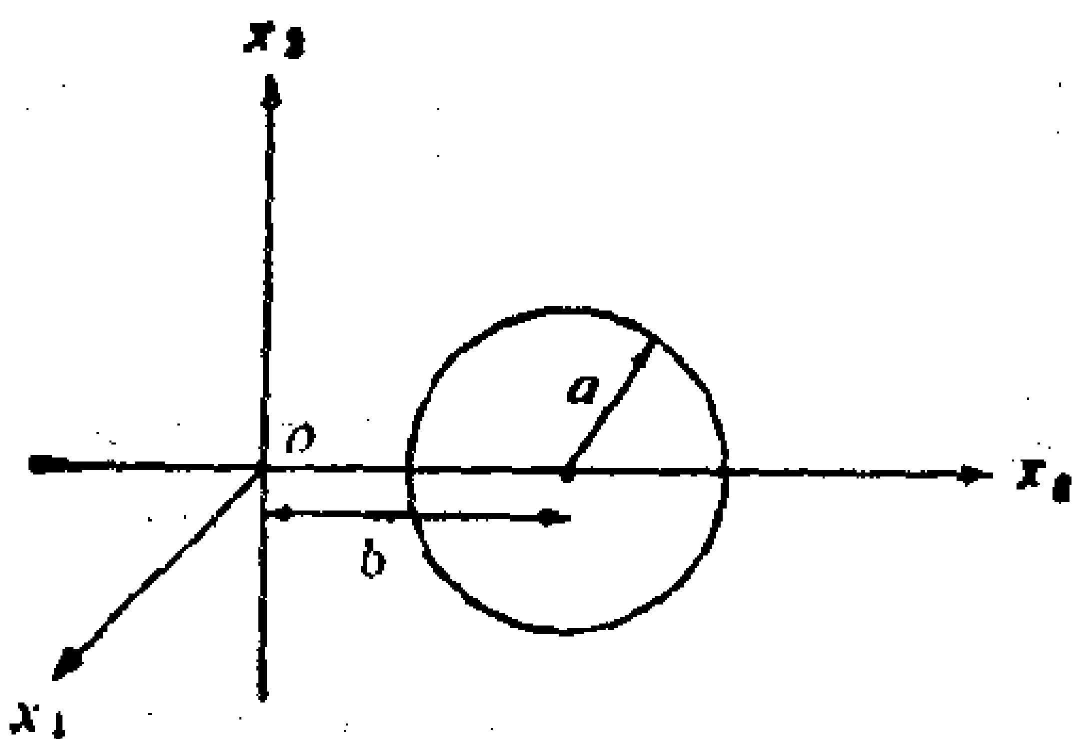


图 15·10

17. 用下列步骤证明引理15·4

(a) 设$f^*(t, s)$是满足单连通域定义的条件(15·33)的在$R = \{(t, s): a \leqslant t \leqslant b,\ 0 \leqslant s \leqslant 1\}$上连续的函数。证明$\exists \rho > 0$，对所有$(t, s) \in R$，使$f^*(t, s)$为中心$\rho$为半径的球都含于$D$内。

(b) 定义序列$\{g_{ni}\}$ $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, $n = 1, 2, \cdots$，满足$g_{n0}(t) = f^*(t, 0) = f_0(t)$，$g_{nn}(t) = f^*(t, 1) = f_1(t)$，且当$1 \leqslant i \leqslant n-1$，我们令$g^*_{ni}(t)$为满足

$$\left|g^*_{ni}(t) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right)\right| < \frac{\rho}{8},\quad t \in [a, b].$$

定义$g_{ni}(t) = g^*_{ni}(t) - l_{ni}(t)$，这里$l_{ni}$是线性函数在$t = a$，$t = b$时与$g^*_{ni}(t) - f^*\left(t, \frac{i}{n}\right)$重合，证明在

$t \in [a, b]$，$|l_{ni}(t)| < \frac{\rho}{8}$，且

$$\left|g_{ni}(t)-f^*\left(t,\ \frac{i}{n}\right)\right|<\frac{\rho}{4},\quad t\in[a,\ b],\ 0\leqslant i\leqslant n.$$

(c) 证明∃充分大的n，当$|s_1-s_2|<\frac{1}{n}$

$$|f^*(t,\ s_1)-f^*(t,\ s_2|)<\frac{\rho}{4}.$$

(d) 以(c)所选取的n，定义

$$f(t,s)=(i-ns)g_{n\,i-1}(t)+(ns-i+1)g_{ni}(t),$$

$$t\in[a,\ b],\ \frac{i-1}{n}\leqslant s\leqslant\frac{i}{n},\ i=1,\ 2,\ \cdots,n.$$

证明f，$\frac{\partial f}{\partial t}$在$R$上连续并注意f在$\frac{i-1}{n}\leqslant s\leqslant\frac{i}{n}$上是线性函数，$f\left(t,\ \frac{i-1}{n}\right)=g_{n\,i-1}(t)$，$f(t,\frac{i}{n})=g_{ni}(t)$。

(e) 通过不等式

$$\left|f(t,s)-f^*\left(t,\ \frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\left|f(t,\ s)-g_{ni}(t)\right|$$

$$+\left|g_{ni}(t)-f^*\left(t,\ \frac{i}{n}\right)\right|\leqslant\left|g_{n\,i-1}(t)-g_{ni}(t)\right|+\frac{\rho}{4}$$

$$\leqslant\left|g_{n\,i-1}(t)-f^*\left(t,\frac{i-1}{n}\right)\right|+\left|f^*\left(t\ \frac{i-1}{n}\right)\right.$$

$$\left.-f^*\left(t,\ \frac{i}{n}\right)\right|+\left|f^*\left(t,\frac{i}{n}\right)-g_{n\,i}(t)\right|+\frac{\rho}{4},$$

证明 $\left|f(t,s)-f^*\left(t,\frac{i}{n}\right)\right|<\rho \quad s\in\left[\frac{i-1}{n},\ \frac{i}{n}\right]$,

得对所有 $(t,\ s)\in R$, $f(t,\ s)\in D$.

§15·4 格林定理

设$I=\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$, $f: I\to R_1$是I上连续可微函数. 微积分基本定理指出

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a) \tag{15·35}$$

这一定理能推广为R_2、R_3、R_N中的定理. 本节研究最简单的情形, 把(15·35)右端换成R_2内图形F上的二重积分, 左端换成沿F边界的线积分.

定义 设$I=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$, $f: I\to V_N$是轨道, f表示R_N内的曲线C. 如果$f(a)=f(b)$称f是一闭轨道. 对$t_1, t_2\in(a, b)$, 当且仅当$t_1=t_2$有$f(t_1)=f(t_2)$时, 称闭轨道是简单的闭轨道. 当f是简单闭轨道, f表示的曲线C称为简单闭曲线或约当闭曲线.

下面定理是把定理15·1推广到简单闭曲线的情况.

定理15·19 设$I=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$，$J=\{t: c\leqslant t\leqslant d\}$，$f: I\to V_N$，$g: J\to V_N$，f，g的值域是同一条简单闭曲线。

(a) 若$f(a)=f(b)=g(c)=g(d)$，那么∃单调连续函数$U: I\to J$，使$f(t)=g[U(t)]$，$t\in I$。当U是递增的，有$U(a)=c$，$U(b)=d$；当U是递减的，有$U(a)=d$，$U(b)=C$。

(b) 若f是可求长的，那么g是可求长的，并且轨道g与轨道f的长度相等。

证明

(a) 设给定$\varepsilon>0$，定义$I_\varepsilon=\{t: a+\varepsilon\leqslant t\leqslant b-\varepsilon\}$。那么把f限制于$I_\varepsilon$上，其值域为弧$C_\varepsilon$。这一弧$C_\varepsilon$也是g限制于$J$的子区间$J_\delta$上的值域。据定理15·1，∃函数$U_\varepsilon: I_\varepsilon\to J_\delta$，$U_\varepsilon$在$I_\varepsilon$上连续单调，使$f(t)=g[U_\varepsilon(t)]$，$t\in I_\varepsilon$。让$\varepsilon\to 0$得到函数$U$，$U$是从$I'=\{t: a<t<b\}$到$J'=\{t: c<t>d\}$的映象，$U$是$U_\varepsilon$的极限，当$U$是递增的，定义$U(a)=c$，$U(b)=d$，当$U$递减时，$U(a)=d$，$U(b)=c$。这样得到的$U$将从$I$到$J$单调函数。

读者可参照定理15·3完成(b)的证明。

$f: I\to V_N$及$g: J\to V_N$的值域是同一条简单闭曲线C，可能出现$g(c)=g(d)=f(\beta)$，而β是I的内点的情况。下面推论证明：如果把f按周期性延拓，可得与定理15·19(a)同样的结果。

推论 假若把定理15·19的f的定义按公式$f(t)=f[t+(b-a)]$，$a\leqslant t\leqslant b$，由I推广到区间$I_1=\{t: a\leqslant t\leqslant b+(b-a)\}$。如果对于某$\alpha$，$0\leqslant\alpha\leqslant(b-a)$。有$g(c)=g(d)=f(a+\alpha)=f(b+\alpha)$。定义$f_\alpha(t)=f(t+\alpha)$，$t\in I$。那么有与定理

15·19 (a) 中U那样的U_α，使得

$$\mathbf{f}_\alpha(t)=\mathbf{g}[U_\alpha(t)],\quad t\in I.$$

假若$\mathbf{f}_\alpha$，$\mathbf{g}$如定理15·19推论所述，它们都以可求长简单闭曲线C为值域。设$F: C\to V_N$是C上的连续函数，那么

$$\int_a^b F[\mathbf{f}_\alpha(t)]\,d\mathbf{f}_\alpha(t)=\pm\int_c^d F[\mathbf{g}(s)]\,d\mathbf{g}(s)$$

当U_α为递增时取正号；U_α为递减时取负号。上述公式与定理15·3关于可求长弧的证明类似。

类似于曲线定向，有简单闭曲线的定向。

定义 设$\mathbf{f}: I\to V_N$以简单闭曲线$C\subset \mathbf{R}_N$为其值域。一定向简单闭曲线是一序偶(c, $\mathscr{A}$)，这里$\mathscr{A}$表示以C为值域的矢函数$\mathbf{f}$的类，类中矢函数$\mathbf{f}_\beta$与$\mathbf{f}$之间以定理15·19推论中递增的U_β联系着。称类中任一$\mathbf{f}_\beta$为(c, $\mathscr{A}$)的参数式。(C,a)简记为C。C可能有两种定向，据U_β是递增或递减而定，分别以C及C_-来记，$C=-C_-$。

假设$\mathbf{f}: I\to V_N$是C的参数式，分解$I=\{t: a\leqslant t\leqslant b\}$为子区间$I_K=\{t: t_{K-1}\leqslant t\leqslant t_K\}$，$K=1, 2, \cdots n$，$t_0=a$，$t_n=b$。记$\mathbf{f}$限制于$I_K$上为$\mathbf{f}_K$。那么定向弧$C_K$是$\mathbf{f}_K$的值域，记$C=C_1+C_2+\cdots+C_n$，如同定理15·14，在$C$上的积分可分解为在$C_K$上的积分之和。

设D是$\mathbf{R}_2$内以简单闭曲线为边界的区域。以$|\partial D|$表示未定向边界，∂D表示逆时针定向边界，$-\partial D$表示顺时针定向边界。

首先对$\mathbf{R}_2$平面中的特殊区域建立格林定理，然后证明定理对更一般的域也成立。

设D是$\mathbf{R}_2$内的区域，$\mathbf{v}: D\to V_2$是给定矢函数。在V_2中引入以$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$为正交基的坐标系。相应于基的两种定向：$\mathbf{e}_2$由$\mathbf{e}_1$逆时针旋转$\frac{\pi}{2}$或由$\mathbf{e}_1$顺时针旋转$\frac{\pi}{2}$得到，给予平面这两种定向分别为$\mathbf{R}_2$，$-\mathbf{R}_2$，如图15·11所示，通常研究$\mathbf{R}_2$总指是正定向的。

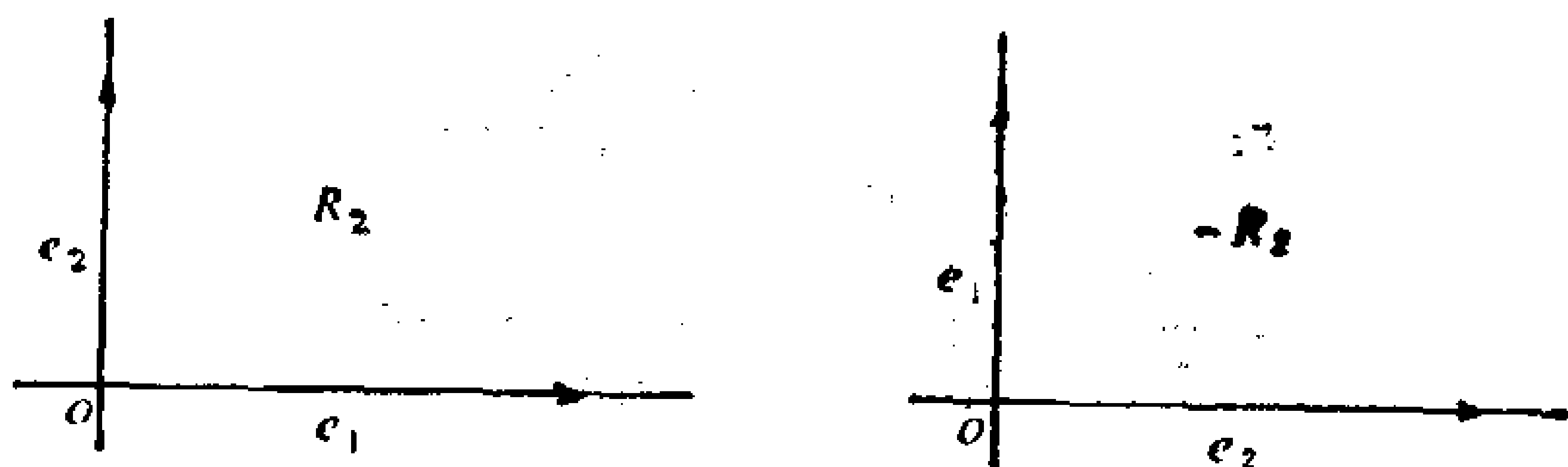


图 15·11

在$\mathbf{R}_2$中，设$\mathbf{v}=p(x_1, x_2)\mathbf{e}_1+q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$，$p$，$q$都是$D$上的数量函数。这时$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}$完全由函数$q_{,1}-p_{,2}$所确定。事实上，在$\mathbf{R}_3$中

$$\mathbf{v}=p\mathbf{e}_1+q\mathbf{e}_2+o\mathbf{e}_3,$$

按§15·1中$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}$的定义及（15·22）式

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}=(q_{,1}-p_{,2})\,\mathbf{e}_3,$$

可见$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}$完全由$q_{,1}-p_{,2}$所确定。在$\mathbf{R}_2$中的$\mathbf{v}\in V_2$的情况下，采取$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}=q_{,1}-p_{,2}$。

引理15·5　设f是$I=\{x_1: a\leqslant x_1\leqslant b\}$上的连续可微的函数，$c$是一常数，对$x_1\in I$，$f(x_1)>c$。定义$D=\{(x_1, x_2): a\leqslant x_1\leqslant b,\ c\leqslant x_2\leqslant f(x_1)\}$（图15·12），而$G$是包含$\overline{D}$的区域，$G\subset\mathbf{R}_2$，$\mathbf{v}: G\to V_2(\mathbf{R}_2)$是连续可微的矢函数。

那么

$$\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{A} = \int_{\partial} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}, \tag{15·36}$$

其中∂D按逆时针定向

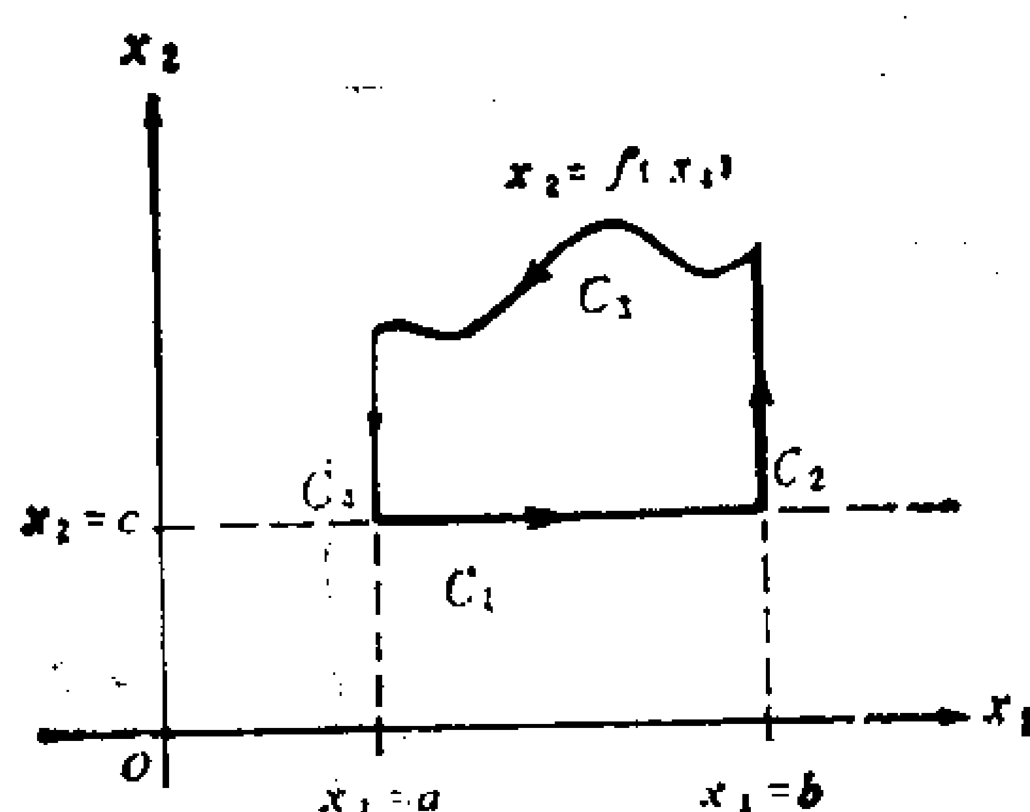


图 15·12

证明 记$\mathbf{v}(x_1, x_2) = p(x_1, x_2)\mathbf{e}_1 + q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$，证明函数$p(x_1, x_2)\mathbf{e}_1$及$q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$分别满足（15·36）。令$\mathbf{v}_1 = p\mathbf{e}_1$，有

$$\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}_1 dA = -\int_D p_{,2}(x_1, x_2)dA =$$

$$-\int_a^b \{p(x_1, f(x_1)) - p(x_1, c)\}dx_1.$$

如图15·12所示：$\partial D = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$，那么上式右端

$$-\int_a^b \{p(x_1, f(x_1))\}dx_1 = \int_{C_3} pdx_1, \int_a^b p(x_1, c)dx_1$$

$$= \int_{D_1} pdx_1,$$ 于是

$$\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}_1 dA=\int_{C_3} p dx_1+\int_{C_1} p dx_1 .$$

x_1沿C_2，C_4是常数，因而$\int_{C_2} p dx_1=\int_{C_4} p dx_1=0$。这样得到

$$\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}_1 dA=\int_{\sum_{i=1}^{4} C_i} p dx_1=\int_{\partial D} p dx_1 . \tag{15·37}$$

再令$\mathbf{v}_2=q\mathbf{e}_2$，且定义

$$U(x_1,x_2)=\int_C^{x_2} q(x_1,\ \eta)d\eta .$$

那么

$$U_{,1}(x_1,x_2)=\int_C^{x_2} q_{,1}(x_1,\eta)d\eta ,$$

$$U_{,2}(x_1,x_2)=q(x_1,x_2).$$

$$U_{,1,2}=U_{,2,1}=q_{,1}.$$

因为U在G内 光滑，而∂D是闭曲线，据定理15·15有

$$\int_{\partial D}(U_{,1}dx_1+U_{,2}dx_2)=\int_{\partial D}U_{,1}dx_1+$$

$$\int_{\partial D}q dx_2=0. \tag{15·38}$$

把公式（15·37）中的p换成$U_{,1}$可 得

$$\int_{\partial D}U_{,1}dx_1=-\int_D U_{,1,2}dA=-\int_D q_{,1}\,dA$$

$$= -\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}_2 dA.$$

再据（15•38）便得

$$\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}_2 dA = \int_{\partial D} q dx_2. \tag{15•39}$$

把（15•38）与（15•39）相加便得

$$\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v} dA = \int_{\partial D} (p dx_1 + q dx_2) = \int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}.$$

定理获证。

定义 设C_1与C_2是仅有一公共点p的两条光滑弧，且p是C_1，C_2各自的一个端点。若C_1，C_2在p点存在单边切线，且两切线夹角不为零，就称p点是C_1与C_2的隅角（图15•13）。称有限条光滑弧联结隅角形成的简单闭曲线为分段光滑简单闭曲线。

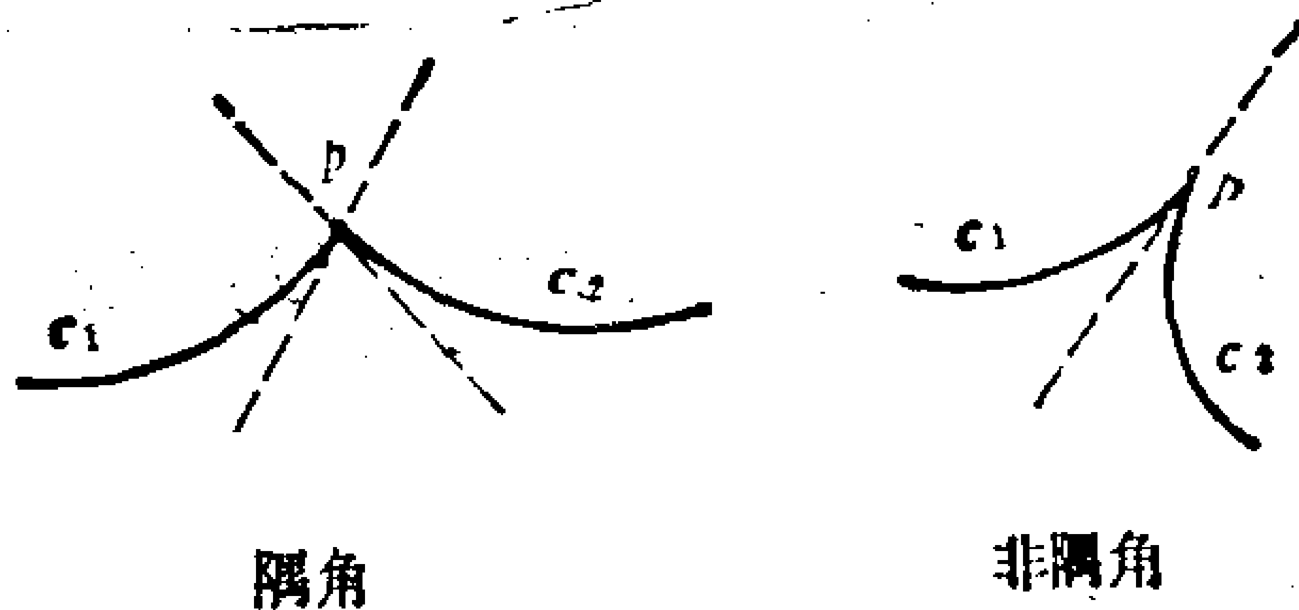


图 15·13

注 在引理15·5中，设f为I上分段光滑的函数，∂D便是分段光滑简单闭曲线，引理的证明仍然有效。

定义 R_2内一区域称为正规的，当且仅当(i)D是有界

的；(ii)D的边界∂D是由有限条分段光滑简单闭曲线组成的；(iii)$\forall p\in\partial D$，$\exists$以p点为原点的笛卡尔坐标系及正数a，b，使∂D在矩形$R=\{(x_1,x_2):|x_1|\leqslant a,|x_2|<b\}$内的部分可以表示为$x_2=f_p(x_1),x_1\in I=\{x_1:|x_1|\leqslant a\}$，$f_p$是$I$上分段光滑函数，且其值域含于$J=\{x_2:|x_2|\leqslant b\}$（图15·14）．

定义中的数a，b及f一般是因点p而异的．对于固定点p找到了合乎要求的a，b，当然比a，b更小的正数仍符合要求．图15·15是非正规区域的示意图．

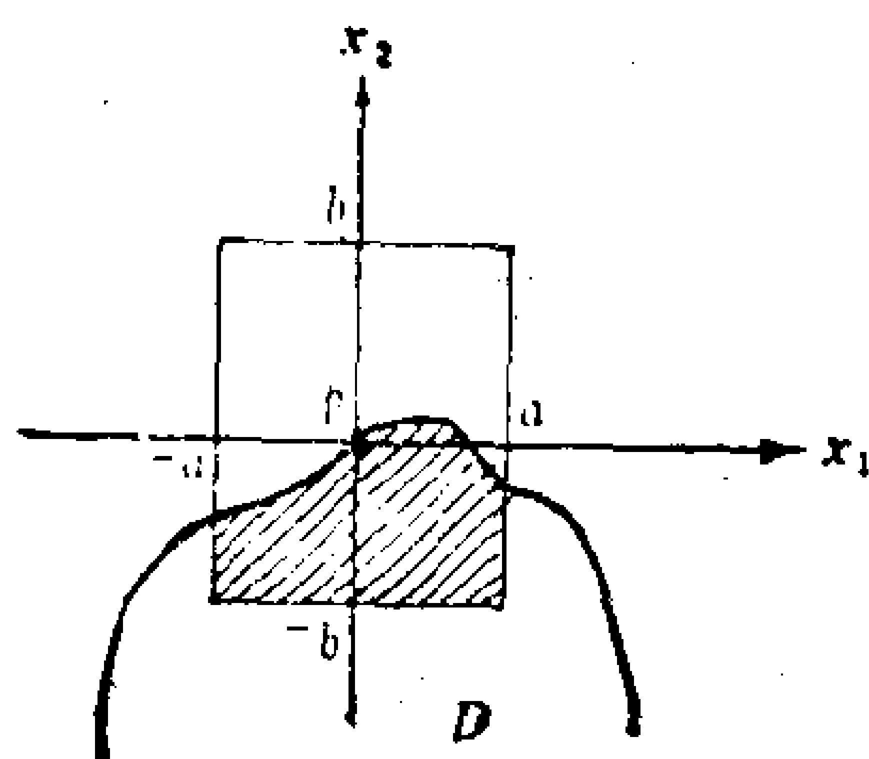


图 15·14

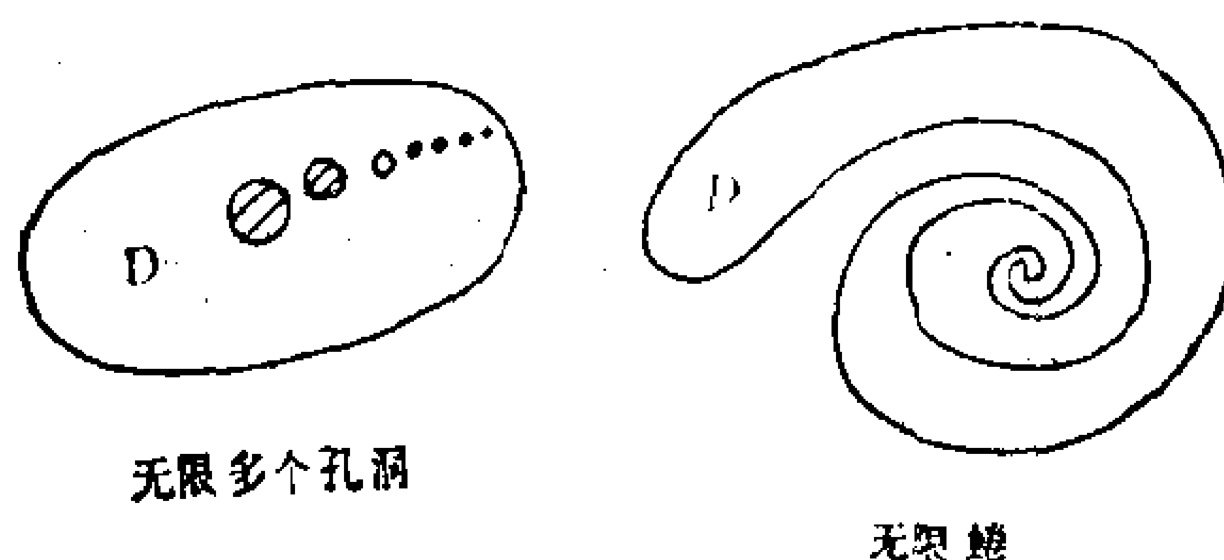


图 15·15

设D是R_2内的一正规区域，p是D的边界∂D上的任意的一个非隅角点．T是∂D在p点的切矢，在R_2内建立一坐标系使e_1与T同向平行，那么∂D在p点可能取分别使e_2指向D内或D外的两种定向，前者说∂D使D在∂D左的定向；后者说∂D使D在∂D右的定向．取定一∂D定向使逐段光滑闭曲线∂D所围的区域D常在∂D之左或常在∂D之右（即沿∂D定向行走D常在左或常在右）．

定理15·20（R_2内的格林定理）　设D是R_2内的一正规区域．G是R_2内包含$\overline{D}$的区域，$v:G\to V_2(R_2)$是G上连续可

微的矢函数。假定∂D是使D在其左边的定向，$\partial D=C_1+C_2+\cdots+C_K$，$C_i$是光滑弧。那么

$$\int_D \text{curl}\,\mathbf{v}\,dA=\sum_{i=1}^{K}\int_{C_i}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\partial D}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}. \qquad (15\cdot 40)$$

证明 利用D的正规性，将D分解成若干小区域，使在每一小区域上能用引理15•5。

对$\forall P\in\partial D$，按正规区域定义存在相应的矩形R_p及f_p。而对于$P\in D$，则取一邻边平行于坐标轴、以P为中心的开矩形R_p，且$\overline{R}_p\subset D$。因为$\overline{D}$是紧集，开矩形族$\{R_p: P\in\overline{D}\}$覆盖了$\overline{D}$，存在其中有限个矩形$R_p$也覆盖$\overline{D}$，以$S_1$，$S_2$，…，$S_n$表示这有限个开矩形，按照§13•3，可以找到$C^\infty(G_0)$类的平滑函数，$\psi_1$，$\psi_2$，…$\psi_n$，这里$G_0$是含有$\overline{D}$的开集，$F_i$是$S_i$内紧子集，$\psi_i$在$(G_0-F_i)$内等于零，对于$\forall P\in G_0$，$\psi_1$，…，$\psi_n$中至少有一在$P$点取正值。现在定义$G_0$上的函数

$$\varphi_i(P)=\frac{\psi_i(P)}{\sum_{i=1}^{n}\psi_i(P)},$$

$\varphi_i\in C^\infty(G_0)$且对$\forall P\in G_0$，有$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(P)\equiv 1$，函数$\varphi_i(P)$称为单位分解（参看§13•3习题2，及本节习题14）。定义

$$\mathbf{v}_i = \varphi_i \mathbf{v}, \qquad i=1, 2, \cdots, n.$$

每一$\mathbf{v}_i$是G_0上连续可微矢函数，且

$$\mathbf{v} = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i\right)\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i.$$

这样一来，只要对每一$\mathbf{v}_i$证明（15・40）成立就行了。若$\overline{S}_i \subset D$，因为在∂D的每一点$\mathbf{v}_i$是零，有

$$\int_{\partial D} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

又因为在F_i之外$\mathbf{v}_i \equiv 0$，而∂S_i与F_i不相交，据引理15•5，有

$$\int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_i dA = \int_{S_i} \operatorname{curl} \mathbf{v}_i dA = \int_{\overrightarrow{\partial S_i}} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

最后，当S_i是与边界∂D相交的矩形，令$D_i = D \cap S_i$，而$C_i = \partial D \cap S_i$。那么由在（$\partial D - C_i$）上及在（$D - D_i$）上$\mathbf{v}_i = 0$，据引理15•5导出

$$\int_{\partial D} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_i} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D_i} \mathbf{v}_i \cdot d\mathbf{r} = \int_{D_i} \operatorname{curl} \mathbf{v}_i dA$$

$$= \int_D \operatorname{curl} \mathbf{v}_i dA, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

把上面等式对i求和便得

$$\int_{\partial D} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_D \operatorname{curl} \mathbf{v} dA.$$

若$\mathbf{v}=P(x_1, x_2)\mathbf{e}_1+Q(x_1, x_2)\mathbf{e}_2$，(15·40)式用坐标的术语表示成如下形式的格林定理。

推论 设区域G包含正规区域D，P，Q是G上光滑函数，那么

$$\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dA=\oint_{\partial D}(Pdx_1+Qdx_2), \quad (15\cdot41)$$

这里线积分是逆时针方向取的。

例1 设$K=\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2<1\}$.用格林定理计算

$$\int_{\partial K}[(2x_1-x_2^3)dx_1+(x_1^3+3x_2^2)dx_2].$$

解 $P=2x_1-x_2^3$，$Q=x_1^3+3x_2^2$，由(15·41)

$$\oint_{\partial K}(Pdx_1+Qdx_2)=\int_K 3(x_1^2+x_2^2)dA$$

$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot rdrd\theta=\frac{3}{2}\pi.$$

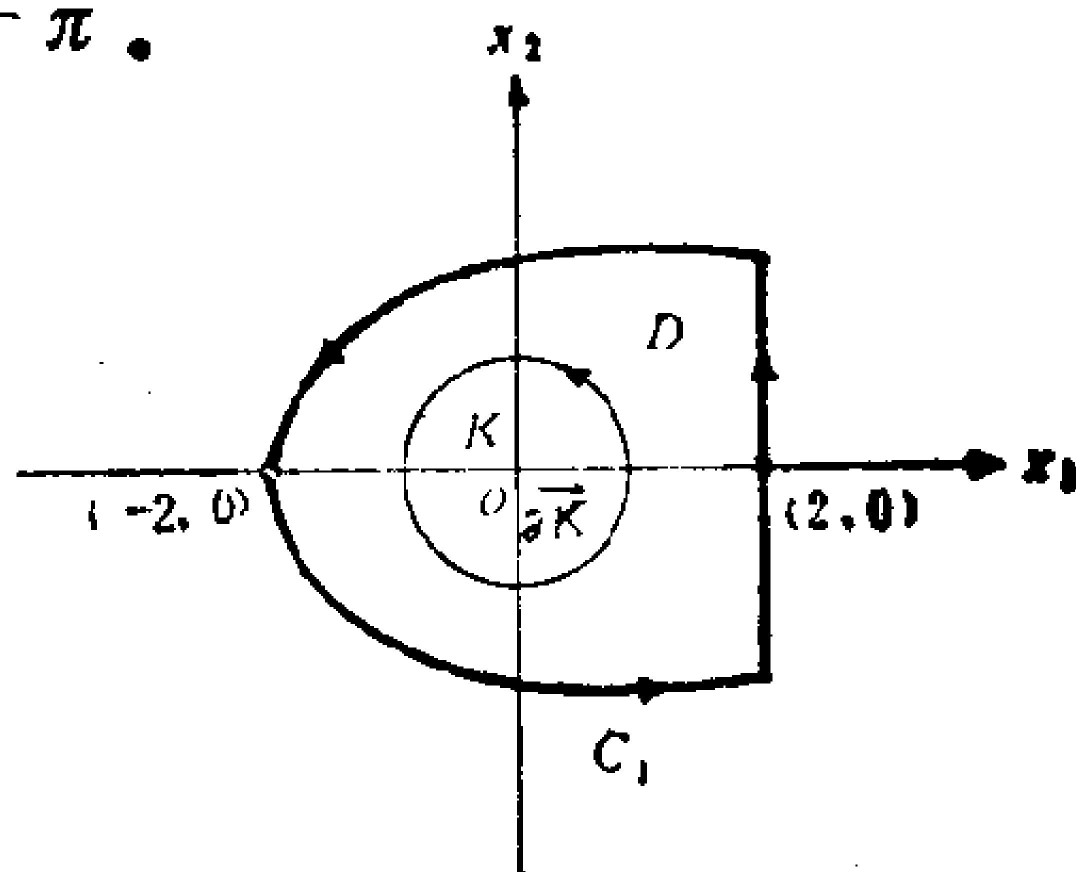


图 15·16

例2 设$K=\{(x_1,x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant1\}$是单位圆，$D$是$K$的外部左以抛物线$x_2^2=2(x_1+2)$、右以直线$x_1=2$为边界的区域（图15·16）。用格林定理计算

$$\int_{C_1}\left(-\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}dx_1+\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}dx_2\right)$$

C_1是D的外边界。

解 置$P=\dfrac{-x_2}{x_1^2+x_2^2}$， $Q=\dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2}$ 且注意在 D内

$$Q_{,1}-P_{,2}=0.$$

取$\overrightarrow{\partial K}$为逆时针方向，由格林定理有

$$0=\int_{\partial G}(Pdx_1+Qdx_2)=\int_{C_1}(Pdx_1+Qdx_2)$$

$$-\int_{\partial K}(Pdx_1+Qdx_2)$$

对右端后一积分用参数方程$x_1=\cos\theta, x_2=\sin\theta, \theta\in[-\pi,\pi]$，得

$$\int_{C_1}(Pdx_1+Qdx_2)=\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta=2\pi.$$

例3 设D是面积为A的正规区域，

$\mathbf{v}=\dfrac{-1}{2}(x_2\mathbf{e}_1+x_1\mathbf{e}_2)$. 证明 $A=\int_{\partial D}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$.

解 用格林定理得

$$\int_{\partial D}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_D \mathrm{curl}\,\mathbf{v}\,dA=\int_D\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dA=A.$$

这表明正规区域的面积可以表示为沿区域边界的一个线积分。

习　题

习题1—6验证格林定理。

1．$P(x_1,x_2)=2x_1-3x_2$，　$Q(x_1,x_2)=3x_1+2x_2$，

$D=\{(x_1,x_2): 0\leqslant x_1\leqslant 2,\ 0\leqslant x_2\leqslant 1\}$．

2．$P(x_1,x_2)=2x_1-x_2$，$Q(x_1,x_2)=x_1+2x_2$，D是单位圆外部在$x^2=x_1^2-2$以上及直线$x_2=2$以下的区域。

3．$P=x_1^2-x_2^2$，$Q=2x_1x_2$；D是以（0，0），（2，0）及（1，1）为顶点的三角形区域。

4．$P=-x_2$，$Q=0$，D是$x_1^2+x_2^2=4$之内及$x_1^2+(x_2-1)^2=\frac{1}{4}$，$x_1^2+(x_2+1)^2=\frac{1}{4}$的外部的区域。

5．$\mathbf{v}=(x_1^2+x_2^2)^{-1}(-x_2\mathbf{e}_1+x_1\mathbf{e}_2)$；$D=\{(x_1,x_2): 1<x_1^2+x_2^2<4\}$．

6．$P=4x_1-2x_2$，$Q=2x_1+6x_2$；D是椭圆：$x_1=2\cos\theta$，$x_2=\sin\theta$，$\theta\in[-\pi,\ \pi]$的内部区域。

7．证明定理15•19（b）．

8．设$D=\{(x_1,\ x_2): 0\leqslant x_1^{\frac{2}{3}}+x_2^{\frac{2}{3}}<1\}$，判定$D$是否为正规区域。

习题9—12用格林定理计算$\int_{\partial\Gamma}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$。

9．$\mathbf{v}(x_1,x_2)=(4x_1e^{x_2}+3x_1^2x_2+x_2^2)\mathbf{e}_1+(2x_1^2e^{x_2}-\cos x_2)\mathbf{e}_2$；　$D=\{(x_1,x_2): x_1^2+x_2^2\leqslant 4\}$．

10. $\mathbf{v}(x_1, x_2) = \arctan\dfrac{x_2}{x_1}\mathbf{e}_1 + \dfrac{1}{2}\log(x_1{}^2 + x_2{}^2)\mathbf{e}_2$;

$D = \{(x_1, x_2): 1 \leqslant x_1 \leqslant 3, \ -2 \leqslant x_2 \leqslant 2\}$.

11. $\mathbf{v}(x_1, x_2) = -x_2\mathbf{e}_1 + x_1\mathbf{e}_2$;

$D = \{(x_1, x_2): (x_1 - 1)^2 + x_2{}^2 < 1\}$.

12. $\mathbf{v}(x_1, x_2) = -3x_1{}^2x_2\mathbf{e}_1 + 3x_1x_2{}^2\mathbf{e}_2$;

$D = \{(x_1, x_2): -a \leqslant x_1 \leqslant a, \ 0 \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{a^2 - x_1{}^2}\}$

13. 设$P = -x_1(x_1{}^2 + x_2{}^2)^{-1}$，$Q = x_1(x_1{}^2 + x_2{}^2)^{-1}$，用格林定理求$\int_C (P dx_1 + Q dx_2)$的值，这里$C$是抛物线$x_2$ $x_1{}^2$ -1，$-1 \leqslant x_1 \leqslant 2$的弧接以从（2，3）到（$-1$，0）的线段。$D$是$|\vec{C}|$的内部、在以（0，0）点为中心，以很小的$\rho$作半径的小圆外部的区域。

14. 设A是$\mathbf{R}_N$中紧集，$\{V_i\}$是A的开覆盖。证明存在φ_1，$\varphi_2, \cdots$，$\varphi_n \in C^\infty(\mathbf{R}_N)$满足(a) $0 \leqslant \varphi_i \leqslant 1$；(b) φ_i有含于某V_i中的紧支集；(c)对$\forall P \in A$，$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(P) = 1$。

〔提示：$P \in A$，$\exists$闭球$\overline{B}(P, 2\delta_p) \subset V_i$，据§13·3，$\exists$平滑$\psi_p \in C^\infty(\mathbf{R}_N)$，$\psi_p$在$B(p, 2\delta_p)$之外为零，在$B(P, \delta_p)$上等于1。由$A$紧，$\exists P_1, P_2, \cdots, P_n \in A$，使$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, \delta_{p_i})$。记相应的平滑为$\psi_i$，令$\varphi_i =$

$\psi_i \Big/ \sum_{j=1}^{n} \psi_i$.]

§15·5 $\mathbf{R}_3$内的曲面及其参数表示式

至今所研究过的$\mathbf{R}_3$中的曲面都是形如$x_3=f(x_1, x_2)$或$F(x_1, x_2, x_3)=0$的方程在笛卡尔坐标系下的图象。现在研究比上述以x_1，x_2,x_3的单一方程所描述的曲面更复杂的曲面。

通常把复杂曲面分解为若干较为简单的小曲面片，通过研究这些曲面片，以化简对复杂曲面的研究。如果分解得巧妙，即使整个曲面是相当古怪的，它的每一分片也可能有简单的结构。我们将主要研究其分片有如球面片、或柱面片、或双曲面片那样结构的曲面。

球面、椭球面、平行六面体的表面是没有边界的曲面的例子。而另一方面半球面以圆周为边界。当划分曲面成为若干小片时，必须细心地区别这些小片的边界是否包含有整个曲面边界的点。

设D是其边界为有限条分段光滑的简单闭曲线所围成的$\mathbf{R}_2$中的区域，$D\cup\partial D\subset$区域G。形如

$$x_1=x_1(s, t),\ x_2=x_2(s, t),\ x_3=x_3(s, t),$$
$$(s, t)\in D\cup\partial D, \tag{15·42}$$

的方程组的图象指$\mathbf{R}_3$中点(x_1, x_2, x_3)的集。若以(x_1, x_2, x_3)为坐标的$\mathbf{R}_3$中的点记为q，o是原点，用矢表示(15·42)，写成

$$\mathbf{V}(\overrightarrow{oq})=\mathbf{r}(s,\ t),\ (s,\ t)\in D\cup\partial D. \qquad (15\cdot43)$$

定义 如果x_1，x_2，$x_3\in C^1(G)$，即$\mathbf{r}\in C^1(G)$，且

$$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t\neq0,\ (s,\ t)\in G, \qquad (15\cdot44)$$

$\mathbf{r}(s,\ t)$为G到V_3的1—1映象．称（15• 42）的图象为光滑曲面元素．

图15•17所示光滑曲面元素，∂D是单一分段光滑简单闭曲线．

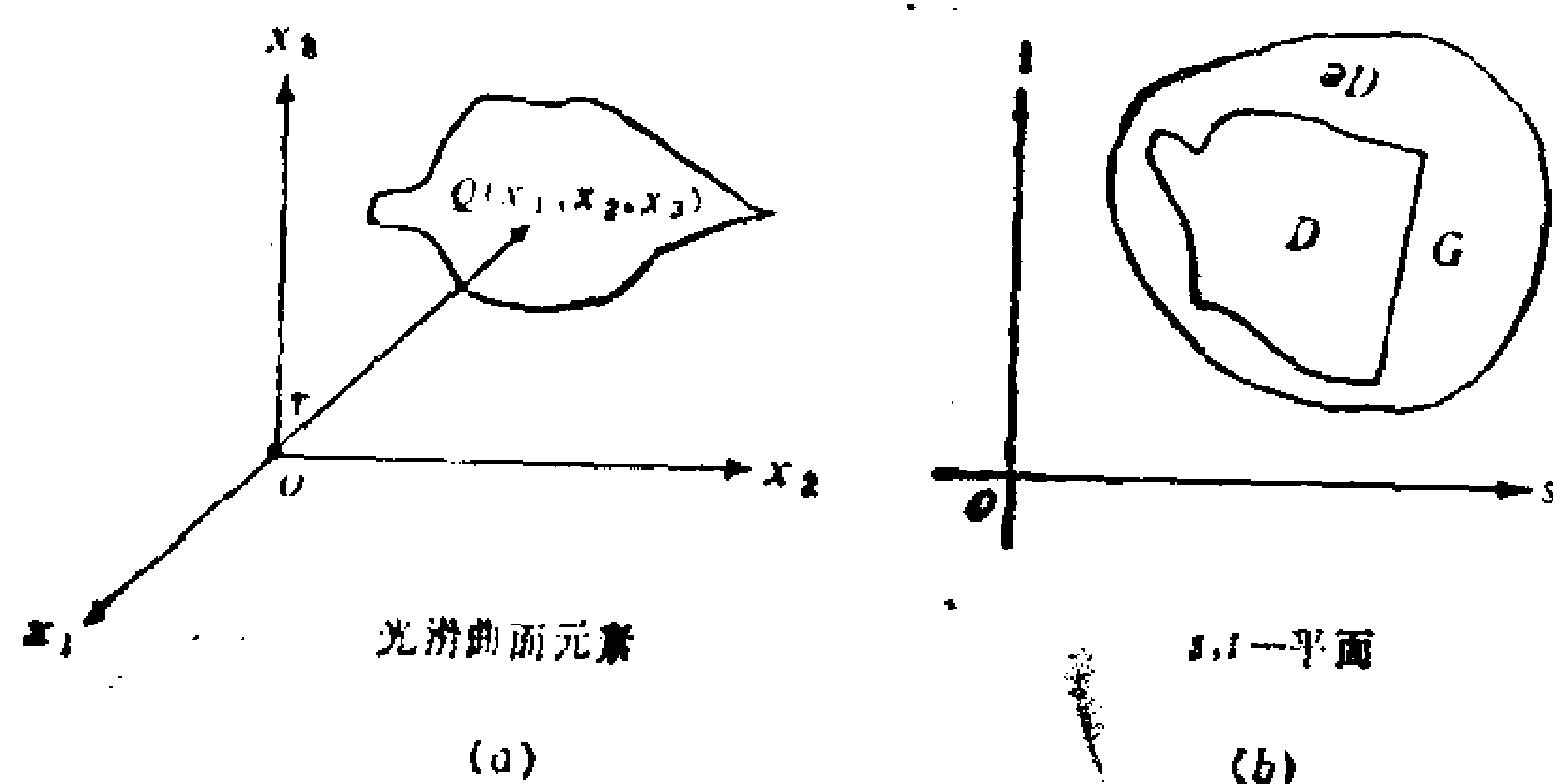


图 15·17

由定义，（15•42）式给出了$D\cup\partial D$的点与曲面元素的点的 1 — 1 对应．

若在R_3中引入以$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$为正交基的坐标系

$$\mathbf{r}(s,\ t)=x_1(s,\ t)\mathbf{e}_1+x_2(s,\ t)\mathbf{e}_2+x_3(s,\ t)\mathbf{e}_3,$$

那么

$$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t=\left(\frac{\partial x_2}{\partial s}\frac{\partial x_3}{\partial t}-\frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial x_3}{\partial s}\frac{\partial x_1}{\partial t}-\frac{\partial x_3}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial s}\right)$$

$$\mathbf{e}_2+\left(\frac{\partial x_1}{\partial s}\frac{\partial x_2}{\partial t}-\frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial s}\right)\mathbf{e}_3$$

用雅可比记法

$$J\left(\frac{\varphi,\psi}{u,v}\right)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}, & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u}, & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{vmatrix},$$

习惯上就简称右端行列式为雅可比．这样

$$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t=J\left(\frac{x_2,x_3}{s,t}\right)\mathbf{e}_1+J\left(\frac{x_3,x_1}{s,t}\right)\mathbf{e}_2+$$

$$J\left(\frac{x_1,x_3}{s,t}\right)\mathbf{e}_3. \qquad (15\cdot45)$$

定义 称(15•42)或（15•43）为曲面元素的参数表示，s，t称为参数．

同一曲面元素可以有不同的参数表示，下面定理指出两参数表示之间的关系．

定理15•21 设$\mathbf{v}(\overrightarrow{oq})=\mathbf{r}(s,t)$，$(s,t)\in D\cup\partial D$，区域$G\supset D\cup\partial D$，$\partial D$由有限条分段光滑的简单闭曲线组成，$\mathbf{r}\in C^1(G)$，且满足$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t\neq\mathbf{0}$，$(s,t)\in G$，以$S$，$S_1$分别表示在$\mathbf{r}$之下$D\cup\partial D$，$G$的象集．

(a) 若$(\bar{s},\bar{t})\in D\cup\partial D$，$\exists$正数$\rho$，使$S$与圆盘，$(s-\bar{s})^2+(t-\bar{t})^2<\rho^2$相对应的部分可以表为$x_3=f(x_1,x_2)$，$x_1=g(x_2,x_3)$，$x_2=h(x_1,x_3)$三者之一的形式，这里$f$，$g$，$h$是在$(\bar{s},\bar{t})$点对应点$(x_1,x_2,x_3)$某邻域内

的光滑函数。

（b）设曲面S，S_1的另一参数方程为

$$\mathbf{v}(\overrightarrow{op})=\mathbf{r}_1(s',t'),\quad (s',t')\in D_1\cup\partial D_1,$$

S，S_1分别是(s',t')平面内的$D_1\cup\partial D_1$，G_1的象集，并且D_1，G_1，$\mathbf{r}_1$与D，G，$\mathbf{r}$有完全相同的性质。那么$\exists$一个1—1的光滑变换

$$T: S=U(s',t'),\quad t=V(s',t'),\quad (s',t')\in G_1 \qquad (15\cdot46)$$

从G_1到G使$T(D_1)=D$，$T(\partial D_1)=\partial D$，且

$$\mathbf{r}[U(s',t'),\ V(s',t')]=\mathbf{r}_1(s',\ t')\in G_1.$$

证明

（a）因为于$(\overline{s},\ \overline{t})$点$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t\neq\mathbf{0}$，那么（15.45）式中的三个雅可比至少有一个在$(\overline{s},\ \overline{t})$处不等于零，例如在$(\overline{s},\ \overline{t})$点，$J\left(\frac{x_1,x_2}{s,\ t}\right)\neq 0$.令

$$\mathbf{r}(s,t)=X_1(s,t)\mathbf{e}_1+X_2(s,t)\mathbf{e}_2+X_3(s,t)\mathbf{e}_3,$$

并表示$\overline{x_1}=X_1(\overline{s},\ \overline{t})$，$\overline{x_2}=X_2(\overline{s},\ \overline{t})$，$\overline{x_3}=X_3(\overline{s},\ \overline{t})$表示$x_1=X_1(s,\ t)$，$x_2=X_2(s,\ t)$，$x_3=X_3(s,\ t)$；$\overline{x_1}=X_1(\overline{s},\ \overline{t})$，$x_2=X_2(\overline{s},\ \overline{t})$，$x_3=X_3(\overline{s},\ \overline{t})$.
考察方程组$x_1=X_1(s,t)$，$x_2=X_2(s,t)$，由隐函数定理，在$(\overline{s}\ \overline{t})$的某邻域与$(\overline{x_1}\ \overline{x_2})$某邻域之间可解得1—1映射$s=\varphi(x_1,\ x_2)$，$t=\psi(x_1,\ x_2)$，即存在正数$\alpha$，$\beta$，使

$(x-\overline{x_2})^2+(x_2-\overline{x_2})^2<\alpha^2$，$(s-\overline{s})^2+(t-\overline{t})^2<\beta^2$中的$x_1$，$x_2$，$s$，$t$，若满足$x_1=X_1(s,t)$；$x_2=X_2(s,t)$，则满足$s=\varphi(x_1,x_2)$，$t=\psi(x_1,x_2)$，这里$\varphi$与$\psi$是圆盘$(x-\overline{x_1})^2+(x_2-\overline{x_2})^2<\alpha^2$内的光滑函数。于是$S_1$在$(\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3})$的一邻域内的部分为

$$x_3=X_3[\varphi(x_1,x_2),\psi(x_1,x_2)]$$

$$((x_1-\overline{x_1})^2+(x_2-\overline{x_2})^2<\alpha^2)$$

的图象。当选取$\rho>0$如此之小，使圆盘$(s-\overline{s})^2+(t-\overline{t})^2<\rho^2$的映象位于圆盘$(x_1-\overline{x_1})^2+(x_2-\overline{x_2})^2<\alpha^2$内。这样的$\rho$便合乎（$a$）的要求。

（b）因为$\mathbf{r}(s,t)$及$\mathbf{r}_1(s',t')$是1—1的，在S_1上的点P是G中唯一的(s,t)及G'中唯一的(s',t')的映象，如图15·18所示，使(s',t')与(s,t)互相对应确定了（15·46）的变换T：$s=U(s',t')$，$t=V(s',t)$.显然T是1—1的。

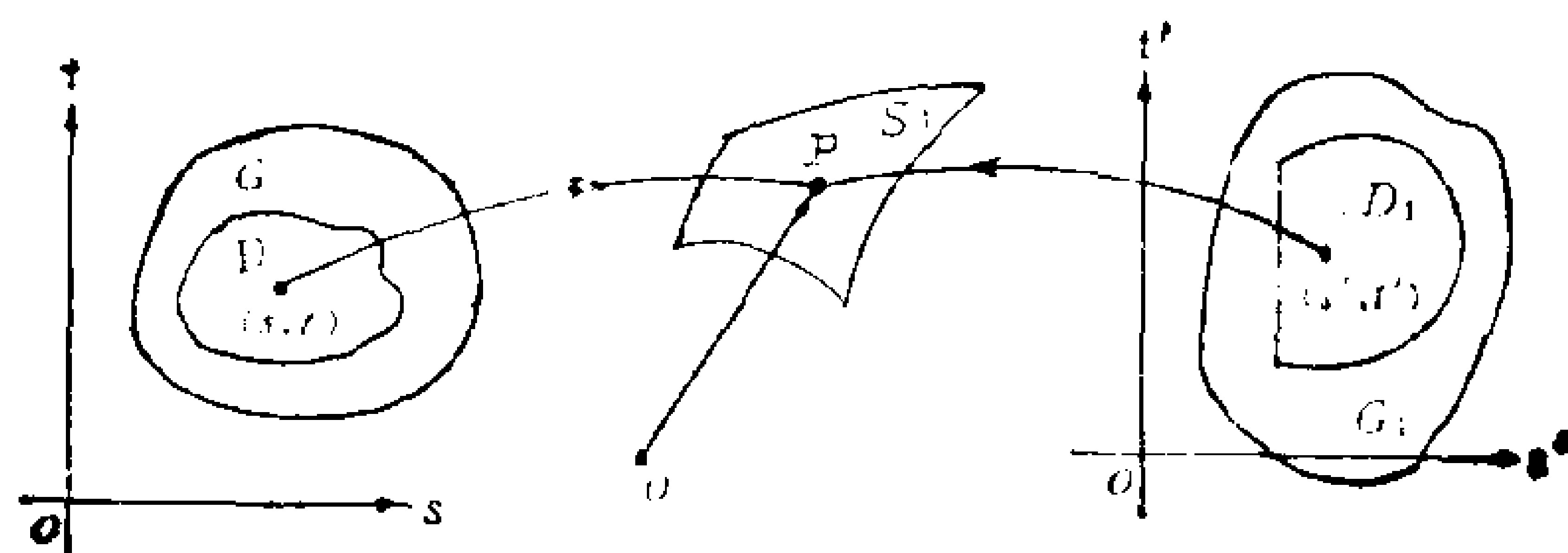


图 15·18

为了证明T的光滑性，设$\forall(s_0', t_0')\in G_1$，$s_0=U(s_0', t_0')$，$t_0=V(s_0', t_0')$，且以$P_0$表示$(s_0, t_0)$及$(s_0', t_0')$在曲面上的对应点。因为（15·45）式中三个雅可比至少有一在(s_0, t_0)不为零，例如最后一个不为零，如在（a）中那样，可以解得s，t为x_1，x_2的函数：$s=\varphi(x_1, x_2)$，$t=\psi(x_1, x_2)$。现令

$$\mathbf{r}_1(s', t)=X_1'(s', t')\mathbf{e}_1+X_2'(s', t')\mathbf{e}_2$$
$$+X_3'(s', t')\mathbf{e}_3.$$

曲面S在P_0点邻域内的点P可以表示为(x_1, x_2)的函数，即(X_1', X_2')与P之间$1-1$对应，而P又与(s', t') $1-1$对应，既然(s, t)与(s', t')之间的$1-1$对应是通过它们共同的象P确定的。因此在(s_0', t_0')邻域内

$$s=U(s', t')=\varphi(X_1'(s', t'), X_2'(s', t')),$$
$$t=V(s', t)=\psi(X_1(s', t'), X_2'(s', t')).$$

所以变换T在(s_0', t_0')邻域内光滑，由(s_0', t_0')是G_1的任意点，T为G_1到G的$1-1$光滑变换。于是(b)获证。

定义 若S是由参数表示

$$\mathbf{r}(s, t)=X_1(s, t)\mathbf{e}_1+X_2(s, t)\mathbf{e}_2$$
$$+X_3(s, t)\mathbf{e}_3,\quad (s, t)\in D\cup\partial D.$$

给出的曲面元素。∂D的象称为S的边界记为∂S。

由定理15·21的(b)光滑曲面元素的边界与参数表示的特殊选择无关。∂D由有限条分段光滑互不相交的简单闭曲线所组成，∂S是∂D的光滑映象，∂S也是由有限条分段光滑的互

不相交的简单闭曲线所组成。

由定理15·21的（a）可知在一光滑曲面元素上的任一点的某邻域内，曲面是形如

$$x_3=f(x_1,x_2),\ \ x_1=g(x_2,x_3),\ \ x_2=h(x_1,x_3)$$

三方程之一的图象，f，g，h都是光滑函数。

当f是在包含$D\cup\partial D$的区域上光滑的函数，那么点集$S=\{(x_1,\ x_2,\ x_3):x_3=f(x_1,\ x_2),\ (x_1,\ x_2)\in D\cup\partial D\}$是光滑的曲面元素。事实上，注意到$S$有如下的参数表示

$$x_1=s,\ \ x_2=t,\ \ x_3=f(s,t),\ \ (s,t)\in D\cup\partial D,$$

合乎（15·42），（15·43）的条件。因此S是光滑曲面元素。

定义 分段光滑曲面S是有限个曲面元素S_1，S_2，…，S_n的并，且满足下列五个条件：

（i）没有两个S_i有公共内点。

（ii）$\partial S_i\cap\partial S_j,i\neq j$，是空的、一个点或是一分段光滑的弧（图15·19）。

（iii）任意三个不同的曲面元素的边界最多有一个公共点。

（iv）S的任意两个点可用位于S上的轨道来联结，即∃联结两点而且位于S上的轨道。

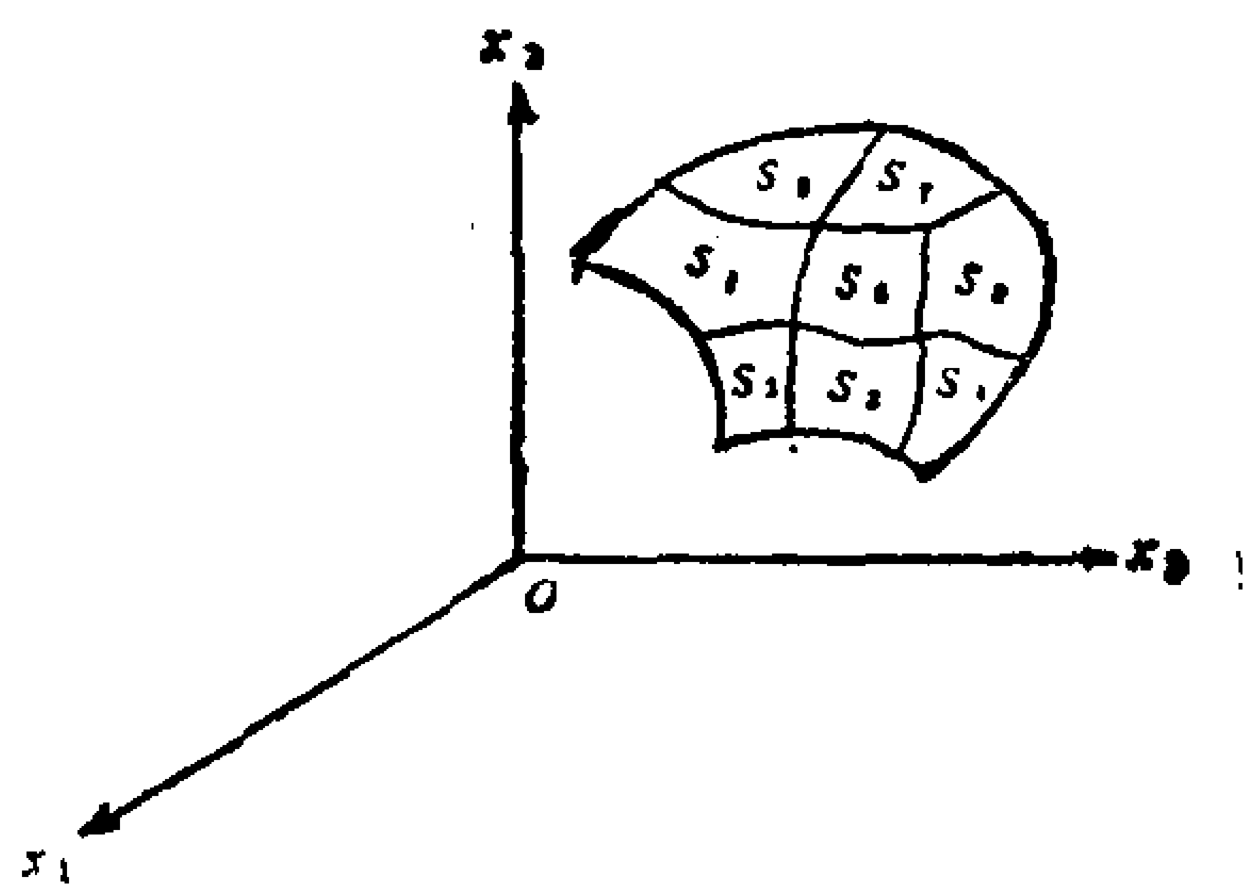


图 15·19

（v）所有仅是唯一的S_i边界上弧的并形成有限条互不相交的分段光滑的简单闭曲线，恰好是S的边界∂S。当∂S是

空集时S是无边界的分段光滑曲面。

分解分段光滑曲面为有限个光滑曲面元素的方法不是唯一的。一条弧是两个S_i的边界的部分时，称它为分解的边缘。S_i边界的偶角称为顶点。

一分段光滑曲面称为光滑曲面，当且仅当曲面上不在边界∂S上的点p，都有曲面的分解，把曲面分解为几个曲面元素，使P点是一曲面元素的内点。

假若F是$\mathbf{R}_3$内某区域上的光滑数量场，且$F(x_1,x_2,x_3)$与$\nabla F(x_1,x_2,x_3)$不同时为零，那么能够证明，当$F=0$的图象是有界闭集时，它是光滑曲面。把这一结果的证明留给读者。例如函数

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-a^2,$$

$$F(x_1,x_2,x_3)=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}-1,$$

$F=0$的图象分别是球面，椭球面。而任一多面体的表面是分段光滑曲面的例子。

例 设定义在$\mathbf{R}_3$上的数量场

$$F(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+9x_3^2-44.$$

证明集$S=\{(x_1,x_2,x_3):F=0\}$是一光滑曲面。

解 求出

$$\nabla F=2x_1\mathbf{e}_1+8x_2\mathbf{e}_2+18x_3\mathbf{e}_3.$$

可见仅在（0，0，0）点$\nabla F=0$。因为S非空（例如点$(\sqrt{44},0,0)\in S$），且（0，0，0）不属于S，且由$F=0$是一闭的有

界集，因此曲面$F=0$是光滑的。

习　题

1. 求半球面$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3>0\}$的两个参数方程，并求出联系两组参数的如(15·46)中的变换T。

2. 同习题1，这里$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+2x_3^2=1, x_3>0\}$。

3. 设顶点为(0，0，0)，(1，0，0)，(0，1，0)，(1，1，0)，(0，0，1)，(0，1，1)，(1，0，1)，(1，1，1)的立方体。试把立方体表面分解为曲面元素，并验证边界是空集。

4. 设球面$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$。分解$S$为曲面元素并验证$S$是一无边界的光滑曲面。

5. 设圆锥曲面$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, -1<x_3<1\}$。判别$S$是否是光滑曲面。

6. 设环面$S=\{(x_1, x_2, x_3): (\sqrt{x_1^2+x_2^2}-b^2)+x_3^2=a^2\}$，$0<a<b$。试将$S$分解为光滑曲面元素，并验证$S$是无边界的曲面。

7. 设F是定义在R_3内区域D上的数量场。且F与∇F不同时为零。$S=\{(x_1, x_2, x_3): F(x_1, x_2, x_3)=0\}$是闭的有界集。证明$S$是一光滑曲面。

8. 设　$S_0=\{(x_1, x_2, x_3): 1\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 4\}$　$S_1=\{(x_1, x_2, x_3): 2(x_1^2+x_2^2)=1, x_3>0\}$。证明$S_1\cap S_0$是一分段光滑曲面。画出$\partial S$。

§15·6 曲面的面积及曲面积分

设曲面 $S=\{(x_1, x_2, x_3): x_3=f(x_1, x_2)\ (x_1, x_2)\in D\cup\partial D\}$，当$f$有一阶连续偏导数，曲面$S$的面积$A(S)$的计算公式为

$$A(S)=\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}\,dA.$$

为了计算更复杂的曲面的面积，首先求光滑曲面元素的面积公式。

设σ是一光滑的曲面元素，它的参数表示为

$$\sigma: \mathrm{v}(\overrightarrow{OQ})=\mathbf{r}(s,t),\quad (s,t)\in D\cup\partial D \tag{15·47}$$

$\mathbf{r}$及D满足光滑曲面元素定义的条件。当t取常数t_0，那么(15·47)的图象是位于σ上的一条光滑曲线$\mathbf{r}(s,t_0)$。因此$\mathbf{r}_s(s, t_0)$是曲面上这条曲线的切矢。同样，$\mathbf{r}_t(s_0,t_0)$则是曲面上曲线$\mathbf{r}(s_0, t)$的切矢（图15·20所示）。矢$\mathbf{r}_s(s_0,t_0)$，

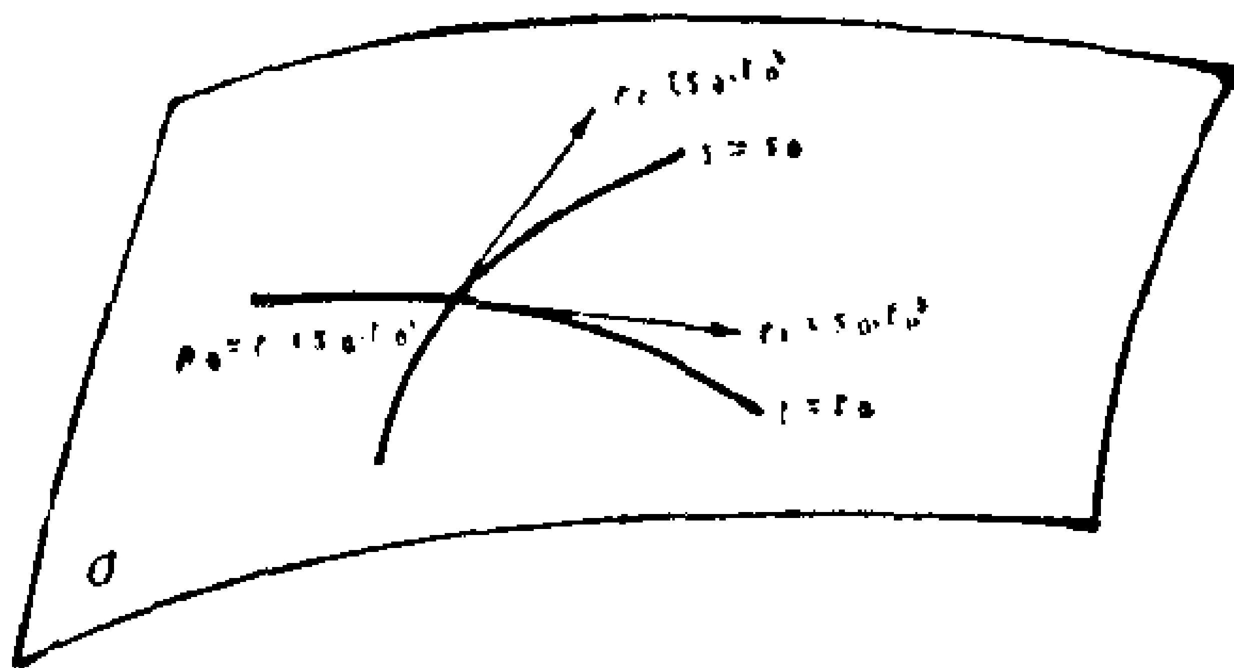


图 15·20

$\mathbf{r}_t(s_0, t_0)$ 都位于曲面的过$\overrightarrow{O_1P_0}=\mathbf{r}(s_0, t_0)$矢端$P_0$点的切平面上。

定义 设曲面元素σ由（15·47）所表示，$P_0\in\sigma$。给出$\mathbf{R}_2$上的变换：对$(s, t)\in\mathbf{R}_2$

$$\mathbf{U}(\overrightarrow{OP})=\mathbf{r}(s_0,t_0)+\mathbf{r}_s(s_0, t_0)(s-s_0)$$

$$+\mathbf{r}_t(s_0, t_0)(t-t_0) \qquad (15\cdot48)$$

称为曲面在P_0点的切线变换。P点的集是σ过P_0点的切平面π。R_2中的矩形$R=\{(s,t): s_1\leqslant s\leqslant s_2, \quad t_1\leqslant t\leqslant t_2)\}$在变换（15·48）之下的像是切平面$\pi$上的平行四边形$ABCD$（图15·21）。



图 15.21

令$\mathbf{a}=\mathbf{r}_s(s_0, t_0)$，$\mathbf{b}=\mathbf{r}_t(s_0,t_0)$，点$A$、$B$、$C$、$D$满足

$$\mathbf{a}(\overrightarrow{OA})=\mathbf{r}(s_0, t_0)+\mathbf{a}(s_1-s_0)+\mathbf{b}(t_1-t_0)$$

$$\mathbf{v}(\overrightarrow{OB})=\mathbf{r}(s_0, t_0)+\mathbf{a}(s_2-s_0)+\mathbf{b}(t_1-t_0)$$

$$\mathbf{v}(\overrightarrow{OC})=\mathbf{r}(s_0, t_0)+\mathbf{a}(s_1-s_0)+\mathbf{b}(t_2-t_0)$$

$$\mathbf{v}(\overrightarrow{OD})=\mathbf{r}(s_0, t_0)+\mathbf{a}(s_2-s_0)+\mathbf{b}(t_2-t_0).$$

据此，求得

$$v(\overrightarrow{AB}) = v(\overrightarrow{OB}) - v(\overrightarrow{OA}) = (s_2 - s_1)\mathbf{a}$$
$$v(\overrightarrow{AD}) = v(\overrightarrow{OD}) - v(\overrightarrow{OA}) = (t_2 - t_1)\mathbf{b}.$$

以矢积的长度表示$ABCD$的面积：

$$|v(\overrightarrow{AB}) \times v(\overrightarrow{AD})| = |(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)|\ |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

以$A(R)$表示R的面积$|(s_2 - s_1)(t_2 - t_1)|$，有

$$ABCD\text{的面积} = A(R)\ |\mathbf{r}_s(s_0, t_0) \times \mathbf{r}_t(s_0, t_0)|.$$

为了定义曲面元素的面积，以曲面片上相应的切平面π上的平行四边形来逼近曲面片。当曲面片越"小"这种逼近精度越高。

定义 设σ是由（15·47）表示的光滑曲面元素。划分D为有限个子区域：D_1，D_2，…，D_n，记这一划分Δ的网孔$\|\Delta\| = \max_i \{\mathrm{diam} D_i\}$（$\mathrm{diam} D_i$表示$D_i$的直径）。曲面元素$\sigma$的面积$A(\sigma)$定义为

$$A(\sigma) = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(D_i)\ |\mathbf{r}_s(s_i, t_i) \times \mathbf{r}_t(s_i, t_i)|,$$

这里$A(D_i)$是D_i的面积，(s_i, t_i)是D_i的任一点，这里极限存在的意义与积分定义的极限存在意义一致。

由σ的面积定义，立即得出公式：

$$A(\sigma) = \iint_D |\mathbf{r}_s(s,t) \times \mathbf{r}_t(s, t)|\ dA \qquad (15\cdot49)$$

如果σ的另一参数表示为

$$\sigma : \mathbf{v}(\overrightarrow{O,P}) = \mathbf{r}^{\sim\prime}(s', t'), \quad (s', t') \in D' \cup \partial D'.$$

在这参数表示之下的面积$A'(\sigma)$为

$$A'(\sigma) = \iint_{D'} |\mathbf{r}'_s(s', t') \times \mathbf{r}'_t(s', t')|\, dA'. \qquad (15\cdot50)$$

当证明了$A(\sigma) = A'(\sigma)$时，曲面面积的上述定义才是合理的。

事实上，根据雅可比的乘法法则及重积分变量替换公式，有

$$|\mathbf{r}'_{s'}(s', t') \times \mathbf{r}'_{t'}(s', t')| = |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| \cdot \left| J\left(\frac{s, t}{s' t'}\right)\right|,$$

因而

$$\iint_{D'} |\mathbf{r}'_{s'}(s', t') \times \mathbf{r}'_{t'}(s', t')|\, dA'$$

$$= \iint_{D'} |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| \cdot \left| J\left(\frac{s, t}{s' t'}\right)\right| dA'$$

$$= \iint_{D} |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)| \cdot \left| J\left(\frac{st}{s' t'}\right)\right| \cdot \left| J\left(\frac{s', t'}{s, t}\right)\right| dA$$

$$= \iint_{D} |\mathbf{r}_s(s, t) \times \mathbf{r}_t(s, t)|\, dA.$$

即$A(\sigma) = A'(\sigma)$。

如果σ由$x_3=f(x_1, x_2)$，$(x_1, x_2)\in D\cup\partial D$表示，令$x_1=s$，$x_2=t$，$x_3=f(s, t)$，并求得

$$J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)=-f_s,\quad J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)=-f_t,$$

$$J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)=1$$

因此$|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|=\sqrt{J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)^2+J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)^2+J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)^2}$

$$=\sqrt{1+f_s'^2+f_t'^2}$$

（15·49）式成为

$$A(\sigma)=\iint\limits_D\sqrt{1+f_s'^2+f_t'^2}\,dA. \tag{15·51}$$

曲面σ由单一方程如$x_3=f(x_1, x_2)$所表示，就说曲面σ用非参数式给出。

然而，多数曲面不能以非参数式表示。因而一般说曲面面积不能应用（15·51）式来计算。可以证明象球面这样简单的曲面不能是单一光滑曲面元素的部分。

如果S是一分段光滑曲面，可以把它分解开来定义S的面积。设$F\subset\sigma$，F是一图形$\Longleftrightarrow F$是图形$E\subset D\cup\partial D$在（15·47）之下的象。F的面积按（15·49）式定义。同样根据雅可比的乘法法则及重积分变量替换公式，F的面积与σ的参数表示的特殊选取无关。F的面积记为$A(F)$。

定义 设S是一分段光滑曲面。S内的集F是一图形$F\Longleftrightarrow$

$F=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k$，$\forall F_i$，是含于$S$的唯一的光滑曲面元素$\sigma_i$内的图形，并且任两$F_i$没有公共内点．$F$的**面积定义**为．

$$A(F)=A(F_1)+\cdots+A(F_k).$$

应当证明F的任意这样两个分解都有同样的值$A(F)$，上述定义才是合理的．这可根据相应的F的原象$E\subset D\cup\partial D$的分解，及公式（15•49）与积分变量替换公式证明，证明的细节省略．

假定F是分段光滑曲面上的闭图形．如果$F=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_k$，每一$F_i$是包含在一光滑曲面元素之内的图形．每一$F_i$是$R_2$中图形$E_i\subset(D_i\cup\partial D_i)$在映象．

$$v(\overrightarrow{OQ})=r_i(s,\ t),\qquad (s,\ t)\in D_i\cup\partial D_i \tag{15•52}$$

之下的象，D_i是互不相交的．设$f:F\to R_1$是连续的数量场，如下定义f在F上的积分：

定义 $$\iint\limits_{F_i}fdS=\iint\limits_{E_i}f[r_i(s,\ t)]\cdot|r_{is}\times r_{it}|\,dA \tag{15•53}$$

而f在F上的积分

$$\iint\limits_{F}fdS=\sum_{i=1}^{k}\iint\limits_{F_i}fdS. \tag{15•54}$$

如定义之前所述，$\iint\limits_{F}fdS$与划分$\{F_i\}$及（15•52）的参数表示的选取都无关．

当曲面元素σ具有非参数表示$x_3 = \varphi(x_1, x_2)$，那么(15·53)成为

$$\iint_{F_i} f dS = \iint_{E_i} f[x_1, x_2, \varphi(x_1 x_2)]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)^2} dA. \tag{15·55}$$

上式右端是通常的二重积分，可化为累次积分计算。下面举例说明这种计算方法并给出这种积分的直接应用。

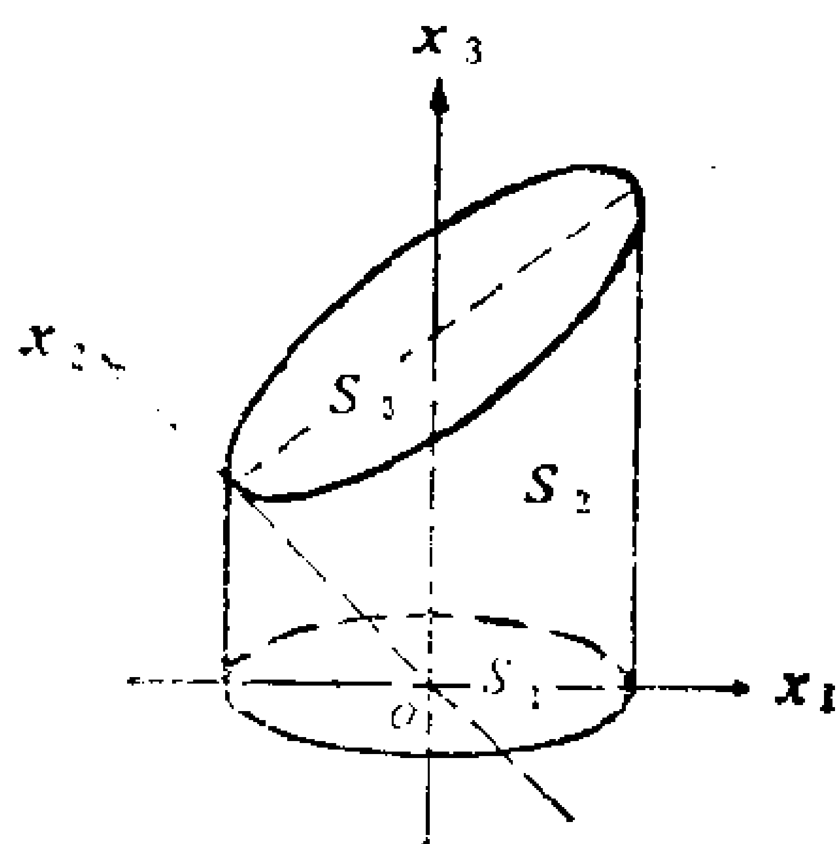


图 15·22

例1 设F是柱面$x_1^2 + x_2^2 = 4$界于平面$x_3 = 0$及$x_3 = x_2 + 3$之间的部分的侧面（图15·22），求 $\iint_F x_3^2 dS$的值。

解 变换到柱面坐标系：

$$x_1 = r\sin\theta,\ x_2 = r\cos\theta,\ x_3 = z.$$

那么F位于$r = 2$上。可以θ，z为F的参数坐标，且令

$$G = \{(\theta, z): -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant z \leqslant 3 + 2\cos\theta\}.$$

$F = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 = 2\sin\theta,\ x_2 = 2\cos\theta,\ x_3 = z,\ (\theta, z) \in G\}$.

曲面面积元素$dS = |r_\theta \times r_z| dA_{\theta z}$（图15·23），且因为

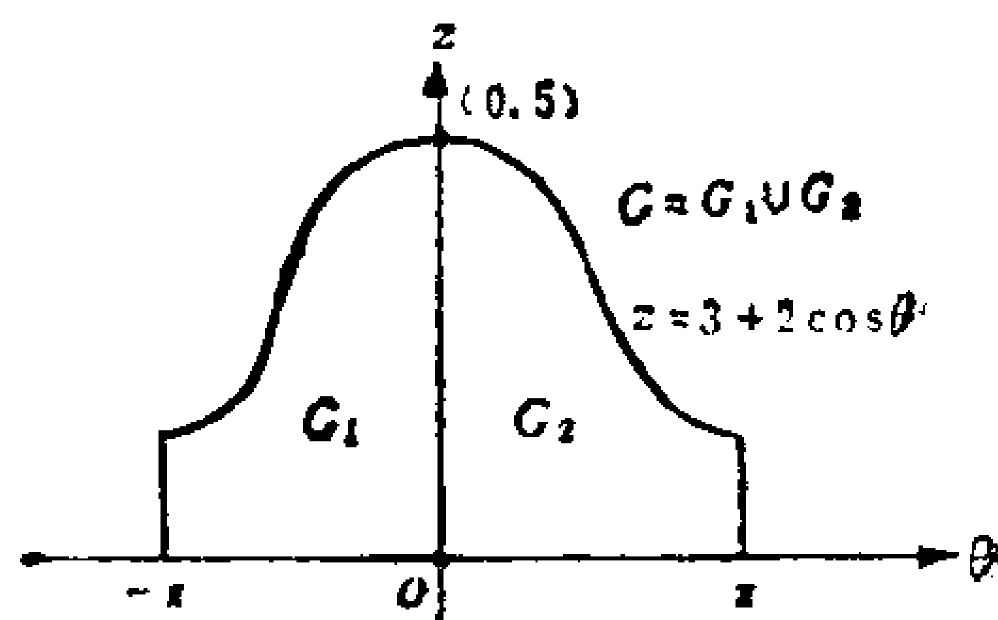


图 15·23

$$r_\theta \times r_z = J\left(\frac{x_2,\ x_3}{\theta,\ Z}\right)e_1 + J\left(\frac{x_3,\ x_1}{\theta,\ Z}\right)e_2 + J\left(\frac{x_1,\ x_2}{\theta,\ Z}\right)e_3$$

$$= -(2\sin\theta)e_1 - (2\cos\theta)e_2 + 0\, e_3,$$

所以

$$dS = 2 \cdot dA_{\theta z}.$$

因而

$$\iint_F x_3^2 dS = 2\iint_G Z^2 dA_{\theta z} = 2\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{3+2\cos\theta} Z^2 dZ d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(3 + 2\cos\theta)^2 d\theta = 60\pi. \tag{15·56}$$

注　曲面F不是单一光滑曲面元素，因为G的$(-\pi, z)$与(π, z)点在G到F的变换下变成F的同一点，这与光滑曲面元素要求变换是1—1的相违背．但如图15·23所示划分G为G_1及G_2，G_1，G_2各自的映象是光滑曲面元素．积分(15·56)的值不变．

曲面积分被用来计算各种各样的物理量。例如薄曲面板的质量中心及惯性矩的计算归为曲面积分，分布在曲面上的电荷位势也归成曲面积分。假定曲面上分布一层质量，其面密度为δ，δ是连续函数，曲面F上分布的总质量表示为$M(F) = \iint_F \delta(P)dS$。曲面$F$关于$x_3$轴的惯性矩$I_{x_3}$计算公式是

$$I_{x_3}(F) = \iint_F \delta(P)(x_1^2(p) + x_2^2(p))dS,$$

$I_{x_1}(F)$，$I_{x_2}(F)$也有同样的公式。

例2 求曲面$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3 \geqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2}\}$关于$x_1$轴的惯性矩，假定密度$\delta$是常量。

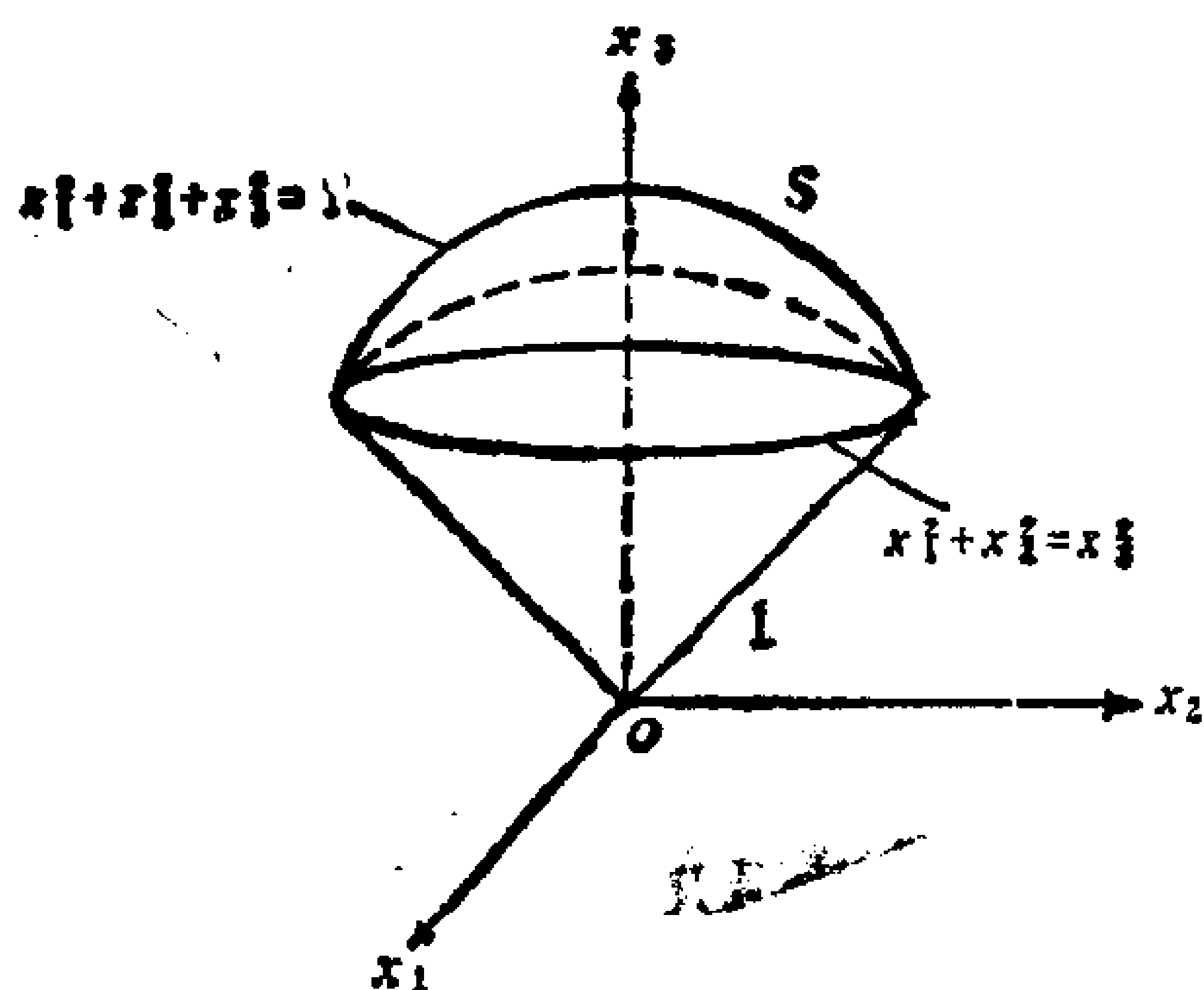


图 15·24

解 据S的特性(图15·24)引用球面坐标：

$x_1=\rho\cos\theta\sin\varphi$，

$x_2=\rho\sin\theta\sin\varphi$，

$x_3=\rho\cos\varphi$且令

$D=\{(\theta, \varphi): 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}\}$。那么

$$S=\{(\rho, \theta, \varphi): \rho=1, (\theta, \varphi)\in D\}.$$

$$\mathbf{r}_\varphi \times \mathbf{r}_\theta = J\left(\frac{x_2, x_3}{\varphi, \theta}\right)\mathbf{e}_1 + J\left(\frac{x_3, x_1}{\varphi, \theta}\right)\mathbf{e}_2 + J\left(\frac{x_1, x_2}{\varphi, \theta}\right)\mathbf{e}_3$$

$$=(\sin^2\varphi\cos\theta)\mathbf{e}_1+(\sin^2\varphi\sin\theta)\mathbf{e}_2$$

$$+(\sin\varphi\cos\varphi)\mathbf{e}_3.$$

曲面面积元素

$$dS=|\mathbf{r}_\varphi\times\mathbf{r}_\theta|\,dA_{\varphi\theta}=\sin\varphi dA_{\varphi\theta}.$$

于是

$$I_{x_1}=\iint_D \delta(x_2^2+x_3^2)\sin\varphi dA_{\varphi\theta}$$

$$=\delta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)\sin\varphi d\theta d\varphi$$

$$=\pi\delta\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos^2\varphi)\sin\varphi d\varphi=\frac{\pi\delta}{12}(16-7\sqrt{2}).$$

注 S在球面坐标下的参数表示并不满足$|r_\varphi\times r_\theta|\neq 0$的要求. 因为$|r_\varphi\times r_\theta|=\sin\varphi$, 在$\varphi=0$时等于零. 但可以绕轴挖去一小孔, 这时$\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}$曲面便是合乎要求的类型. 然后令小孔趋向于零, 即$\varepsilon\to 0$, 而得到I_{x_1}和上述同样的值.

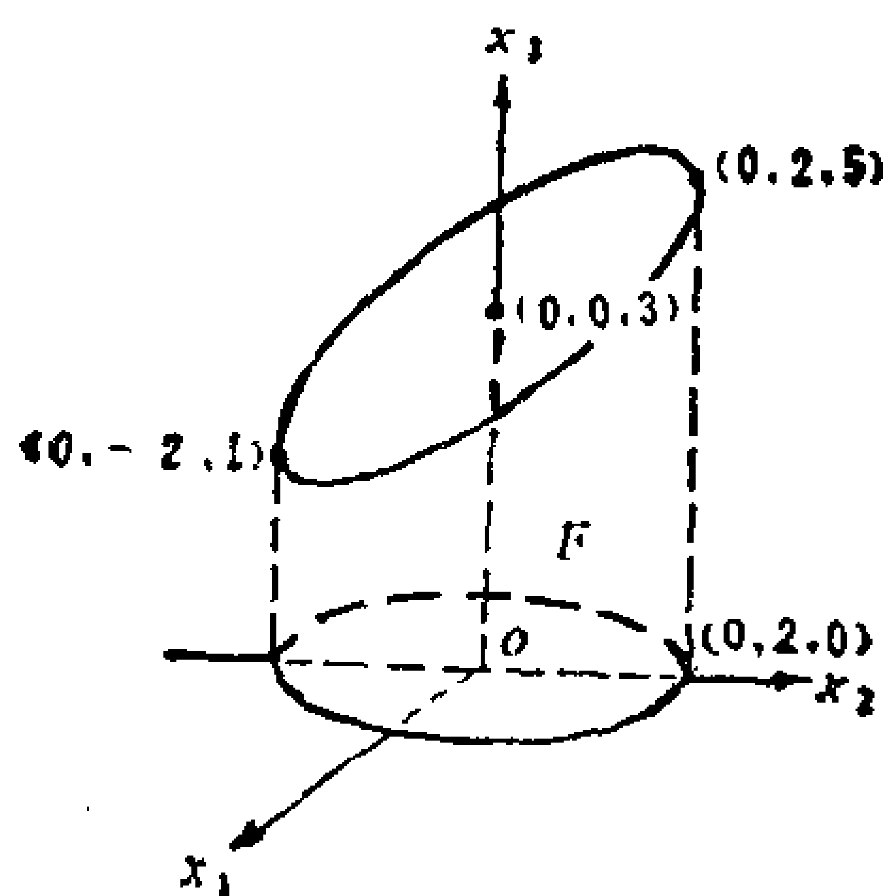


图 15·25

例3 设$R=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2\leqslant 1, 0\leqslant x_3\leqslant x_1+2\}$而$S$为$\partial R$(图15·25). 若$S$的面密度$\delta$为常数, 求$S$的质量及质量中心的$x_1$坐标.

解 把S划分为三部分: S_1, x_1x_2平面上的圆盘; S_2, 柱面的侧面; S_3, 平面$x_3=x_1+2$在柱面之内的部分. 先计算S关于x_1的力矩:

$$\iint_S x_1 dS=\iint_{S_1}x_1 dS+\iint_{S_2}x_1 dS+\iint_{S_3}x_1 dS.$$

因x_1是奇函数, 所以

$$\iint_{S_1}x_1 dS=0.$$

在S_3上，S_3：$x_3 = x_1 + 2$，$(x_1, x_2) \in S_1$。因此 $dS = \sqrt{2}\, dA_{x_1 x_2}$，$dA_{x_1 x_2}$是$S_1$上的面积元素。于是

$$\iint_{S_3} x_1 dS = \sqrt{2}\iint_{S_1} x_1 dA = 0 .$$

在S_2上，取(θ, Z)坐标：$x_1 = \cos\theta$，$x_2 = \sin\theta$，$x_3 = Z$，$dS = dA_{\theta Z}$，记

$D_2 = \{(\theta, Z): -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant Z \leqslant 2 + \cos\theta\}$，

$$\iint_{S_2} x_1 dS = \iint_{D_2} \cos\theta dA_{\theta Z} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta} \cos\theta dZ d\theta = \pi .$$

于是

$$\iint_S x_1 dS = \iint_{S_1 \cup S_2 \cup S_3} x_1 dS = \pi .$$

现在来求S的总质量。由δ是常量，所以

$$M(S) = \iint_S \delta\, dS = \delta A(S).$$

注意到曲面S是分段光滑没有边界的曲面。柱面$x_1^2 + x_2^2 = 1$与平面$x_3 = 0$及$x_3 = x_1 + 2$的交线是两条光滑边缘，S上没有顶点，$A(S) = A(S_1) + A(S_2) + A(S_3)$。

显然

$$A(S_1)=\pi,\qquad A(S_3)=\sqrt{2}\,\pi.$$

而

$$A(S_2)=\iint_{D_2} dA_{\theta z}=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta} dz\,d\theta=4\pi,$$

于是$M(S)=\pi\delta(5+\sqrt{2})$。为了得到质量中心的$x_1$坐标，用公式

$$\bar{x}_1=\frac{\delta\iint_S x_1 dS}{M(S)}=\frac{\delta\pi}{\delta\pi(5+\sqrt{2})}=\frac{1}{5+\sqrt{2}}.$$

习　题

习题1—9　求 $\iint_S f(x_1, x_2, x_3)dS$的值。

1. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1$，$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1+x_2+x_3=1, x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0, x_3\geqslant 0\}$.
2. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2$，$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_3=x_1, x_1^2+x_2^2\leqslant 1\}$.
3. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2$，$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_3^2=x_1^2+x_2^2, 1\leqslant x_3\leqslant 2\}$.
4. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2$，S是柱面$x_3=\frac{x_1^2}{2}$被平面$x_2=0$，$x_1=2$及$x_1=x_2$截出的部分。

5. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1x_3$，$S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2=1, 0\leqslant x_3\leqslant x+2\}$.

6. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1$，S是柱面$x_1^2-2x_1+x_2^2=0$介于锥面$x_1^2+x_2^2=x_3^2$两叶之间的部分。

7. $f(x_1, x_2, x_3)=1$，应用x_1x_2平面上的极坐标(r,θ)，S是在螺线$r=\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$上的垂直柱面，且以$x_1x_2$平面为下界，以锥面$x_1^2+x_2^2=x_3^2$为上界的部分。

8. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2-2x_3^2$，$S=\{x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2\}$.

9. $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2$，$S=\partial R$，$R=\{(x_1, x_2, x_3): x_3^2\leqslant x_1^2+x_2^2, 1\leqslant x_3\leqslant 2\}$.

习题10—14求关于指定轴的惯性矩，假设密度δ是常量。

10. S如习题3中所给；x_1轴。

11. S为习题6中的曲面；x_1轴。

12. S为习题7中的曲面；x_3轴。

13. 曲面S为∂R，$R=\{(x_1, x_2, x_3): x_1+x_2+x_3<1, x_1>0, x_2>0, x_3>0\}$；关于$x_2$轴。

14. 环面$S=\{(x_1, x_2, x_3): (\sqrt{x_1^2+x_2^2}-b)^2+x_3^2=a^2, 0<a<b\}$；$x_3$轴。

[环面的参数表示] $x_1=(b+a\cos\varphi)\cos\theta, x_2=(b+a\cos\varphi)\sin\theta$，$x_3=a\sin\varphi$.$(\varphi,\theta)\in\{(\varphi,\theta): 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$]

习题15—17求S的质量中心，设δ为常量。

15. S是习题2中的曲面。

16. S是习题13中的曲面。

17. $S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=4a^2, (x_1-a)^2+x_2^2\leqslant a^2\}$.

设在曲面S上分布有电荷，其面密度ρ，在q点的电势$E(q)$

$$=\iint_S \frac{\rho(p)dS}{dpq}$$ 这里dpq是(R_3-S)的点q到点$p\in S$的距离。

习题18—21　求给定点的$E(q)$，并设ρ是常量。

18. $S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2=1, 0\leqslant x_3\leqslant 1\}$,
$q=(0, 0, 0)$.

19. $S=\{x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2\}$, $q=(0,0,C)$.
(i)　$C>a>0$;　(ii)　$a>C>0$.

20. $S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=a^2, x_3>0\}$.
$q=(0, 0, C)$, $0<C<a$.

21. S是习题3的曲面，$q=(0, 0, 0)$.

§15·7　可定向曲面

假设S是一光滑曲面元素，其参数表示为

$$\mathrm{v}\,(\overrightarrow{OP})=\mathrm{r}(S, t), (S, t)\in D\cup\partial D \tag{15·57}$$

这里D是(S, t)平面内具有分段光滑边界∂D的区域。按光滑曲面元素的定义，对于某一含有$D\cup\partial D$的区域G内的(S, t)，$\mathrm{r}_S\times\mathrm{r}_t\neq 0$(图15·26)

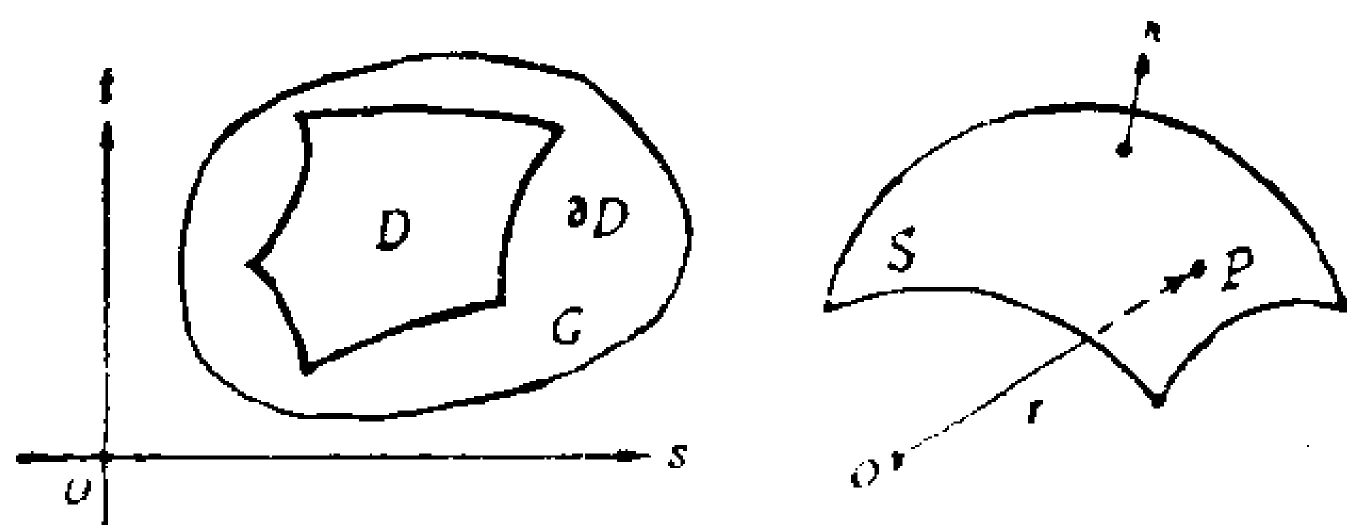


图　15·26

定义 对光滑曲面元素S，定义单位法矢为

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t}{|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|}, \quad (s, t)\in D.$$

当S是一光滑曲面元素，法矢n是(s,t)的连续函数，用雅可比表示，n可写成

$$\mathbf{n}=|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|^{-1}\left[J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)\mathbf{e}_1+J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)\mathbf{e}_2+J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)\mathbf{e}_3\right] \tag{15·58}$$

如果曲面S另一参数表示为

$$\mathbf{v}(\overrightarrow{OP})=\mathbf{r}'(s', t'), \quad (s',t')\in D'\cup\partial D'.$$

那么由定理15·21的(b)存在1—1的连续可微变换

$$T: S=U(s', t'), \quad t=V(s', t'), \quad (s', t')\in G'.$$

T将G变换为G'，$T(D)=D'$，$T(\partial D)=\partial D'$. 且有

$$\mathbf{r}[(U(s', t), V(s', t')]=\mathbf{r}'(s', t'), \quad (s', t')\in D'.$$

以S的第二个参数表示来确定单位法矢n′：

$$\mathbf{n}'=|\mathbf{r}'_{s'}\times\mathbf{r}'_{t'}|^{-1}\left[J\left(\frac{x_1, x_3}{s', t'}\right)\mathbf{e}_1+J\left(\frac{x_3, x_1}{s', t'}\right)\mathbf{e}_2+J\left(\frac{x_1, x_2}{s', t'}\right)\mathbf{e}_3\right] \tag{15·59}$$

用雅可比相乘法则，由（15·58）及（15·59）断定对所有$p\in s$

$$\mathbf{n}'(p)=\mathbf{n}(p)\text{或}\mathbf{n}'(p)=-\mathbf{n}(p),$$

正负号依 $J\left(\frac{s,\ t}{s',\ t'}\right)$在$D'\cup\partial D'$上是正或负来决定。

定义 光滑曲面S是可定向的$\Longleftrightarrow\exists S$上处处有定义的$S$的单位法矢$\mathbf{n}$，$\mathbf{n}$是连续的矢函数。这样单位法矢函数称为$S$的一定向。

由法矢函数在S的点p有两种取向$\mathbf{n}(p)$或$-\mathbf{n}(p)$，相应的可定向曲面恰好具有两种定向，一种定向是另一种定向的反向。一定向曲面是序偶$(S,\ \mathbf{n})$，这里$\mathbf{n}$是两种可能定向取定的一种。取定一定向曲面仍以S表示（其反定向记为S_-）。如果F是S的光滑曲面元素，那么限制$\mathbf{n}$在F上，给出了F一种定向$(F,\ \mathbf{n})=F$。这样定向的F是由S的定向所导出。

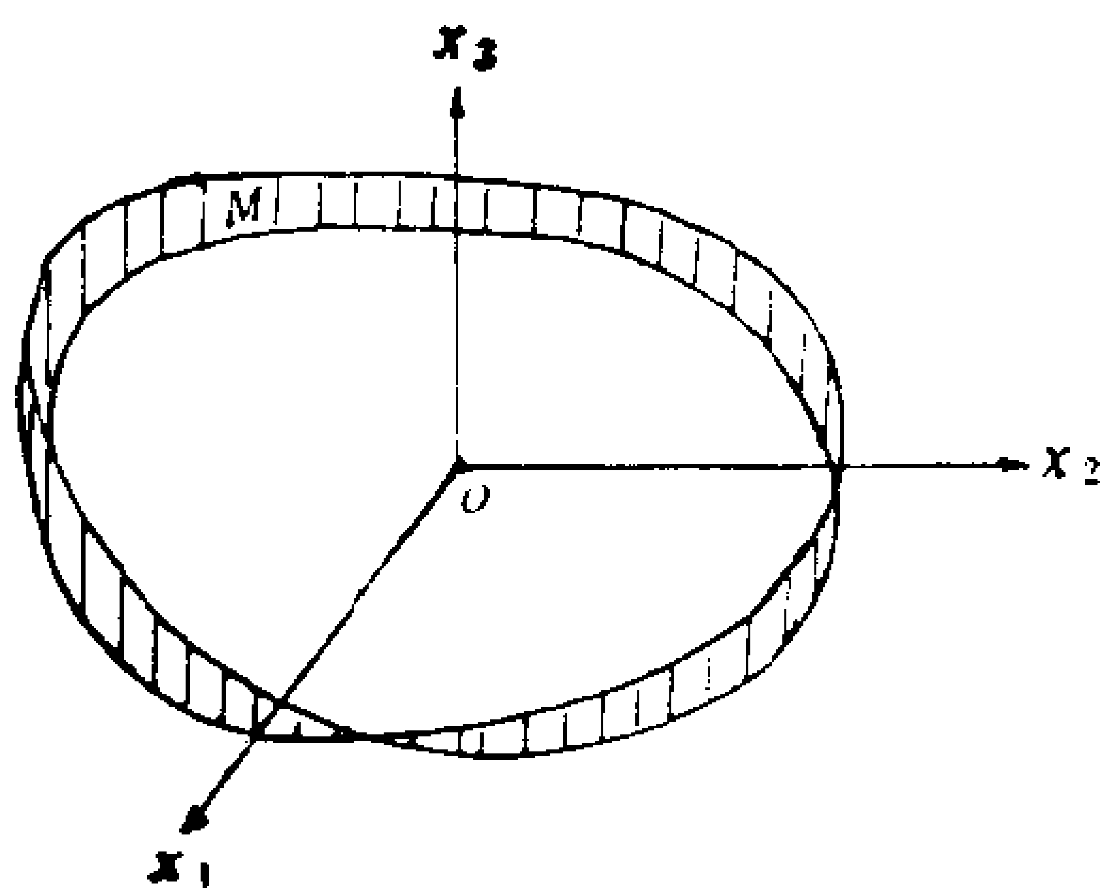


图 15·27

象球面，椭球面，环面等光滑曲面，直观上显然地都是定向曲面。但是，的确存在不能定向的光滑曲面。(图15·27)所示的莫比乌斯带就是不能定向的曲面。这一曲面的模型可由一条狭长的矩形纸带，将一头扭转180°之后，然后把两端胶合在一起而构成。莫比乌斯带的参数表示为

$$
\left.\begin{aligned}
x_1 &= (a+t\sin\frac{1}{2}s)\cos s \quad (s,\ t)\in R,\\
x_2 &= (a+t\sin\frac{1}{2}s)\sin s\\
x_3 &= t\cos\frac{1}{2}s
\end{aligned}\right\} \qquad (15\cdot 60)
$$

$R=\{(s,\ t): 0\leqslant s\leqslant 2\pi,\ -h\leqslant t\leqslant h\}$, $0<h<a$.

为了求莫比乌斯带M的单位法矢，首先计算

$$J\left(\frac{x_2,\ x_3}{s,\ t}\right)=(a+t\sin\frac{1}{2}s)(\cos\frac{1}{2}s)(\cos s)+\frac{1}{2}t\sin t,$$

$$J\left(\frac{x_3,\ x_1}{s,\ t}\right)=(a+t\sin\frac{1}{2}s)(\cos\frac{1}{2}s)(\sin s)-\frac{1}{2}t\cos t,$$

$$J\left(\frac{x_1,\ x_2}{s,\ t}\right)=-(a+t\sin\frac{1}{2}s)\sin\frac{1}{2}s.$$

那么

$$|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|^2=(a+t\sin\frac{1}{2}S)^2+\frac{1}{4}t^2,$$

$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t$不为O，当我们定义$\mathbf{n}(s,t)$为

$$\mathbf{n}(s,\ t)=|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|^{-1}\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t,$$

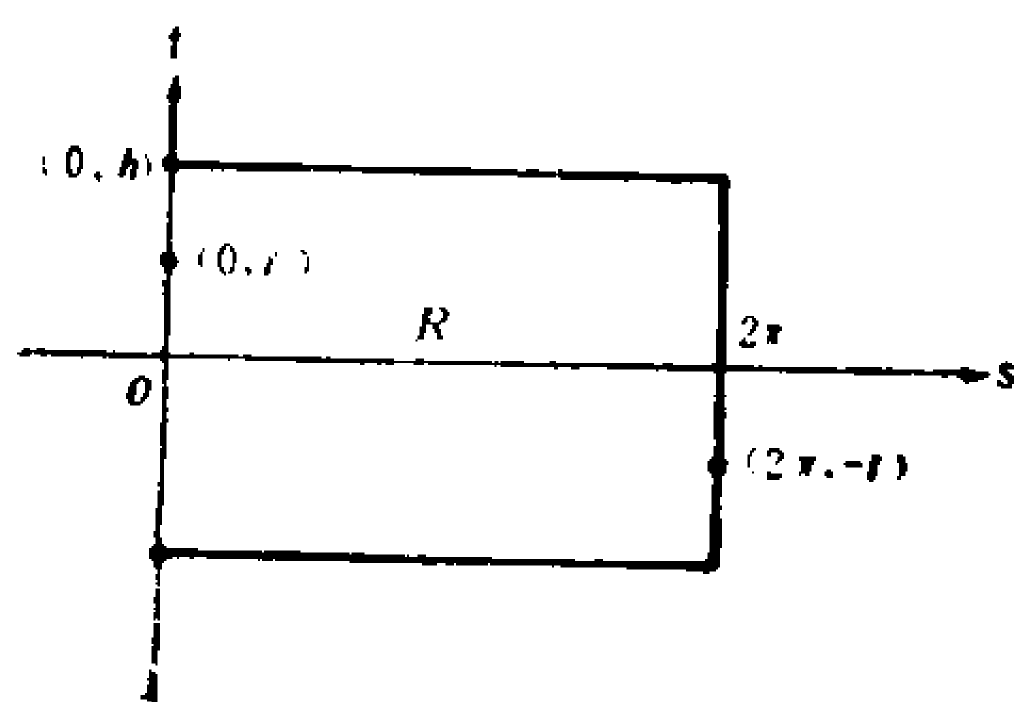


图 15·28

很明显$\mathbf{n}(s,\ t)$是连续的。但是，$\mathbf{n}(0,\ 0)=\mathbf{e}_1$，$\mathbf{n}(2\pi,\ 0)=-\mathbf{e}_1$，而(0,0)及($2\pi$, 0)是$R$内对应$M$上同一点的。变换（15•60）把$R$的(0, t)及(2π, $-t$)，

$-h\leqslant t\leqslant h$变换为M的同一点（图15·28），M不是光滑曲面元素．如果铅笔垂直于曲面来画M带子的中心线，铅笔画完一圈之后回到出发点，则铅笔发生倒向！或者可以不越过边界将M带各处着色（即原矩形两面都着色）．象这种曲面称为“单侧曲面”，单侧曲面是不能定向的．凡可定向的曲面，它的法矢可取两种方向，曲面有两侧称为“双侧曲面”．

若光滑曲面元素其参数表示为

$$\mathrm{R}(\overrightarrow{OP})=\mathbf{r}(s,\ t),\ (s,\ t)\in D\cup\partial D, \tag{15·61}$$

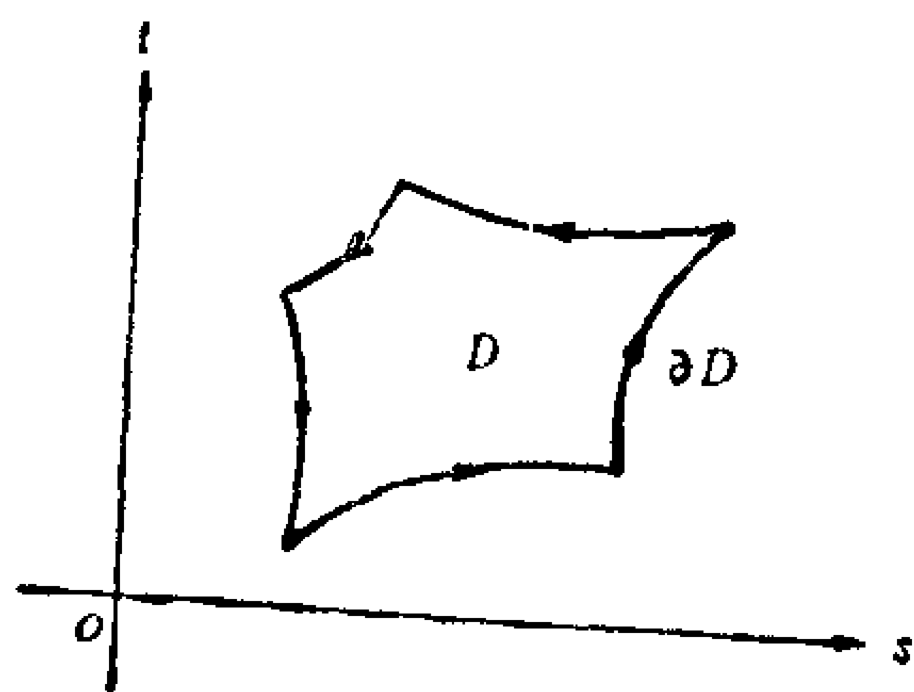


图 15·29

边界∂S是∂D的映象．因为R_2被定向，我们说D是正定向的，如果沿∂D行走D在左边（图15·29），对这一定向记为∂D，其相反定向记为$-\partial D$．

设S是一定向曲面且其定向由参数表示（15·61）所规定．那么每一S边界上的闭曲线Γ，将由∂D的定向闭曲线C导出它的定向Γ，这里Γ是C的象．当C是正定向的，就称Γ是关于S的正定向曲线．从几何上来说，如果按S的正法矢$\mathbf{n}$的方向为向上的方向，沿∂S行走曲面在左边，这种Γ的定向是正定向（图15·30）．用R_3内的正向及负向坐标系的术语来说，若$\mathbf{t}$是∂S的正向切矢，$\mathbf{n}$是垂直于$\mathbf{t}$且取S正法矢方向，$\mathbf{b}$与$\mathbf{t}$，$\mathbf{n}$

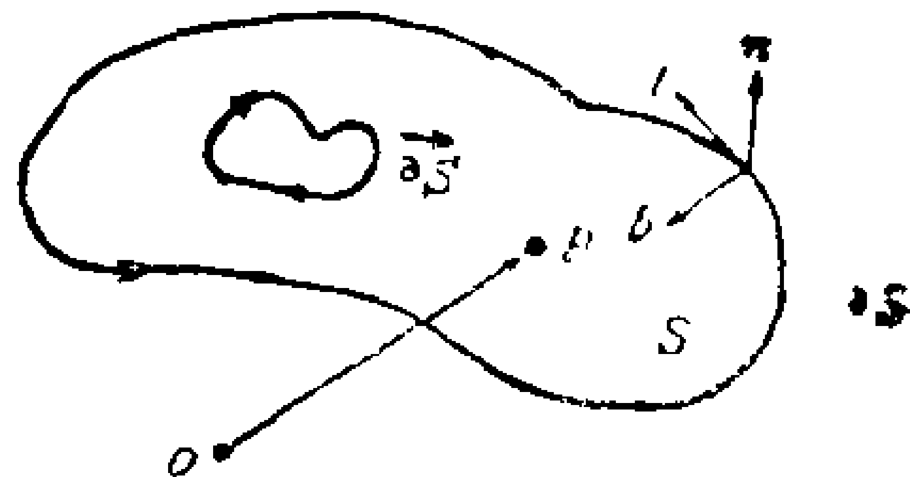


图 15·30

相垂直且指向曲面S，那么t，b，n是正定向的坐标系（n＝t×b）。如果∂D及∂S是由几条闭曲线组成，上述定向对每条曲线都成立。

定向曲面的概念可以推广到分段光滑曲面。这种曲面之上有边缘，因此不能定义在整个曲面上的连续的单位法矢场。但是分段光滑曲面可以划分成有限个光滑曲面元素F_1，F_2，…，F_n。每一曲面元素可以定向而其边界能导出一正定向。

定义 设Γ_{ij}是F_i及F_j的公共边界，Γ_{ij}是光滑弧。如果Γ_{ij}作为∂F_i的部分的正定向，与作为∂F_j的部分的正定向其方向恰好相反，这一性质对所有Γ_{ij}成立就称曲面F是可定向的分段光滑曲面。定向曲面元素F_i的集合形成F的定向，定义在每一F_i内部的单位法矢函数称为F的正的法矢函数。

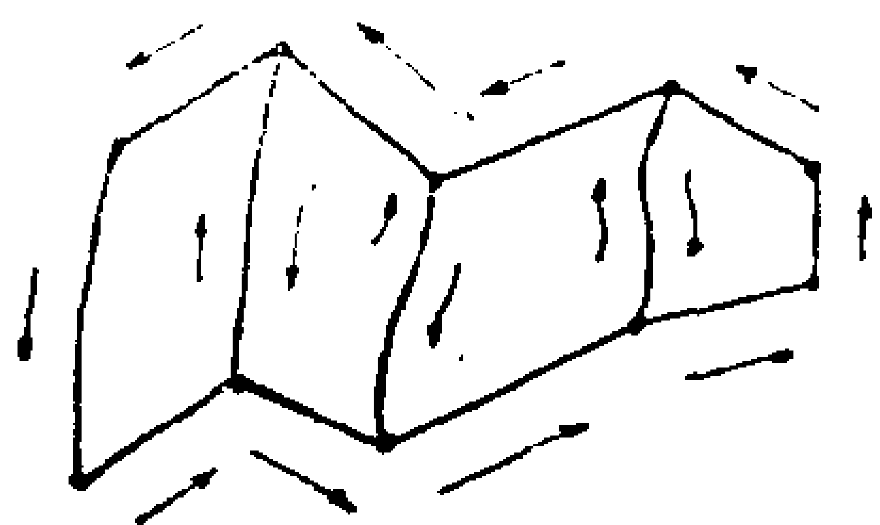


图 15·31

图15·31所示的曲面是一分段光滑可定向曲面，它分解成为四片光滑曲面元素。所有F_i的边界弧中仅有一次定向的弧组成了∂F，∂F是正定向的分段光滑的闭曲线。∂F也可能是空集（例如S是立方体的表面时∂S是空集）。由上面分析可知，如果一分段光滑曲面按某一分解它是可定向的，那么按另一分解它也是可定向的。不能定向的曲面，不论对它作怎样的分解，都有某Γ_{ij}作为∂F_i及∂F_j的公共部分的定向是相同的。像莫比乌斯带就是如此。

例 设S是以（0，0，0），（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1）为顶点的四面体的表面。划分S为光滑曲面元

素，对每一曲面元素找一参数表示，并以参数表示其单位法矢n（图15·32）。

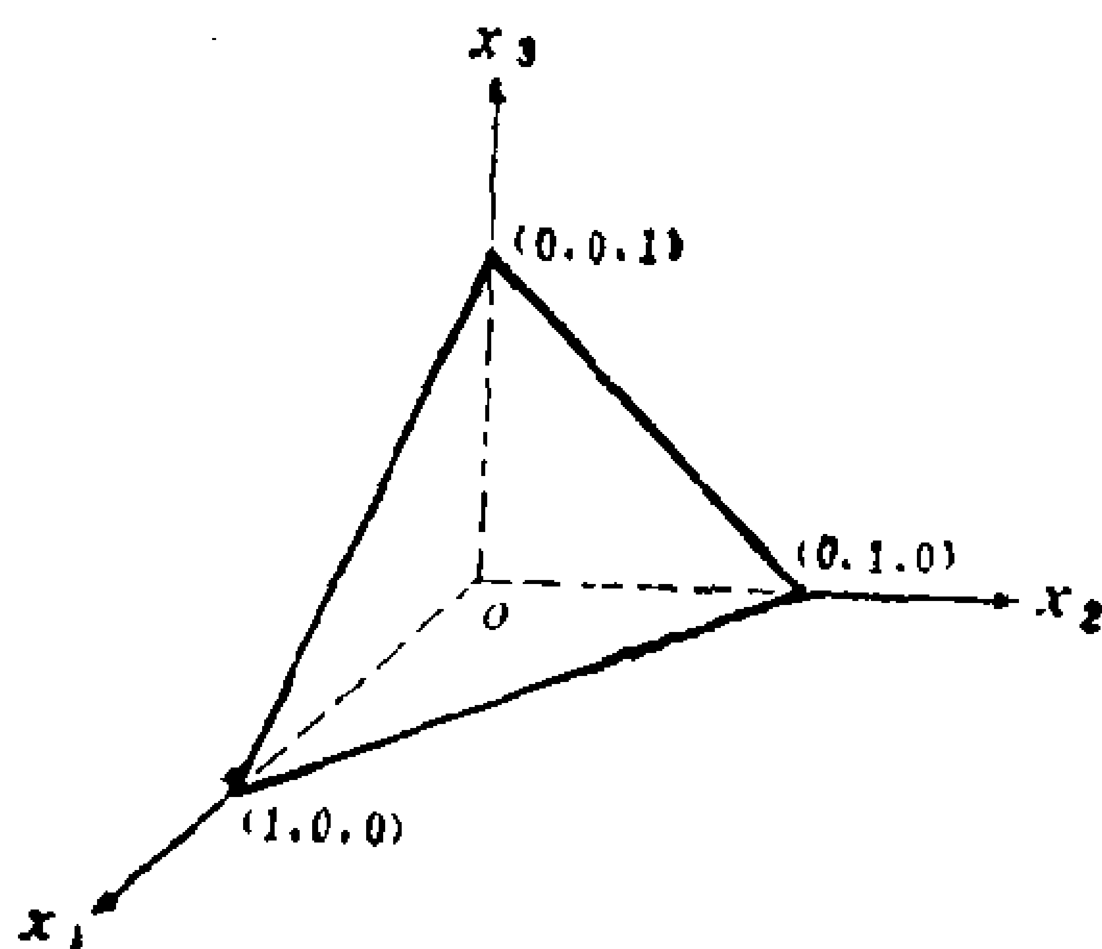


图 15·32

解 $S=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$，诸$S_i$是三角形面．取 $D=\{(S,\ t):0<S<1-t,\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$．

S_1是联结（0，0，0），（1，0，0），（0，1，0）的三角形区域，其参数表示为

$$\mathbf{r}(S,\ t)=S\mathbf{e}_1+t\mathbf{e}_2+o\mathbf{e}_3,\ (s,\ t)\in D.$$

因此求得$\mathbf{r}_s=\mathbf{e}_1$，$\mathbf{r}_t=\mathbf{e}_2$，$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t=\mathbf{e}_3$．于$S_1$上$\mathbf{n}=\mathbf{e}_3$．

S_2是联结（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1）的三角形面，其参数表示为

$$\mathbf{r}(s,\ t)=S\mathbf{e}_1+t\mathbf{e}_2+(1-s-t)\mathbf{e}_3,\quad (s,\ t)\in D.$$

因此求得$\mathbf{r}_s=\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3$，$\mathbf{r}_t=\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3$，$\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$．

于是 $\mathbf{n}=|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|^{-1}\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$．

曲面元素S_3，S_4与S_1的情况类似。

S_3: $\mathbf{r}(s, t)=t\mathbf{e}_1+S\mathbf{e}_3$,　$\mathbf{n}=\mathbf{e}_2$, $(s, t)\in D$.

S_4: $\mathbf{r}(s, t)=s\mathbf{e}_2+t\mathbf{e}_3$, $\mathbf{n}=\mathbf{e}_1$, $(s, t)\in D$.

习　题

习题1—6中，分段光滑（或光滑）的曲面S是给定的。划分S为光滑曲面元素，并对每一元素求一参数表示，然后用参数表示给出单位法矢函数$\mathbf{n}$。画出∂S的定向。

1. S是棱长为1的正方体表面。
2. S是以（0，0，0），（1，0，0），（1，1，0），（0，1，0），（0，0，1）为顶点的棱锥。
3. $S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=1, x_3\geqslant 0\}$.
4. $S=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2-x_3^2=0, -1\leqslant x_3\leqslant 1\}$
5. $S=S_1\cup S_2$, $S_1=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+4x_2^2+x_3^2=12,$

$0\leqslant x_2\leqslant\frac{1}{2})$,

$$S_2=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+3x_2^2+x_3^2=12,$$

$$-\frac{1}{2}\leqslant x_2\leqslant 0\}.$$

6. $S=\{(x_1, x_2, x_3): |x_3|=x_1^2+x_2^2, -1\leqslant x_3\leqslant 1\}$.

*7. 设M是莫比乌斯带：$x_1=(1+t\sin\frac{1}{2}s)\cos s$,

$x_2=(1+t\sin\frac{1}{2}s)\sin s$, $x_3=t\cos\frac{1}{2}s$,

$(s,\ t)\in R=\{(s,\ t): 0\leqslant s\leqslant 2\pi,\ -\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\}$.

把R划分成n个等大的矩形带，并证明与这每一小矩形带M相对应的部分是一光滑曲面元素。以Γ_{ij}表示第i个与第j个曲面元素的公共边界。按M的这一分解证明M是非定向的。

§15·8 斯托克斯定理

格林定理建立了两变量函数沿∂D的积分与这函数的导数在D内积分之间的关系。斯托克斯定理是格林定理由平面区域到曲面的推广。设S是R_3内一光滑定向曲面元素其边界为∂S，而$\mathbf{v}$是定义在$S\cup\partial S$上的矢函数。斯托克斯定理建立$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$在曲面$S$上的积分与$\mathbf{v}$在$S$的边界上积分之间的等式。

设S的参数表示为

$$\mathbf{r}(s,\ t)=X_1(s,\ t)\mathbf{e}_1+X_2(s,\ t)\mathbf{e}_2+X_3(s,\ t)\mathbf{e}_3.$$

$$(s,\ t)\in D,$$

这里D是$(s,\ t)$平面内的有界区域，那么其正的单位法矢函数是

$$\mathbf{n}(s,\ t)=|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|^{-1}\left[J\left(\frac{x_2,\ x_3}{s,\ t}\right)\mathbf{e}_1+J\left(\frac{x_3,\ x_1}{s,\ t}\right)\mathbf{e}_2\right.$$

$$\left.+J\left(\frac{x_1,\ x_2}{s,\ t}\right)\mathbf{e}_3\right].$$

设$\mathbf{v}$是一连续矢场，它定义在S上，在坐标系下

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)=v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1$$
$$+v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2+v(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3.$$

由S是光滑曲面，数量积$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$在$S$上连续，直接计算之，得

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|^{-1}\left[v_1 J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)+v_2 J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)\right.$$
$$\left.+v_3 J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)\right].$$

定义 $\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$ (15·62)

称为矢场$\mathbf{v}$在曲面元素S上的曲面积分。dS按

$$dS=|\mathbf{r}_S\times\mathbf{r}_t|\,dA_{st}$$

计算，dA_{st}是平面区域D的面积元素。(15·62)之积分

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_D\left[v_1 J\left(\frac{x_2, x_3}{s, t}\right)+v_2 J\left(\frac{x_3, x_1}{s, t}\right)\right.$$
$$\left.+v_3 J\left(\frac{x_1, x_2}{s, t}\right)\right]dA_{st} \quad (15·63)$$

注　积分 (15·62) 应当与S的参数表示无关，其定义才是合理的，设$\mathbf{r}_1(s', t')$, $(s'_1, t')\in D$, 是S的另一参数表示，根据定理15·21存在一光滑的1—1的变换

$$s=U(s', t'),\ t=V(s', t')$$

使

$$\mathbf{r}[U(s', t'),\ V(s', t')]=\mathbf{r}_1(s', t')$$

按雅可比乘法法则，及积分变量替换公式，并注意到：当且仅当 $J\left(\frac{s,t}{s',t'}\right)>0$ 时，$r_1(s',t')$ 与 $r(s,t)$ 给出 S 的同样定向. 因此于(15·63)中以 (s',t') 代替 (s,t) 在 D_1 上取积分便得出用参数 (s',t') 表示的 $\iint\limits_S v\cdot n dS$. 即 $\iint\limits_S v\cdot n ds$ 的值与 S 之参数表示的选取无关.

如果 S 是分段光滑的，S 能表示为有限个光滑曲面元素 S_1，$S_2\cdots S_m$ 的并. 那么定义

$$\iint\limits_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\sum_{i=1}^{m}\iint\limits_{S_i}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_i dS_i$$

若 ∂S 是由有限条光滑正定向的弧 C_1，C_2，$\cdots C_n$ 所组成的，而 $\mathbf{v}$ 是定义在 $\mathbf{R}_3$ 内含有 ∂S 的一区域上的连续矢场，定义

$$\int\limits_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{C_i}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

为了建立斯托克斯定理，需要以下两个引理.

引理15·6 设 S 是 $\mathbf{R}_3$ 内定向光滑曲面元素，S 的参数表示

$\mathbf{r}(s,t)=x_1(s,t)\mathbf{e}_1+x_2(s,t)\mathbf{e}_2+x_3(s,t)\mathbf{e}_3(s,t)\in D\cup\partial D$，其定向与 S 定向相符合. 设 $\mathbf{v}$ 是定义在含有 $S\cup\partial S$ 的开集 G 上的连续矢场，对 $(x_1,x_2,x_3)\in G$

$$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3) = v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3.$$

那么

$$\int_{\partial s} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial D}\left[\left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial S} + v_2\frac{\partial x_2}{\partial S} + v_3\frac{\partial x_3}{\partial S}\right)dS + \left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial t} + v_2\frac{\partial x_2}{\partial t} + v_3\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)dt\right] \quad (15\cdot64)$$

证明 仅对∂D是一条分段光滑闭曲线的情况证明引理，∂D是几条这样曲线的一般情况容易由此导出。设∂D的参数表示为

$$s = s(\tau),\quad t = t(\tau),\quad a \leqslant \tau \leqslant b.$$

那么方程

$$x_1 = x_1[s(\tau),\ t(\tau)],\quad x_2 = x_2[s(\tau),\ t(\tau)],$$
$$x_3 = x_3[s(\tau),\ t(\tau),\ ]a \leqslant \tau \leqslant b.$$

是∂s的一参数式。运用微分的链法则求得

$$d\mathbf{r} = (dx_1)\mathbf{e}_1 + (dx_2)\mathbf{e}_2 + (dx_3)\mathbf{e}_3$$

$$= \left[\frac{\partial x_1}{\partial s}\ \frac{ds}{d\tau} + \frac{\partial x_1}{\partial t}\ \frac{dt}{d\tau}\right]d\tau\mathbf{e}_1 +$$

$$\left[\frac{\partial x_2}{es}\ \frac{ds}{d\tau} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\ \frac{dt}{d\tau}\right]d\tau\mathbf{e}_2 +$$

$$\left[\frac{\partial x_3}{\partial s}\ \frac{ds}{d\tau} + \frac{\partial x_3}{\partial t}\ \frac{dt}{d\tau}\right]d\tau\mathbf{e}_3$$

于是

$$\int_{\partial S} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_a^b\left[\left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial s}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial s}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)\frac{ds}{d\tau}\right.$$

$$\left.+\left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial t}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial t}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)\frac{dt}{d\tau}\right]d\tau$$

$$=\int_{\partial D}\left[\left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial s}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial s}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial s}\right)ds+\left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial t}\right.\right.$$

$$\left.\left.+v_2\frac{\partial x_2}{\partial t}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)dt\right].$$

引理要求之（15·64）成立。

引理15·7 设$D\cup\partial D$是(s, t)平面内的有界区域，f是在含有$D\cup\partial D$的开集G上的光滑函数，那么存在一函数序列$\{f_n\}$，使f_n，$\frac{\partial f_n}{\partial s}$，$\frac{\partial f_n}{\partial t}$，$n=1，2，\cdots$，都是开集$G\supset D\cup\partial D$上的光滑函数，并且当$n\to\infty$时在$D\cup\partial D$上$f_n\to f$，$\frac{\partial f_n}{\partial s}\to\frac{\partial f}{\partial s}$，$\frac{\partial f_n}{\partial t}\to\frac{\partial f}{\partial t}$收敛是一致的。

引理16·7是第十三章中的定理13·11推论2的直接推论。

设$\mathbf{v}$是定义在R_3内的区域G上的光滑矢场其坐标表示为

$\mathbf{v}(x_1x_2x_3)=v_1(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_1+v_2(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_2+v_3(x_1, x_2, x_3)\mathbf{e}_3$. （15·65）

我们知道cnrlv是G上的矢场：

$$\text{cnrl}\,\mathbf{v}=\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{e}_1+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{e}_2$$

$$+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3. \tag{15·66}$$

定理15.22（斯托克斯定理） 设S是一有界的、闭的、定向的分段光滑的曲面，而$\mathbf{v}$是在含有$S\cup\partial S$的R_3内的区域上的光滑矢场。那么

$$\iint_S(\text{curl}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,dS=\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}. \tag{15·67}$$

证明 首先假定S是光滑定向曲面元素，而$\mathbf{r}$的分量具有连续的二阶导数。由引理15·6的（15·64）式导出

$$\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\partial D}[(v_1\frac{\partial x_1}{\partial s}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial s}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial s})ds$$

$$+\left(v_1\frac{\partial x_1}{\partial t}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial t}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial t}\right)dt].$$

对上式右端积分应用格林定理，并由链法则

$$\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial s}\left[v_1\frac{\partial x_1}{\partial t}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial t}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial t}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial t}\left[v_1\frac{\partial x_1}{\partial s}+v_2\frac{\partial x_2}{\partial s}+v_3\frac{\partial x_3}{\partial s}\right]\right\}dA,$$

上式右端被积函数为

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial x_i}{\partial s}\right)$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s}\right)\frac{\partial x_i}{\partial t}+\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\cdot\partial s}\right]$$

$$-\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t}\right)\frac{\partial x_i}{\partial s}+\sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s\partial t}\right]$$

$$=\sum_{\substack{i;j=1\\ i\neq j}}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial t}-\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial s}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2}-\frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right)J\left(\frac{x_2 x_3}{s,\ t}\right)+\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3}-\frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right)J\left(\frac{x_3,\ x_1}{s,\ t}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1}-\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)J\left(\frac{x_1 x_2}{s,\ t}\right).$$

$$=[(\mathrm{cnrl}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}]\,|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|\ .$$

于是据曲面积分定义的（15·53）式，有

$$\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\iint_D[(\mathrm{curl}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}]\,|\mathbf{r}_s\times\mathbf{r}_t|\,dA_{st}$$

$$=\iint_S(\mathrm{curl}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,dS.$$

如果r的分量$x_1(s, t)$，$x_2(s, t)$，$s_3(s, t)$，不具有连续的二阶导数，它们仅在含有$D\cup\partial D$的开集G上连续可微。那么根据引理15·7，存在$\{x_{1n}\}$，$\{x_{2n}\}$，$\{x_{3n}\}$，它们连同其各偏导数$\frac{\partial x_{1n}}{\partial s}$，$\frac{\partial x_{2n}}{\partial s}$，…$\frac{\partial x_{3n}}{\partial t}$都在$G$上是光滑的，且当$n\to\infty$时在$D\cup\partial D$上分别一致收敛于$x_1$，$x_2$，$x_3$及其相应的各偏导数$\frac{\partial x_1}{\partial s}$，$\frac{\partial x_2}{\partial s}$，…，$\frac{\partial x_3}{\partial t}$。根据上面的证明，(15.67)式对$\forall n$成立，而收敛又是一致的，所以(15.67)对其极限函数保持成立。

最后，若S是一分段光滑的定向曲面，它是分段光滑定向曲面元素S_i的并$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$，$\Gamma_{ij}$作为$S_i$与$S_j$的共同边界弧由$S_i$及$S_j$定向所决定之$\Gamma_{ij}$的定向相反。这样$\partial S=\sum_{i=1}^{k}\partial S_i$，于是

$$\iint_S(\text{cnrl}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,dS=\sum_{i=1}^{k}\int_{\partial S_i}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

推论 设S是一有界、闭的、定向的分段光滑没有边界的曲面，而$\mathbf{v}$是定义在包含S的某开集上的光滑矢场。那么

$$\iint_S(\text{curl}\,\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\,dS=0. \tag{15.68}$$

下面的例题说明怎样把在R_3内一曲面上的积分化为平面区域上的二重积分。

例1 设R_3内的区域$R=\{(x_1, x_2, x_3): x_1^2+x_2^2\leqslant 1, 0\leqslant x_3\leqslant x_1+2\}$。$S$是$R$的边界。而$\mathbf{v}(x_1, x_2, x_3)=2x_1\mathbf{e}_1-3x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$，求积分值

$$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS, \tag{15·69}$$

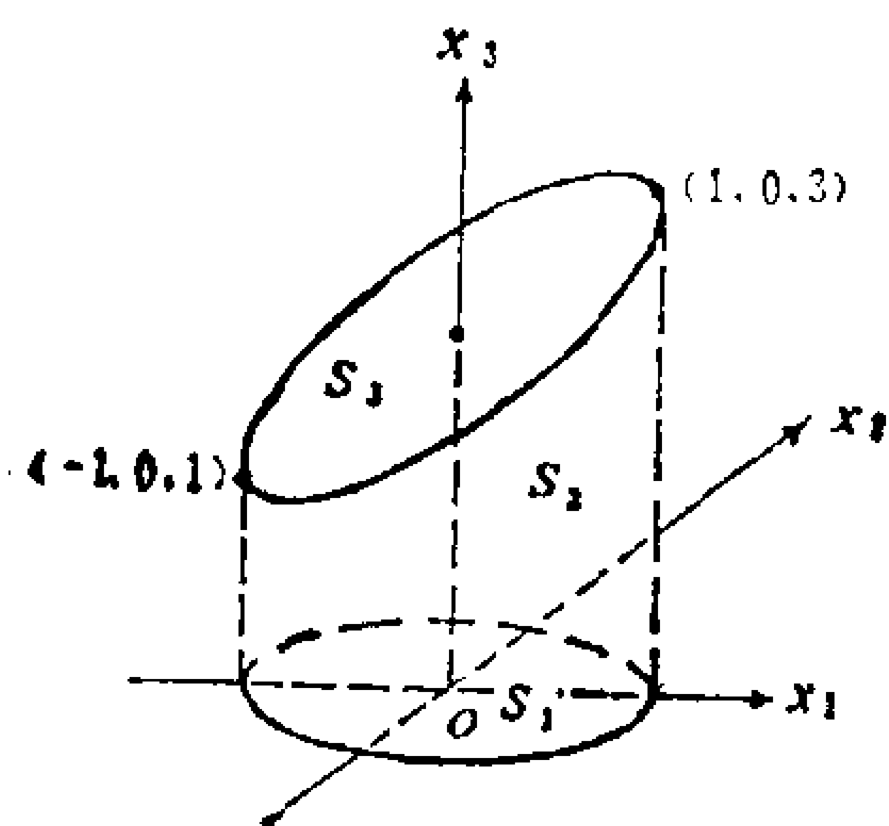


图 15·33

这里$\mathbf{n}$是单位法矢，其方向是由S向外（图15·33）。

解 S是一分段光滑曲面，如图15·33所示，把S分为三个光滑曲面元素。S_1的法矢是$-\mathbf{e}_3$，在S_1上$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=-x_3$。而在$S_1$上$x_3=0$，那么$\iint_{S_1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS=0$。因为$S_3$：$x_3=x_1+2$，在$S_3$上

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2x_1+x_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1+2);$$

$$dS=\sqrt{2}\,dA_{st}$$

这里dA_{st}是(s,t)平面上圆盘$D=\{(s,t): s^2+t^2<1\}$的

面积元素，S_3的参数表示为：$x_1=s$，$x_2=t$，$x_3=s+2$，$(s,t)\in D$。有

$$\iint_{S_3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_D(-S+2)dA_{s,t}=2\pi.$$

为了计算在S_2上的积分，选取柱面坐标系：

$x_1=\cos s$，$x_2=\sin s$，$x_3=t$，$(s,t)\in D_1$，

$D_1\{(s,t):-\pi\leqslant S\leqslant\pi,\ 0\leqslant t\leqslant 2+\cos s\}$。在$S_2$的外法矢$\mathbf{n}=(\cos s)\mathbf{e}_1+(\sin s)\mathbf{e}_2$，从而$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=2\cos^2 s-3\sin^2 s$，因此

$$\iint_{S_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_{D_1}(2\cos^2 s-3\sin^2 s)dA_{s,t}$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2+\cos s}(2-5\sin^2 s)dtds=-2\pi.$$

最后

$$\iint_S\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\iint_{S_1\cup S_2\cup S_3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=0+2\pi-2\pi=0.$$

例2 验证斯托克斯定理。设$\mathbf{v}=x_2\mathbf{e}_1+x_3\mathbf{e}_2+x_1\mathbf{e}_3$，$S_2$是例1中$S$的侧面$S_2$，$\mathbf{n}$指向外。

解 S_2的边界∂S_2由圆周$C_1=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0\}$及椭圆周$C_2=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=x_1+2\}$组成。$C_1$，$C_2$如图15·34所示的定向。对$S_2$取柱面坐标：

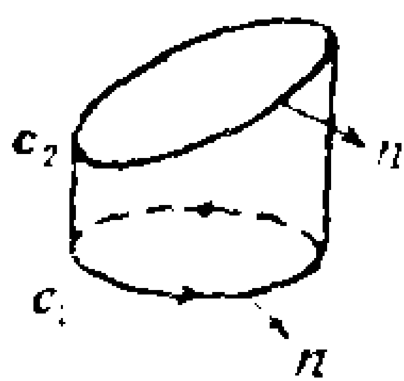


图 15·34

$$S_2=\{(x_1,x_2,x_3): x_1=\cos s,\ x_2=\sin s,\ x_3=t,\ (s,\ t)\in D_1\}$$

$$D_1=\{(s,\ t): -\pi\leqslant s\leqslant\pi,\quad 0\leqslant t\leqslant 2+\cos s\}.$$

把S_2分解为两个光滑曲面元素：对应于$x_2\geqslant 0$及$x_2\leqslant 0$的S_2的部分。那么相应地D_1被分为如图15·35所示的$s\geqslant 0$及$s\leqslant 0$的E_1，E_2两部分。之所以必须作这样的划分，是由于$D_1\to S_2$不是1—1的，$s=\pi$，$s=-\pi$对应着S_2上同一曲线。算出

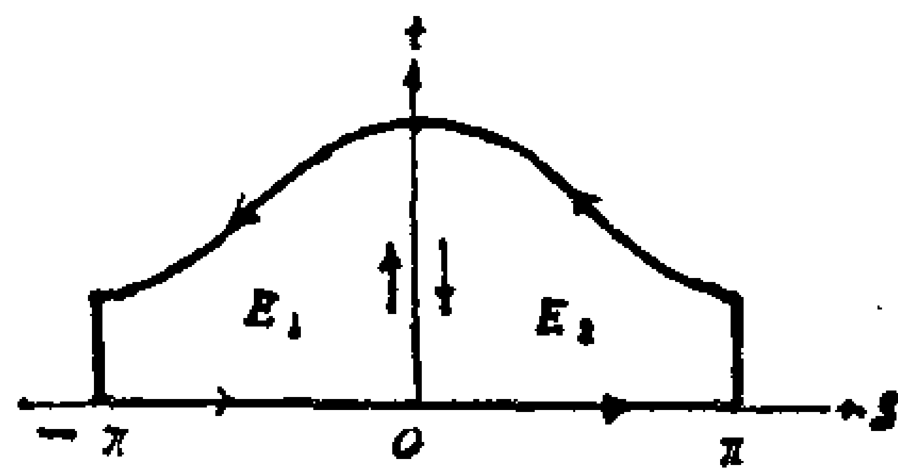


图 15·35

$$J\left(\frac{x_2,\ x_3}{s,\ t}\right)=\cos s,\qquad J\left(\frac{x_3,\ x_1}{s,\ t}\right)=\sin s$$

$$J\left(\frac{x_1,\ x_2}{s,\ t}\right)=0,$$

$$\mathbf{n}=(\cos s)\mathbf{e}_1+(\sin s)\mathbf{e}_2,$$

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{v}=-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3,\qquad dS=dA_{st}.$$

于是

$$\iint_S(\mathrm{curl}\,v)\cdot n\,ds=\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2+\cos\theta}(-\cos\theta-\sin\theta)\,dt\,ds=-\pi. \tag{15·70}$$

沿边界∂S的积分

$$\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{C_1}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}-\int_{-C_2}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}.$$

仍用柱面坐标，在C_1上

$$\mathbf{v}=(\sin s)\mathbf{e}_1+(\cos s)\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{r}=[(-\sin s)\mathbf{e}_1+(\cos s)\mathbf{e}_2]ds;$$

在C_2上

$$\mathbf{v}=(\sin s)\mathbf{e}_1+(2+\cos s)\mathbf{e}_2+(\cos s)\mathbf{e}_3,$$

$$d\mathbf{r}=[-\sin s)\mathbf{e}_1+(\cos s)\mathbf{e}_2+(-\sin s)\mathbf{e}_3]ds.$$

作数量积$\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$并积分

$$\int_{C_1}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin^2 s)ds=-\pi. \qquad (15\cdot71)$$

$$\int_{-C_2}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}=\int_{-\pi}^{\pi}(-\sin^2\theta+2\cos\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)d\theta=0. \qquad (15\cdot72)$$

综合（15·70），（15·71），（15·72），$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS=\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$成立。

习　题

习题1—6计算$\iint_S \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$，$S$，按指出的定向。

1. $\mathbf{v}=(x_1+1)\mathbf{e}_1-(2x_2+1)\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$；$S$是以（1,0,0），（0，1，0），（0，0，1）为顶点的三角形面n指向为背离原点。
2. $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$；$S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2=2x_3,\ (x_1-1)^2+x_2^2\leqslant 1\}$，n按$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3>0$定向。

3. $\mathbf{v}=x_1^2\mathbf{e}_1+x_2^2\mathbf{e}_2+x_3^2\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2=x_3^2;\ 1\leqslant x_3\leqslant 2\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3>0.$$

4. $\mathbf{v}=x_1x_2\mathbf{e}_1+x_1x_3\mathbf{e}_2+x_2x_3\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_2^2=2-x_1;\ \ x_3^3\leqslant x_2\leqslant x_3^{\frac{1}{2}}\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_1>0.$$

5. $\mathbf{v}=x_2^2\mathbf{e}_1+x_3\mathbf{e}_2-x_1\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_2^2=1-x_1,\ 0\leqslant x_3\leqslant x_1,\ x_1\geqslant 0\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_1>0.$$

6. $\mathbf{v}=2x_1\mathbf{e}_1-x_2\mathbf{e}_2+3x_3\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_3^2=x_1;\ x_2^2\leqslant 1-x_1;\ x_2\geqslant 0\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_1>0.$$

习题7—12，验证斯托克斯定理。

7. $\mathbf{v}=x_3\mathbf{e}_1+x_1\mathbf{e}_2+x_2\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_3=1-x_1^2-x_2^2,\ x_3\geqslant 0\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3>0.$$

8. $\mathbf{v}=x_2^2\mathbf{e}_1+x_1x_2\mathbf{e}_2-2x_1x_3\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_3\geqslant 0\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3>0.$$

9. $\mathbf{v}=-x_2x_3\mathbf{e}_3$； $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2=4,\ x_1^2+x_2^2\geqslant 1\}$， $\mathbf{n}$指向球外侧．

10. $\mathbf{v}=-x_3\mathbf{e}_2+x_2\mathbf{e}_3$； S是柱面坐标系下的柱面， $r=\theta$， $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，以平面$x_3=0$为下界面，以锥面$x_1^2+x_2^2=x_3^2$为上界面，对$\theta>0$，$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3>0$。

11. $\mathbf{v}=x_2\mathbf{e}_1+x_3\mathbf{e}_2+x_1\mathbf{e}_3$；$S=\{(x_1,x_2,x_3):x_3^2=4-x_1,\ x_1\geqslant x_2^2\}$，

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_1>0.$$

12. $\mathbf{v}=x_3\mathbf{e}_1-x_1\mathbf{e}_3$；$S$以柱面坐标给出的柱面$r=2+\cos\theta$在平面$x_3=0$以上及锥$x_3^2=x_1^2+x_2^2$外部的曲面；$\mathbf{n}$从柱面指向外侧。

习题13—15，运用斯托克斯定理计算$\int_{\partial S}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{r}$，$\partial S$按$S$定向。

13. $\mathbf{v}=r^{-3}\mathbf{r}$，$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$，$r=|\mathbf{r}|$；$S$是例2中的$S_2$。

14. $\mathbf{v}=(e^{x_1}\sin x_2)\mathbf{e}_1+(e^{x_1}\cos x_2-x_3)\mathbf{e}_2+x_2\mathbf{e}_3$；$S$是习题3中的曲面。

15. $\mathbf{v}=(x_1^2+x_3)\mathbf{e}_1+(x_1+x_2^2)\mathbf{e}_2+(x_2+x_3^2)\mathbf{e}_3$，$S=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_3\geqslant(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}\}$，$\mathbf{n}$指向球面的外侧。

16. 设S由$x_3=f(x_1,\ x_2)$，$(x_1,\ x_2)\in D=\{x_1,\ x_2):x_1^2+x_2^2\leqslant1\}$给出，$f$是光滑的，而$\mathbf{v}=(1-x_1^2-x_2^2)\mathbf{W}(x_1,x_2,x_3)$，$\mathbf{W}$是定义在含有$S$的开集$G$上光滑矢场。证明

$$\iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}ds=0.$$

17. 设$\mathbf{v}=r^{-3}(x_2\mathbf{e}_1+x_3\mathbf{e}_2+x_1\mathbf{e}_3)$，$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$，$r=|\mathbf{r}|$，$S$是球面$\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$，$\mathbf{n}$指向球面外侧。

证明 $\iint_{\vec{S}}(\operatorname{curl}\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}ds=0.$

18. 设光滑曲面S有两不同参数表示：

$\mathbf{r}(s, t)$, $(s, t)\in D$, $\mathbf{r}_1(s', t')$, $(s', t')\in D_1$. S上定义一光滑矢场。求$(\text{curl}\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}$对于两参数表示之间的关系。

*19. M为莫比乌斯带。对这一曲面斯托克斯定理的证明何处将受到破坏？

§ 15·9 发散量定理

本节建立格林定理的另一推广——发散量定理。这一定理确定一$\mathbf{R}_3$内的三维区域上函数导数的积分与在边界上积分间的关系。

设$\mathbf{v}=v_1(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_1+v_2(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_2+v_3(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_3$是定义在$\mathbf{R}_3$内区域$E$上的矢场。已经知道$\text{div}\,\mathbf{v}$确定一数量场，在坐标系下

$$\text{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+\frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

发散量定理是证明公式

$$\iiint_E \text{div}\,\mathbf{v}\,dv=\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds, \tag{15·73}$$

这里∂E按选取$\mathbf{n}$为由∂E指向E外的定向。先建立（15·73）的特殊情况，然后证明一般情况下公式成立。

引理15·8 设D是(x_1,x_2)平面上具有光滑边界的区域，$f: D\cup\partial D\to\mathbf{R}_1$是分段光滑函数。定义

$$E=\{(x_1,x_2,x_3):(x_1,x_2)\in D,\ c<x_3<f(x_1,x_2)\},$$

c为常数。

假定

$$\mathbf{v}=u(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_3,$$

u及$\frac{\partial u}{\partial x_3}$在$R_3$内包含$E\cup\partial E$的某开集上都是连续的。那么

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}dv=\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds,$$

$\mathbf{n}$是由∂E指向E外的∂E的单位法矢。

证明 由$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial u}{\partial x_3}$，因而

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}dV=\iiint_E \frac{\partial u}{\partial x_3}dV$$

$$=\iint_D\left(\int_C^{f(x_1;x_2)}\frac{\partial u}{\partial x_3}dx_3\right)dA_{x_1;x_2}$$

$$=\iint_D\{u[x_1,x_2,f(x_1,x_2)]-u(x_1,x_2,c)\}dA_{x_1;x_2}$$

$$(15\cdot74)$$

表示$\partial E=S_1\cup S_2\cup S_3$，其中$S_1$是在$x_3=c$平面上与$D$全等的区域；$S_2$是$\partial E$的柱侧面；而$S_3$是相应于$x_3=f(x_1,x_2)$，$(x_1,x_2)\in D$的曲面（图15·36）。下面证明（15·74）之左端等于

$$\iiint_{S_1\cup S_2\cup S_3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds.$$

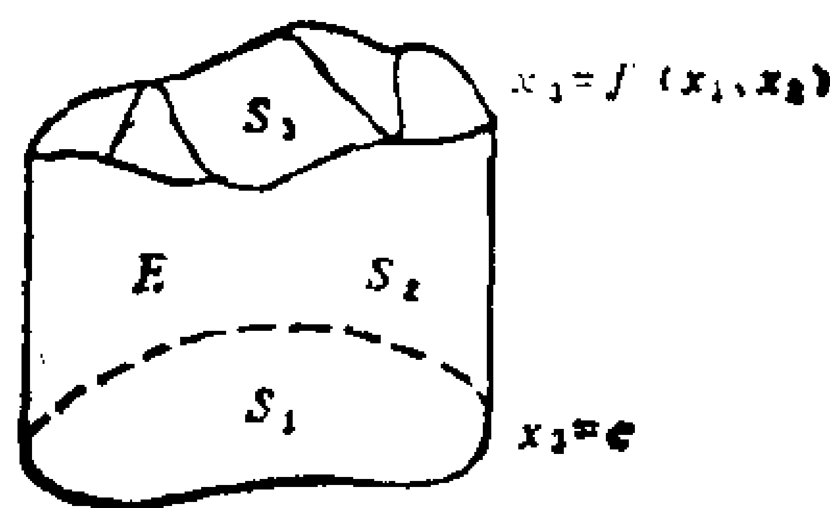


图 15·36

沿S_2，n与(x_1,x_2)平面相平行，那么$\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_3=0$。在$S_2$上有$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0$因而

$$\iint_{S_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=0。\tag{15·75}$$

沿S_1的外法矢显然是$-\mathbf{e}_3$，所以

$$\iint_{S_1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=-\iint_D u(x_1,x_2,c)dA_{x_1x_2}\tag{15·76}$$

对于S_3，单位法矢函数为

$$\mathbf{n}=\frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathbf{e}_1-\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}{\left[1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

因此

$$\iint_{S_3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=\iint_D u[x_1,x_2,f(x_1,x_2)]dAx_1x_2.\tag{15·77}$$

把（15·74）与（15·75），（15·76），（15·77）相对照，便得

$$\iiint_E \mathrm{div}\mathbf{v}dV$$

$$=\iint_D\{u[x_1,x_2,f(x_1,x_2)]-u(x_1,x_2,c)\}dA_{x_1x_2}$$

$$=\iint_{S_3}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds+\iint_{S_1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds+\iint_{S_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds$$

$$=\iint_{\partial E} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds.$$

引理15·9 设$\mathbf{v}=u_1(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_1+u_2(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_2$，$D$，$f$，$E$的条件与引理15·8所设相同。$u_1$，$u_2$是包含$E\cup\partial E$的某开集上的光滑函数。那么

$$\iiint_E \mathrm{div}\,\mathbf{v}dV=\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds$$

这里$\mathbf{n}$是由∂E指向E外的∂E单位法矢。

证明 定义$U_1(x_1,x_2,x_3)$，$U_2(x_1,x_2,x_3)$：

$$U_1(x_1,x_2,x_3)=-\int_c^{x_3}u_1(x_1,x_2,t)dt,$$

$$U_2(x_1,x_2,x_3)=\int_c^{x_3}u_2(x_1,x_2,t)dt.$$

此外，定义

$$\mathbf{w}=U_2\mathbf{e}_1+U_1\mathbf{e}_2,\quad U_3=-\frac{\partial U_1}{\partial x_1}+\frac{\partial U_2}{\partial x_2},$$

$$\mathbf{u}=-U_3\mathbf{e}_3.$$

显然$\mathbf{w}$是光滑矢场而U_3，$\dfrac{\partial U_3}{\partial x_3}$都是连续的。因此

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{w}=-\frac{\partial U_1}{\partial x_3}\mathbf{e}_1+\frac{\partial U_2}{\partial x_3}\mathbf{e}_2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1}-\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)\mathbf{e}_3$$

$$=u_1(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_1+u_2(x_1,x_2,x_3)\mathbf{e}_2-U_3\mathbf{e}_3$$

$$=\mathbf{v}+\mathbf{u},$$

而

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_3}=-\operatorname{div}\mathbf{u}. \qquad (15\cdot78)$$

因为∂E是分段光滑且没有边界的曲面，由斯托克斯定理的推论可知

$$\iint_{\partial E}(\operatorname{curl}\mathbf{w})\cdot\mathbf{n}ds=\iint_{\partial E}(\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot\mathbf{n}ds=0.$$

对$\mathbf{u}=-U_3\mathbf{e}_3$用引理15·8，有

$$\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=-\iint_{\partial E}\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}ds=-\iiint_{E}\operatorname{div}\mathbf{u}dV. \qquad (15\cdot79)$$

把（15·78）代入（15·79），便得引理的结果。

下面对于相当广泛的一类区域，建立发散量定理。

定义 R_3内区域E称为正规的$\Longleftrightarrow$(i)∂E由有限个分段光滑的曲面组成，每个曲面没有边界；(ii)在∂E的每个点p，可引进以p点为原点的笛卡尔坐标系，在这坐标系中有一柱形域Γ，$\Gamma=\{(x_1,x_2,x_3):(x_1,x_2)\in D,\ -\infty<x_3<+\infty\}$，$D$是$x_3=0$的平面上含有原点的区域，$\Gamma$具有性质：$\Gamma\cap\partial E$可以表示成$x_3=f(x_1,x_2)$，$(x_1,x_2)\in D\cup\partial D$的曲面，且$f$是分段光滑的（图15·37）；(iii)集$\Gamma_1=\{(x_1,x_2,x_3):(x_1,x_2)\in D,\ -C<x_3<f(x_1,x_2)\}$对某一正数$C$（依赖于点$p$），整个地包含在$E$之内。

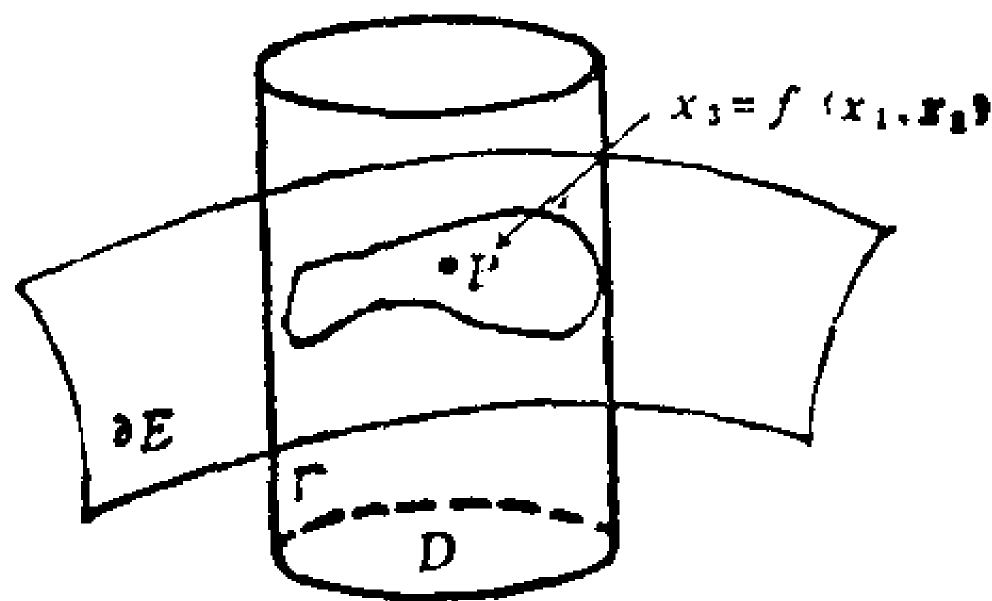


图 15·37

注 如果E是正规区域，那么∂E上除去面积为零的有限多条弧上的点之外，∂E的其他任一点p是∂E的光滑曲面元素的内点.过这样的p点作曲面的法线，p点在该法线上的邻域被p点分为两个以p点为共同端点的线段，两线段之一落在E内，另一线段则在E外.此外，当p在∂E的光滑曲面元素内变动时，$n(p)$连续地变化.

定理15·23（发散量定理） 设E是R_3内的一闭的有界正规区域，而$\mathbf{v}$是在含有$E\cup\partial E$的某开集G上的连续可微的矢场.那么

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}\,dV=\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{15·80}$$

这里$\mathbf{n}$是由∂E指向E外的单位法矢函数.

证明 按正规区域的定义，对每一点$p\in\partial E$有相伴的坐标系及一柱形区域Γ. 以Γ_p表示Γ的界于$-c<x_3<c$的部分（这里c是正规区域定义中的依赖于p的常数c）. 对于E的内点p，引进以p点为原点的坐标系及其棱平行于坐标轴的立方体Γ_p，且$\overline{\Gamma}_p\subset E$. 显然族$\{\Gamma_p\}$是$E\cup\partial E$的开覆盖，因为$E\cup\partial E$是紧集，存在有限个$\Gamma_{p_1}$，$\Gamma_{p_2}$，…，$\Gamma_{p_n}$覆盖了$E\cup\partial E$. 如同格林定理证明中所述的那样，据§13·3，$\exists G$上的$C^\infty$类的单位分解$\varphi_1$，$\varphi_2$，…，$\varphi_n$，每一$\varphi_i$在$G-F_i$上为零，这里$F_i$是$\Gamma_{p_i}$内的一紧子集（参看§15·4.习题14）. 定义

$$\mathbf{v}_i=\varphi_i\mathbf{v},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n.$$

每个$\mathbf{v}_i$是在G上连续可微的矢场. 在$G-F_i$上等于零，而$\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{v}_i$，因此只要对每一$\mathbf{v}_i$建立结果就够了. 首先假定

p_i是E的内点，则Γ_{p_i}满足$p_i\in\Gamma_{p_i}\subset\overline{\Gamma}_{p_i}\subset E$，而$\mathbf{v}_i$在$\partial\Gamma_{p_i}$上成为零．因此由引理15•9

$$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}_i dV=\iiint_{\Gamma_{p_i}}\operatorname{div}\mathbf{v}_i dV=\iint_{\partial\Gamma_{p_i}}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}ds=0.$$

而由于在∂E上$\mathbf{v}_i=0$，有

$$\iint_{\partial E}\mathbf{v}_i\mathbf{n}ds=0,\quad 即\iiint_E\operatorname{div}\mathbf{v}_i\,dV=\iint_{\partial E}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}ds=0.$$

于是对于这样的$\mathbf{v}_i$（相应于E的内点$p_i\in\Gamma_{p_i}$的）定理结论成立。现在假定$p_i\in\partial E$。定义$E_i=\Gamma_{p_i}\cap E$，那么在下述三集上都有$\mathbf{v}_i=0$：(i)$E-E_i$；(ii)$\partial E-\gamma_i$，这里$\gamma_i=\partial E\cap\Gamma_{p_i}$；(iii)$\partial E_i-\gamma_i$。由$E_i$是引理15•8那样的区域，$\mathbf{v}_i$可看作引理15•8、15•9中那样的矢之和，据引理15•8及引理15•9，有

$$\iiint_E\operatorname{div}\mathbf{v}_i dV=\iiint_{E_i}\operatorname{div}\mathbf{v}_i dV=\iint_{\partial E_i}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}ds$$

$$=\iint_{\gamma_i}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}ds=\iint_{\partial E}\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}ds.$$

综合起来，定理对所有$\mathbf{v}_i$都成立，于是

$$\iiint_E\operatorname{div}\mathbf{v}dV=\iiint_E\left(\sum_{i=1}^n\operatorname{div}\cdot\mathbf{v}_i\right)dV=\iint_{\partial E}\left(\sum_{i=1}^n\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{n}\right)ds$$

$$=\iint_{\partial E} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds.$$

定理获证。

例1 设区域$E=\{(x_1,x_2,x_3):1\leqslant x_1^2+x_2^2+x_3^2\leqslant 9\}$，$\mathbf{r}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$，而$\mathbf{v}=r^{-3}\mathbf{r}$，$r=|\mathbf{r}|$。验证发散量定理。

解 设$S_1=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\}$，

$$S_2=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2=9\}$$

S_1，S_2的n都取由曲面背向原点的方向。那么

$$\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=\iint_{S_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds-\iint_{S_1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds.$$

容易算出$\operatorname{div}\mathbf{v}=0$，因而$\iiint_E \operatorname{div}\mathbf{v}dV=0$。在$S_1$及$S_2$上$\mathbf{n}=r^{-1}\mathbf{r}$。于是

$$\iint_{S_2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds-\iint_{S_1}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds=\frac{1}{9}A(S_2)-A(S_1)=0.$$

例2 设$E=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2<1,\ 0<x_3<x_1+2\}$，而 $\mathbf{v}=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)\mathbf{e}_1+\frac{1}{2}(x_2^2+x_3x_1^2)\mathbf{e}_2+\frac{1}{2}(x_3^2+x_1^2x_2)\mathbf{e}_3$。使用发散量定理计算$\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds$。

解 算得$\operatorname{div}\mathbf{v}=x_1+x_2+x_3$。以$F$表示单位圆盘区域。

据发散量定理

$$\iint_{\partial E} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$=\iiint_E (x_1+x_2+x_3)dV$$

$$=\iint_F \left[(x_1+x_2)x_3+\frac{1}{2}x_3^2\right]_0^{x_1+2} dA_{x_1 x_2}$$

$$=\frac{1}{2}\iint_F [2x_2(x_1+2)+2x_1^2+4x_1+(x_1^2+4x_1+4)]dA_{x_1 x_2}$$

$$=\frac{1}{2}\iint_F (3x_1^2+4)dA_{x_1 x_2}=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}(3r^2\cos^2\theta+4)rdrd\theta$$

$$=\frac{19}{8}\pi.$$

习 题

习题1—8通过计算 $\iiint_E \mathrm{div}\,\mathbf{v}dV$ 及 $\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds$ 验证发散量定理。

1． $\mathbf{v}=x_1x_2\mathbf{e}_1+x_2x_3\mathbf{e}_2+x_3x_1\mathbf{e}_3$； E 为以（0，0，0），（1，0，0），（0，1，0），（0，0，1）为顶点的四面体。

2． $\mathbf{v}=x_1^2\mathbf{e}_1-x_2^2\mathbf{e}_2+x_3^2\mathbf{e}_3$； $E=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2<4,\ 0<x_3<2\}$。

3. $\mathbf{v}=2x_1\mathbf{e}_1+3x_2\mathbf{e}_2+4x_3\mathbf{e}_3$; $E=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\}$.

4. $\mathbf{v}=x_1^2\mathbf{e}_1+x_2^2\mathbf{e}_2+x_3^2\mathbf{e}_3$; $E=\{(x_1,x_2,x_3): x_2^2<2-x_1,\ 0<x_3<x_1\}$.

5. $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$; $E=E_1\cap E_2$, $E_1=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2>1\}$, $E_2=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\}$.

6. $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1-2x_2\mathbf{e}_2+3x_3\mathbf{e}_3$; $E=E_1\cap E_2$, $E_1=\{(x_1,x_2,x_3): x_2^2<x_1\}$, $E_2=\{(x_1,x_2,x_3): x_3^2<4-x_1\}$.

7. $\mathbf{v}=r^{-3}(x_3\mathbf{e}_1+x_1\mathbf{e}_2+x_2\mathbf{e}_3)$, $r=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^{\frac{1}{2}}$

$E=\{(x_1,x_2,x_3): 1<x_1^2+x_2^2+x_3^2<4\}$.

8. $\mathbf{v}=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3$; $E=E_1\cap E_2$, $E_1=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2<4\}$, $E_2=\{(x_1,x_2,x_3): x_1^2+x_2^2-x_3^2>1\}$.

用发散量定理计算习题9—11中的$\iint_{\partial E}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}ds$。

9. $\mathbf{v}=x_2e^{x_3}\mathbf{e}_1+(x_2-2x_3e^{x_1})\mathbf{e}_2+(x_1e^{x_2}-x_3)\mathbf{e}_3$;

$E=\{(x_1,x_2,x_3): [(x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}}-2]^2+x_3^2<1\}$.

10. $\mathbf{v}=x_1^3\mathbf{e}_1+x_2^3\mathbf{e}_2+x_3^3\mathbf{e}_3$; $E=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2+x_3^2<1\}$.

11. $\mathbf{v}=x_1^3\mathbf{e}_1+x_2^2\mathbf{e}_2+x_3^2\mathbf{e}_3$, $E=\{(x_1,x_2,x_3):x_1^2+x_2^2<1,\ 0<x_3<x_1+2\}$.

*12. 设E是$\mathbf{R}_3$内的正规区域。u，$\mathbf{v}$分别是含有$E\cup\partial E$的开集G上的光滑的数量场、光滑矢场。

证明

$$\iiint_E u\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dV=\iint_{\partial E}u\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,ds-\iiint_E(\mathrm{grad}\,u)\cdot\mathbf{v}\,dV.$$

*13. 设E及G同习题12所设。u，$\mathrm{grad}\,u$及$\mathbf{v}$在G上光滑。以$\frac{\partial}{\partial n}$表示在$\partial E$上沿法矢$n$的方向导数。$\Delta$表示拉普拉斯算子：

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial}{\partial x_3^2}\right).$$

证明

$$\iiint_E \mathbf{v}\Delta u\,dV=\iint_{\partial E}u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds-\iiint_E(\mathrm{grad}\,u)\cdot(\mathrm{grad}\,v)dV.$$

如果u是$\Delta u=0$在E内的解，证明

$$\iint_{\partial E}\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=0.$$

§15·10 外微分与一般的斯托克斯定理

格林定理（定理15·20）建立了函数沿平面区域D的边界∂D的线积分与函数的导数在D上的重积分的关系．斯托克斯定理（定理15·22）与发散量定理（定理15·23）是格林定理在$\mathbf{R}_3$中的推广．上述三个定理都可以看成是$\mathbf{R}_1$中微积分基本定理在$\mathbf{R}_2$,$\mathbf{R}_3$中的推广．很自然，应当讨论这一在$\mathbf{R}_1$、$\mathbf{R}_2$与$\mathbf{R}_3$中的结果（函数在边界上的积分等于其导数在区域内的积分）是否对$\mathbf{R}_N$中的p维区域也成立的问题．

本节首先在$\mathbf{R}_3$中引进外积、微分形式及其外微分，把微积分基本定理及格林定理、斯托克斯定理、发散量定理概括为统一的形式，然后把这一统一形式的定理推广为$\mathbf{R}_N$中关于p维区域的一般的斯托克斯定理．

格林定理、斯托克斯定理和发散量定理所论及的平面、曲线、曲面、空间区域都是有定向的，为了概括出它们的统一的形式，要采用“有向长度”、“有向面积”、“有向体积”等代替无向的相应的量．“有向的长度”以矢来表示，“有向面积”、“有向体积”能用矢的外积恰当地表达出来．关于矢的外积运算及其基本性质，读者可参看本书附录３．

$\mathbf{R}_3$中的有向线段微元$d\mathbf{r}$可表示成

$$d\mathbf{r}=dx_1\mathbf{e}_1+dx_2\mathbf{e}_2+dx_3\mathbf{e}_3,$$

$d\mathbf{r}$在正交基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$之下的坐标为$(dx_1,dx_2,dx_3)$．矢$d\mathbf{r}^{(1)}$与$d\mathbf{r}^{(2)}$所张成的平行四边形的“有向面积”可表示为

$$d\mathbf{r}^{(1)}\wedge d\mathbf{r}^{(2)}=\Big(\sum_{i=1}^{3}dx_i^{(1)}\mathbf{e}_i\Big)\wedge\Big(\sum_{i=1}^{3}dx_i^{(2)}\mathbf{e}_i\Big)$$

$$
=\begin{vmatrix} dx_1^{(1)} & dx_2^{(1)} \\ dx_1^{(2)} & dx_2^{(2)} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+\begin{vmatrix} dx_2^{(1)} & dx_3^{(1)} \\ dx_2^{(2)} & dx_3^{(2)} \end{vmatrix} \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3
$$

$$
+\begin{vmatrix} dx_3^{(0)} & dx_1^{(0)} \\ dx_3^{(2)} & dx_1^{(2)} \end{vmatrix} \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1.
$$

$d\mathbf{r}^{(1)}$，$d\mathbf{r}^{(2)}$，$d\mathbf{r}^{(3)}$三个矢所张成平行六面体的“有向体积”可表示成

$$
d\mathbf{r}^{(1)}\wedge d\mathbf{r}^{(2)}\wedge d\mathbf{r}^{(3)}
$$

$$
=\det(d\mathbf{r}^{(1)},\ d\mathbf{r}^{(2)},\ d\mathbf{r}^{(3)})\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3.
$$

为了书写简明起见，省略$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_3$，及$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$，$\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$，简直地以$dx_i$来记$dx_i\mathbf{e}_i$，$dx_1\wedge dx_2$来记$dx_1dx_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$等。

定义 $dx_1\wedge dx_2$，$dx_2\wedge dx_3$，$dx_3\wedge dx_1$分别表示dx_1与dx_2，dx_2与dx_3，dx_3与dx_1张成平行四边形的“有向面积”；$dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$表示$dx_1$，$dx_2$，$dx_3$张成平行六面体的“有向体积”，并规定外积运算“$\wedge$”服从以下运算律：

$$
\left.\begin{aligned}
&(\mathrm{i})\ dx_1\wedge dx_2=-dx_2\wedge dx_1 \quad \text{（斜对称律）}\\
&(\mathrm{ii})\ dx_1\wedge(dx_2+dx_3)=dx_1\wedge dx_2+dx_1\wedge dx_3 \quad \text{（分配律）}\\
&(\mathrm{iii})\ (Kdx_1)\wedge dx_2=K(dx_1\wedge dx_2) \quad \text{（结合律）}\\
&(\mathrm{iv})\ (dx_1\wedge dx_2)\wedge dx_3=dx_1\wedge(dx_2\wedge dx_3) \quad \text{（结合律）}
\end{aligned}\right\} \quad (15\cdot 81)
$$

分别称 dx_i，$dx_i\wedge dx_j$，$dx_i\wedge dx_j\wedge dx_k(i,j,K=1,2,3)$为基本一次微分形式，基本二次微分形式，基本三次微分形式。

引理15·9 R_3中的基本三次微分形式具有性质：

（i）连乘外积中若有两个相同因子，则其值为零；

（ii）连乘外积不等于零，则其值是$dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$或$-(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3)$两者之一。

（iii）四个以上的基本一次微分形式的连乘外积均等于零。

证明 （i），（ii）根据定义及外积运算律便得，细节留给读者。（iii）如 $(dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3)\wedge dx_3=dx_1\wedge(dx_2\wedge dx_3\wedge dx_3)$由（i）即得。

设F、P、Q、R为三维空间R_3中的连续可微函数，定义R_3中微分形式如下：

定义 $\overset{0}{\omega}=F$

$$\overset{1}{\omega}=Pdx_1+Qdx_2+Rdx_3,$$

$$\overset{2}{\omega}=Pdx_2\wedge dx_3+Qdx_3\wedge dx_1+Rdx_1\wedge dx_2,$$

$$\overset{3}{\omega}=Fdx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$$

分别称为R_3中的零次、一次、二次、三次微分形式。P，Q，R，F等称为外微分形式的系数。

根据外积运算律及性质可对微分形式施行外积运算。例如

$$\overset{1}{\omega}_1\wedge\overset{1}{\omega}_2=(P_1dx_1+Q_1dx_2+R_1dx_3)\wedge(P_2dx_1+Q_2dx_2+R_2dx_3)$$

$$=(P_1Q_2-Q_1P_2)dx_1\wedge dx_2+(Q_1R_2$$
$$-R_1Q_2)dx_2\wedge dx_3+(R_1P_2$$
$$+P_1R_2)dx_3\wedge dx_1$$

$$=\begin{vmatrix} P_1 & Q_1 \\ P_2 & Q_2 \end{vmatrix} dx_1\wedge dx_2+\begin{vmatrix} Q_1 & R_1 \\ Q_2 & R_2 \end{vmatrix} dx_2\wedge dx_3$$

$$+\begin{vmatrix} R_1 & P_1 \\ R_2 & P_2 \end{vmatrix} dx_3\wedge dx_1.$$

$$\overset{1}{\omega}_1\wedge\overset{2}{\omega}_2=(P_1dx_1+Q_1dx_2+R_1dx_3)\wedge(P_2dx_2\wedge dx_3$$
$$+Q_2dx_3\wedge dx_1+R_2dx_1\wedge dx_2)$$
$$=(P_1P_2+Q_1Q_2+R_1R_2)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3.$$

引理15·10 微分形式的外积有如下性质：

(i) $\overset{p}{\omega}\wedge(\overset{q}{\omega}_1+\overset{q}{\omega}_2)=\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\omega}_1+\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\omega}_2$；

(ii) $\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\omega}=(-1)^{pq}\overset{q}{\omega}\wedge\overset{p}{\omega}$；

(iii) $\overset{p}{\omega}\wedge(\overset{q}{\omega}\wedge\overset{r}{\omega})=(\overset{p}{\omega}\wedge\overset{q}{\omega})\wedge\overset{r}{\omega}$

这里p,q,r可任取0，1，2，3各数。

引理是外积运算律的直接结果，证明留给读者。

下面定义外微分运算，以便用微分形式及其外微分的积分关系统一描述格林定理、斯托克斯定理及发散量定理。

定义 设$\overset{K}{\omega}(K=0,1,2,3)$是$R_3$中的微分形式，定义其外

微分$\overset{K}{d\omega}$如下：

$$\left.\begin{aligned}
\overset{0}{d\omega} &= dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 \\
&\quad + \frac{\partial F}{\partial x_3}dx_3; \\
\overset{1}{d\omega} &= dP\wedge dx_1 + dQ\wedge dx_2 + dR\wedge dx_3; \\
\overset{2}{d\omega} &= dP\wedge dx_2\wedge dx_3 + dQdx_3\wedge dx_1 \\
&\quad + dR\wedge dx_1\wedge dx_2 \\
\overset{3}{d\omega} &= dF\wedge dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3 \\
d(\overset{p}{\omega}_1 + \overset{p}{\omega}_2) &= d\overset{p}{\omega}_1 + d\overset{p}{\omega}_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (15\cdot82)$$

由定义可见，对于零次微分形式外微分运算就是微分运算。K次微分形式的外微分是$K+1$次微分形式。运用外积运算律与性质上述（15•82）各式简化为

$$\left.\begin{aligned}
\overset{1}{d\omega} &= \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3 \\
&\quad + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1 \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2 \\
\overset{2}{d\omega} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3}\right)dx_1 \\
&\quad \wedge dx_2\wedge dx_3 \\
\overset{3}{d\omega} &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (15\cdot83)$$

引理15•11 外微分运算具有下列简便的性质。

（i） $d(C_1\omega_1+C_2\omega_2)=C_1d\omega_1+C_2d\omega_2$

（C_1,C_2为实数）

（ii） 设ω_1是K次的，则

$$d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^K\omega_1\wedge d\omega_2.$$

（iii） 对任何K次的其系数具有二阶导数的外微分形式$\overset{K}{\omega}$，都有

$$d(d\overset{K}{\omega})=0.$$

（iv） 若$d\overset{p}{\omega}=0$则$\exists\, p-1$次微分形式$\overset{p-1}{\omega}$，使得

$$\overset{p}{\omega}=d\overset{p-1}{\omega}.$$

性质（i）及（ii）是外微分运算定义及外积运算律的直接结论。性质（iii）可根据（i），（ii）归成对$\overset{\circ}{\omega}$的情形，在$\overset{\circ}{\omega}$的情况之下据$\dfrac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2F}{\partial x_jx_i}$便得。性质（iii）一般情况下称为潘加莱引理。（iv）是潘加莱引理的逆。对$\mathbf{R}_3$中的情况可就$p=1,2,3$逐一验证。如$\overset{1}{\omega}=p\,dx_1+Q\,dx_2+Rdx_3$，$d\overset{1}{\omega}=0$ 即

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)dx_2\wedge dx_3+\left(\frac{\partial p}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)dx_3\wedge dx_1$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)dx_1\wedge dx_2\equiv0$$

据定理15·17，便得$\exists u$，使$du=\overset{1}{\omega}$，这里$u=\overset{\circ}{\omega}$。至于定理15·17要求所论的区域是单连通区域的条件，在这里的（iv）

中省略了它的叙述。

对于R_3中$K(\leqslant 3)$次微分形式在R_3的K维区域Δ上的积分，记作

$$\int_{\Delta} \overset{K}{\omega}. \tag{15·84}$$

直观地说，R_3中的零维区域是指三维空间中的点，一维区域是曲线，二维区域是曲面，三维区域则是空间中的立体。(15·84)式是按Δ的维数确定积分的重数，例如$\int_{\Delta} \overset{2}{\omega}$，即

$\overset{2}{\omega} = P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2$，$\Delta$是二维的，即曲面：$x_1 = x_1 (u,v)$，$x_2 = x_2 (u,v)$，$x_3 = x_3 (u,v)$，$(u,v) \in D$。相应的外积

$$dx_2 \wedge dx_3 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial u} du + \frac{\partial x_2}{\partial v} dv \right)$$

$$\wedge \left(\frac{\partial x_3}{\partial u} du + \frac{\partial x_3}{\partial x} dv \right)$$

$$= J\left(\frac{x_2, x_3}{u v} \right) du \wedge dv.$$

同理$dx_3 \wedge dx_1 = J\left(\frac{x_3, x_1}{u, v} \right) du \wedge dv$，$dx_1 \wedge dx_2 = J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v} \right)$
$du \wedge dv$，因此，

$$\int_{\Delta} \overset{2}{\omega} = \iint_{\Delta} (P dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_3 \wedge dx_1 + R dx_1 \wedge dx_2)$$

$$= \iint_D \left[P \cdot J\left(\frac{x_2, x_3}{u, v}\right) + Q \cdot J\left(\frac{x_3 \cdot x_1}{uv}\right)\right.$$

$$\left. + R \cdot J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v}\right)\right] du \wedge dv. \qquad (15 \cdot 85)$$

这里的$du \wedge dv$就是D的有向面积元素$dA_{u,v} = |du \wedge dV|$.

同样，$\mathbf{R}_2$中二维区域D上的二次微分形式

$$\overset{2}{\omega} = F(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

的积分是

$$\int_D \overset{2}{\omega} = \iint_D F(x_1, x_2) dx_1 \wedge dx_2$$

$$= \iint_{D'} F(x_1(u, v), x_2(u, u)) J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v}\right) du \wedge dV. \quad (15 \cdot 86)$$

上面等式最后的等号实际上是二重积分的变量替换公式（定理8·15），定理8·15的公式与（15·86）式的差别在于前者积分中面积元素恒取正，因而雅可比要取绝对值，现在有向曲面的面积元素有正有负，雅可比也不必再取绝对值了。

有了以上的准备，现在把牛顿—莱布尼兹公式，格林定理、斯托克斯定理及发散量定理概括为统一的形式。

牛顿—莱布尼兹公式是在一维空间$\mathbf{R}_1$中的一维区域$[a, b]$上讨论的，$[a, b]$的边界是它的端点a与b。由于

$$\overset{\circ}{\omega} = F(x), \qquad d\overset{\circ}{\omega} = \frac{dF(x)}{dx} dx$$

因此牛顿—莱布尼兹公式

$$\int_{[a;b]} \frac{dF(x)}{dx} dx = F(x)\Big]_a^b = P(b) - F(a)$$

可写成

$$\int_{[a;\,b]} d\overset{0}{\omega} = \int_{a;\,b} \overset{0}{\omega} \tag{15•87}$$

格林定理（定理15•20）的（15•41）式

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{dx_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dA_{x_1 x_2} = \int_{\partial D} (P dx_1 + Q dx_2),$$

可写成R_2中的。

$$\int_D d\overset{1}{\omega} = \int_{\partial D} \overset{1}{\omega}, \tag{15•88}$$

其中$\overset{1}{\omega} = p dx_1 + Q dx_2$，　$d\overset{1}{\omega} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{e x_1}\right) dx_1 \wedge dx_2$.

斯托克斯定理（定理15•22）的（15•67）式

$$\iint_S (\mathrm{curl}\, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r},$$

可写成R_3中的

$$\int_S d\overset{1}{\omega} = \int_{\partial S} \overset{1}{\omega}, \tag{15•89}$$

这里$\overset{1}{\omega} = v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$.

发散量定理（定理15•23）的（15•80）式

$$\iiint_E \mathrm{div}\, \mathbf{v} dv = \iint_{\partial E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS,$$

可写成R_3中的

$$\int_E d\overset{2}{\omega} = \int_{\partial E} \overset{2}{\omega}, \tag{15·90}$$

其中 $\overset{2}{\omega} = v_1 dx_2 \wedge dx_3 + v_2 dx_3 \wedge dx_1 + v_3 dx_1 \wedge dx_2$.

综合（15·87）到（15·90）四个等式，可把微积分基本定理及场论中三个定理统一叙述为：$R_N(N\leqslant 3)$中的K次微分形式$\overset{K}{\omega}$的外微分$d\overset{K}{\omega}$，在$K+1$维区域Δ上的积分$\int_{\Delta} d\overset{K}{\omega}$，等于$\overset{K}{\omega}$在$\partial\Delta$上的积分$\int_{\partial\Delta} \overset{K}{\omega}$。这一结论推广到$R_N$中就是一般的斯托克斯定理。

定理15·24（斯托克斯定理） 设$\overset{K}{\omega}$为R_N中$(K+1)$维正规区域D上的K次微分形式$((K+1)\leqslant N)$，∂D是D的边界（K维区域），那么

$$\int_D d\overset{K}{\omega} = \int_{\partial D} \overset{K}{\omega} \tag{15·91}$$

定理的证明涉及到R_N中的D及∂D的参数表示，原则上可将§15·5—§15·9的论述推广到R_N来得到。下面运用R_N中的微分形式及外微分运算扼要地叙述（15·91）的证明步骤。完备的叙述读者可参阅〔美〕M·斯皮瓦克著《流形上的微积分》中译本。

设$x=(x_1, x_2, \cdots, x_N)\in R_N$，称下述点集$S$：

$$\{x: f_j(x)=0, \quad j=1,2,\cdots m, \quad m\leqslant N\}$$

为$N-m$维曲面。这里f_j是R_N上的可微函数且$N-1$维曲面

$S_i=\{x: f_i(x)=0\}$ 在 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 点的切面的法矢 ∇f_i 彼此线性无关，也即矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}, & \cdots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

的秩等于m。按隐函数存在定理对于$K=N-m$维曲面S的局部，可用K个彼此独立的参数$(u_1, u_2, \cdots u_K)$表示出来，$(u_1, u_2, \cdots u_K)$叫作S的“局部坐标系”，即

$$x_i=x_i(u_1, \cdots u_K), \quad i=1,2,\cdots,n.$$

把外积概念推广到R_N，K—维曲面的有向面积元素为

$$\{dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}; \quad i_1<i_2<\cdots<i_K\},$$

是一K次基本微分形式。在R_N中适于求K—维曲面积分的K次微分形式是

$$\overset{K}{\omega}=\sum_{i_1<\cdots<i_K} a_{i_1, i_2, \cdots, i_K}(x)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_K}$$

假若把上述K次外微分形式局限于S已用参数$(u_1, \cdots, u_K)$局部坐标化的“小片”U上，可以把参数表示

$$x_i=x_i(u_1, u_2, \cdots, u_K), \quad i=1,2,\cdots N,$$

代入$\overset{K}{\omega}$，即得

$$\overset{K}{\omega}=\left\{\sum_{i_1<\cdots<i_K} a_{i_1\cdots i_K}\cdot J\left(\frac{x_{i_1},\cdots x_{i_K}}{u_1,\cdots u_K}\right)\right\}du_1$$

$$\wedge\cdots\wedge du_K.$$

这样，可用K重积分计算$\overset{K}{\omega}$在U上的积分，即

$$\int_U \overset{K}{\omega}=\int_{U_0}\cdots\int\left\{\sum_{i_1<\cdots i_K} a_{i_1\cdots i_K}J\left(\frac{x_{i_1}\cdots x_{i_K}}{u_1\cdots u_K}\right)\right\}du_1$$

$$\wedge\cdots\wedge du_K,$$

这里U_0是U在$(u_1,\cdots u_K)$空间中的原像。

设R_{K+1}中的K次外微分形式为：

$$\overset{K}{\omega}=g_1(u)du_2\wedge du_3\wedge\cdots\wedge du_{K+1}$$

$$+g_2(u)du_1\wedge du_3\wedge\cdots\wedge du_{K+1}+\cdots$$

$$+g_i(u)du_1\wedge\cdots\wedge du_{i-1}\wedge du_{i+1}\wedge\cdots\wedge du_{K+1}$$

$$+\cdots+g_{K+1}(u)du_1\wedge\cdots\wedge du_K$$

$u\in D_0=\{(u_1,\ \cdots u_{K+1}):a_i\leqslant u_i\leqslant b_i,\ i=1,2,\ \cdots K+1.\}$，$D_0$是$(K+1)$维“长方体”。

逐一计算$\overset{K}{\omega}$的每一项$\overset{K}{\omega}_i=g_i(u)du_1\wedge\cdots\wedge du_{i-1}\wedge du_{i+1}\wedge\cdots\wedge du_{K+1}$在$\partial D_0$上的积分：

$$\int_{\partial D_0}\overset{K}{\omega}_i=\int_{\partial D_0}g_i(u)du_1\wedge\cdots\wedge du_{i-1}\wedge du_{i+1}$$

$$\wedge\cdots\wedge du_{K+1}.$$

自然地划分∂D_0为如下$(K+1)$对K—维“长方面”，即

$$A_j = \{(u, \cdots, u_{K+1}): u_j = a_j, a_l \leqslant u_l \leqslant b_l, l \neq j\}$$

$$B_j = \{u_1, \cdots u_{K+1}): u_j = b_j, a_l \leqslant u_l \leqslant b_l, l \neq j\}$$

当$j \neq i$时，$\overset{K}{\omega}_i$在A_j, B_j上因u_j取常数值，所以du_j为零，因此$\overset{K}{\omega}_i$也为零。于是

$$\int_{\partial D_0} \overset{K}{\omega}_i = (-1)^{i-1} \int_{B_i} g_i(u_1, \cdots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}$$

$$\cdots u_{K+1}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{K+1}$$

$$+(-1)^i \int_{A_i} g_i(u_1 \cdots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \cdots$$

$$u_{K+1}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_{K+1}$$

$$= (-1)^{i-1} \int_{D_0} \frac{\partial g_i}{\partial u_i} du_1 \wedge \cdots \wedge du_i \wedge \cdots \wedge du_{K+1}$$

(15·92)

式中符号$(-1)^{i-1}$，$(-1)^i$是∂D_0在B_i, A_i上所取的方向，而后一等号是微积分基本定理的直接结果：

$$\int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial g_i}{\partial u_i} du_i = g_i(\cdots, b_i, \cdots) - g_i(\cdots, a_i, \cdots).$$

按外微分运算的定义：

$$d\overset{K}{\omega} = \left\{\sum_{i=1}^{K+1} (-1)^{i-1} \frac{\partial g_i}{\partial u_i}\right\} du_1 \wedge du_2 \wedge \cdots \wedge du_{K+1}.$$

上述（15·92）式可以写成

$$\int_{\partial D_0} \overset{K}{\omega} = \int_{D_0} d\overset{K}{\omega},$$

由此可见对于“长方体”这种特殊区域D_0斯托克斯定理就是微积分基本定理的直接推论。

对于$\mathbb{R}_N$中一般的$K+1$维区域（正规的），先用划分把定理证明归于已具有局部参数坐标化的子区域，利用发散量定理的证明中同样的单位分解，把定理证明归成$\mathbb{R}_{K+1}$中的“长方体”D_0去验证，利用局部坐标系得出一般的斯托克斯定理——微积分基本定理的高维一般形式。

附　录

1　绝 对 值

绝对值的概念对于分析的发展起着重要作用。

定义　若a是实数，定义a的绝对值$|a|$为：

$$|a|=\begin{cases}a & \text{当}a\geqslant 0,\\ -a & \text{当}a<0.\end{cases}$$

绝对值的性质如下定理所述：

定理A·1

（i）　$|a|\geqslant 0$，$|-a|=|a|$　及　$|a|^2=a^2$，

（ii）　$|a|=|b|\Longleftrightarrow a=\pm b$。

（iii）　$|a\cdot b|=|a|\ |b|$，当$b\neq 0$，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$。

（iV）　若$b>0$，　那么

$$|a|<b\Longleftrightarrow -b<a<b.$$

证明　(i)与(iii)是定义的直接结果。若$|a|=|b|$，那么$(|a|)^2=(|b|)^2$　得$a^2=b^2$，即有$a=\pm b$，(ii)成立。为了证(iv)，注意不等式$|x|<b$的解集是$S_1=\{x:|x|<b,\ x\geqslant 0\}$与$S_2=\{x:|x|<b,\ x\leqslant 0\}$的并。由$|x|$定义，$x\in S_1\Longleftrightarrow x\geqslant 0$且　$x<b\Longleftrightarrow x\in[0,\ b)$；　$x\in S_2\Longleftrightarrow x\leqslant 0$，

$-x<b\Longleftrightarrow x\in(-b,0]$。因此$S_1\cup S_2=(-b,\ b)$故(iv) 成立。

例1 求不等式 $|3x-4|\leqslant 7$ 的解集.

解 应用定理$A\cdot 1$的(ii)，(iv)，有

$$|3x-4|\leqslant 7\Longleftrightarrow -7\leqslant 3x-4\leqslant 7\quad\Longleftrightarrow -3\leqslant 3x\leqslant 11$$

$$\Longleftrightarrow -1\leqslant x\leqslant \frac{11}{3}.$$

所求解集为区间 $\left[-1,\ \frac{11}{3}\right]$.

例2 $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$.

解 如例1同样的步骤，有

$$\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3\Longleftrightarrow -3<\frac{2x-5}{x-6}<3\quad(x\neq 6).$$

其解集为$S_1\cup S_2$, $S_1=\left\{x: -3<\frac{2x-5}{x-6}<3\text{且}x-6>0\right\}$,

$S_2=\left\{x: -3<\frac{2x-5}{x-6}<3\quad\text{且}\quad x-6<0\right\}$. 分别求

S_1，S_2：

$$x\in S_1\Longleftrightarrow -3(x-6)<2x-5<3(x-6)\text{且}x-6>0$$

$$\Longleftrightarrow -3(x-6)<2x-5\text{且}2x-5<3(x-6)\text{且}x>6$$

$$\Longleftrightarrow 23<5x,\ \text{且}13<x,\ \text{且}x>6\Longleftrightarrow x>13.$$

即 $S_1=(13,\ \infty)$.

$$x\in S_2\Longleftrightarrow -3(x-6)>2x-5>3(x-6),\ \text{且}x-6<0$$

$$\Longleftrightarrow 23>5x\quad\text{且}13>x\quad\text{且}x<6\Longleftrightarrow x<\frac{23}{5}.$$

即 $S_2=\left(-\infty,\ \frac{23}{5}\right)$.解集$S_1\cup S_2$（如图）$A\cdot1$。

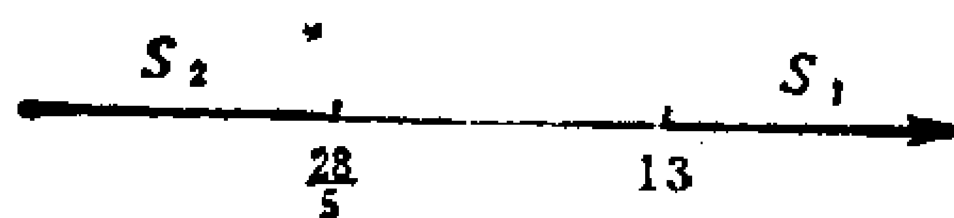


图 A·1

现在证明一个重要的不等式。

定理A·2 若a，b是数，那么

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|$$

证明 因为$|a|=a$或$-a$，有$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$。同样，$-|b|<|b|<|b|$。把这两不等式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

由定理$A\cdot1$之(iv)，得

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

推论 若a，b是数，那么

$$|a-b|\leqslant|a|+|b|.$$

证明 将$a-b$记成$a+(-b)$应用定理，得

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant|a|+|-b|=|a|+|b|.$$

习 题

1—6 求解集。

1. $|2x+1|=3$。
2. $|4x-5|=3$。
3. $|x-2|=|2x+4|$。
4. $|2x-1|=|3x+5|$。
5. $\left|\frac{2x-3}{3x-2}\right|=2$。
6. $\left|\frac{x+2}{3x-1}\right|=3$。

7—12 求不等式解集

7. $|x-2|<1$。 8. $|2x+1|<\frac{1}{3}$。

9. $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right|<2$。 10. $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$。

11. $|x+3|\leqslant|2x-6|$。 12. $|x-1|<|3x+5|$。

13. 设a, b是数

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|。$$

14. 设a, b为正数$a>b$; c, b为负数, $c>d$。证明

$$\frac{a}{c}<\frac{b}{d}。$$

2 实数的p进制小数表示

这里介绍实数的p进制表示，p为大于1的自然数。日常所用的十进制表示是p等于10的特例。

定理A·3 若x是一非负实数，那么存在唯一的正整数n，使$n-1\leqslant x<n$。

证明 由定理2·21的(a)，存在正整数$k>x$。这样的k的集S非空。由自然数集的良序性（定理1·30），S中有最小数n。若$n>1$，那么正数$n-1\in S$，有$n-1\leqslant x<n$。若$n=1$，则$0\leqslant x<1$。

定义 设p是大于1的自然数，称

$$\frac{d_1}{p}, \frac{d_2}{p^2}, \cdots, \frac{d_n}{p^n}, \cdots$$

为p进制小数展开，其中$0\leqslant d_i\leqslant p-1$，$d_i$取非负整数值。

注 p当=10，d_i取0，1，…9中的数上述展开就是熟悉的十进制小数；当p=2，d_i取0或1是二进制小数

定义 若在p进制小数展开中，仅有有限多个d_i不等于零，称展开为p进制有限小数，否则称为p进制无限小数。若从某一i_0起$d_i=p-1(i\geqslant i_0)$，称无限小数是广义的。十进制小数通常用，$0.d_1d_2d_3\cdots$，表示。0.327999…是广义的。

定理A·4 设p进制小数展开$\frac{d_1}{p}$，$\frac{d_2}{p^2}$，…，$\frac{d_n}{p^n}$，…定义s_n

$=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{p_i}$，$n=1$，2，…，那么

（i） 当$n\to\infty$，$S_n\to a$，这里$0\leqslant a\leqslant 1$。

（ii） $a=1\Longleftrightarrow d_i=p-1$，$i=1$，2，…。

（iii） 若展开是广义的，那么存在自然数i_0及q，使，

$a=\frac{q}{pi_0}$， $q\leqslant p^{i}$。

证明 （i）因为$d_i>0,p>1$，有$S_{n+1}\geqslant S_n(n=1,2,\cdots)$，又因对每一$i$，$d_i\leqslant p-1$，有

$$S_n\leqslant\sum_{i=i}^{n}\frac{p-1}{p_i}=\frac{1}{p}(p-1)\left[1+\frac{1}{p}+\left(\frac{1}{p}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{p}\right)^{n+1}\right].$$

令$r=\frac{1}{p}$，求得：

$$S_n\leqslant r\left(\frac{1}{r}-1\right)\frac{1-r^n}{1-r}=1-r^n<1,$$

因此序列$\{S_n\}$满足连续性公理c，所以$S_n\to a(n\to\infty)$，且

$0\leqslant a\leqslant 1$。

(ii) 当对每一i，$d_i=p-1$。那么$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{p-1}{p^i}=1-r^n$，

当$n\to\infty$，$S_n\to 1$。

(iii) 设对$i\geqslant i_0$ $b_i=p-1$，那么当$k>i_0$时，

$$S_k=\sum_{i=1}^{i_0-1}\frac{d_i}{p^i}+\sum_{i=i_0}^{k}\frac{p-1}{p^i},$$

当$i_0=1$时，$a=1$。当$i_0>1$时，有

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\sum_{i=1}^{i_0-1}\frac{d_i}{p^i}+\frac{1}{p^{i_0-1}}.$$

右端通分可知$q=\sum\limits_{i=1}^{i_0-2}d_ip^{i_0-1-i}+(d_{i_0}-1+1)\leqslant p^{i_0}$.

下一定理说明对任意自然数$p>1$，每一实数有唯一的常义的p进制展开。

定理A·5 设p为自然数，$p>1$，a为满足$0\leqslant a<1$的实数，那么存在唯一的p进制展开，当$n\to\infty$时，

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{p^i}\to a.$$

证明 由定理$A\cdot 3$存在非负整数，q_1，使

$$q_1\leqslant pa<q_1+1,$$

同理对每一i，存在非负整数q_i。使

$$q_i \leqslant p^i a < q_i + 1.$$

定义d_i：

$$d_1 = q_1,\ d_i = q_i - pq_{i-1} \qquad (i > 1).$$

应当证明对于所有i，都是$0 \leqslant d_i \leqslant p-1$。显然$d_1 = q_1 \leqslant pa < p$，由$q_1$是非负整数，$0 \leqslant d_1 \leqslant p-1$。对于$i>1$，由$q_i$定义，$q_i \leqslant p^i a < q_i + 1$，$q_{i-1} \leqslant p^{i-1} a < q_{i-1} + 1$，因此

$$p^{i-1}a - 1 < q_{i-1} \text{或} p^i a - p < pq_{i-1}.$$

所以

$$d_i = q_i - pq_{i-1} < p^i a - (p^i a - p) = p,$$

$$d_i = q_i pq_{i-1} > (p^i a - 1) - p(p^{i-1}a) = -1,$$

即 d_i是满足$-1 < d_i < p$的整数，于是断定$0 \leqslant d_i \leqslant p-1$。

运用归纳法，由$q_i = d_i + pq_{i-1}$，得

$$q_i = d_i + pd_{i-1} + p^2 d_{i-2} + \cdots + p^{i-1} d_1.$$

因此

$$q_i = \sum_{k=1}^{i} p^{i-k} d_k \leqslant p^i a < q_i + 1,$$

但 $\sum_{k=1}^{i} p^{i-k} d_k = p^i \sum_{k=1}^{i} p^{-k} d_k$，令$S_i = \sum_{k=1}^{i} p^{-k} d_k$，有 $S_i = p^{-i} q_i$ 且 $S_i \leqslant a < S_i + p^{-i}$。因而当$i \to \infty$，有 $S_i \to a$。

以上证明了a的p进制小数展开的存在性，下面证明这种展开是唯一的，设a的另一p进制小数的展开（非广义的）为：$\frac{d_1'}{p}$，$\frac{d_2'}{p^2}$，…，$\frac{d_n'}{p^n}$…， 即 $a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_i'}{p^i}$。可以写出

$$p^n a = \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} d_i' + \sum_{i=n+1}^{\infty} p^{n-i} d_i'$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} d_i' + \sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} d_{n+k}'$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} d'_{n+k}$ 是某一数的展开，由所设a的展开是非广义的，断定 $\sum_{k=1}^{\infty} p^{-k} d'_{n+k} < 1$。因此

$$\sum_{i=1}^{n} p^{n-i} d_i' \leqslant p^n a < \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} d_i' + 1.$$

定义 $q_n = \sum_{i=1}^{n} p^{n-i} d_i'$，便得 $q_n \leqslant p^n a < q_n + 1$，因而这些$q_n$与在展开$\frac{d_1}{p}$，$\frac{d_2}{p^2}$，…，$\frac{d_n}{p^n}$…所用的$q_n$完全相同。因此对每一$i$，$d_i = d_i'$，即$a$的$p$进制小数表示是唯一的。定理$A \cdot 5$获证。

下一结果，在研究实数系的性质时常常用到。

定理A·6 任意两实数之间存在一有理数。

证明 设$a<b$，且不失一般性还设$a \geqslant 0$，$b>0$，否则于a，b加上一足够大的正整数，使之成为非负数。令q表示大于$\frac{1}{b-a}$的最小正整数，p是大于qa的最小正整数。那么

$$p-1 \leqslant qa,\ 且 qa < p \leqslant qa+1 \Longleftrightarrow a < \frac{p}{q} \leqslant a + \frac{1}{q}.$$

而

$$q(b-a)>1 \Longleftrightarrow a+\frac{1}{q}<b.$$

于是

$$a<\frac{p}{q}<b.$$

定理A·6推论 任意两实数之间存在一无理数。

证明 设给定不相等实数a与b。由定理$A\cdot 6$.存在一非零有理数r,界于$\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{b}{\sqrt{2}}$之间，那么$r\sqrt{2}$界于a, b之间，而$\sqrt{2}$是无理数(定理$A\cdot 7$),r是非零有理数，因此$r\sqrt{2}$是无理数。

下一定理证明$\sqrt{2}$是无理数。

定理A·7 不存在有理数其平方等于2.

证明 设存在一有理数r使$r^2=2$.由r是有理数，所以存在整数p, q, 使$r=\frac{p}{q}$,且p,q无公因子（这一事实能由域公理系导出）。因为$r^2=2$,有$p^2=2q^2$,可见p^2是偶数. 因而p是偶数，不然，若p为奇数，p^2应是奇数($p=2l+1$, $p^2=4l^2+4l+1$)。于是$p=2k$,$q^2=2k^2$, 如上同理，可得q是偶数. 这样p,q有公因子2，与p,q无公因子的假设相矛盾。

习　题

1. 设$p>1$,称p进制小数$\frac{d_1}{p}$, $\frac{d_2}{p^2}$, $\cdots\frac{d_n}{p^n}\cdots$是循环的，当且仅当存在一正整数$n$,使$d_{i+n}=d_i$, $i=1, 2, \cdots$.

证明每一循环小数表示一有理数。

2. 证明$\sqrt{3}$是一个无理数。

3. 考察〔0，1〕的数的三进制小数展开，将$x\in$〔0，1〕表示为$0.d_1d_2\cdots d_i\cdots$，$d_i=0$，1，2中的数．证明这种表示的存在唯一性（在表示是非广义的条件之下的唯一性）．

3 E_N内的矢

（1）欧几里德空间E_N

几何学在十七世纪初，由于笛卡尔的创见，再次获得重大进展。笛卡尔引进坐标系，把空间性质数量化，运用代数方法研究几何学．反过来使得代数、微积分的概念与法则，获得了几何的解释．直线上的点与实数系的数建立起1—1对应，平面上、三维空间中的点分别与R_2中的(x_1, x_2)，R_3中的(x_1, x_2, x_3)建立1—1对应．全体N个有序实数$(x_1, x_2, \cdots, x_N)$组成R_N。更一般化地，凡与R_N这个距离空间同构的E_N称都为N维欧几里德空间。

设$A\in E_N$，在E_N到R_N中的同构映象T之下A的象为x，$x=(x_1^A, x_2^A, \cdots, x_N^A)$，$(x)$称为$E_N$的一个坐标系，$N$叫作空间的维数。

空间中最基本、最简单的事实是“位置”，用点表示位置．其次是直线l，直线是一维欧几里得空间．若A, B是两个点，以$\overrightarrow{AB}$表示由A到B的有向线段。

定理A·8 设(x)是欧几里得空间E_N的坐标系，l是E_N的

直线，(t)是l上的坐标系，若l上坐标系之原点及单位点在E_N中的坐标分别是x^0，$x^0+\lambda$。那么对于$p\in l$，有$x_i^p=x_i^0+\lambda_i t^p$，$i=1,2,\cdots N$，其中$\lambda_i$是$\lambda$的第$i$个坐标，$|\lambda|=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2=1$，$x_i^0$是$x^0$的第$i$个坐标，$t^p$是$p$点在$(t)$之下的坐标。

证明 首先因为(x)，(t)分别是E_N及l上的坐标系，所以

$$1=|1-0|=|x^0+\lambda-x^0|=|\lambda|.$$

若$p\in l$，p在(t)坐标系下的坐标是t^p。以$x^p=(x_1^p,x_2^p,\cdots,x_N^p)$表示在$(x)$之下的$p$点的坐标，必定$\exists N$个数$\xi_1^p,\cdots\xi_N^p$，使

$$x_i^p=x_i^0+\lambda_i t^p+\xi_i^p,\quad i=1,2,\cdots N. \qquad (A\cdot 1)$$

由定理假设应有

$$|x^p-x^0|^2=(t^p)^2, \text{ 及 } |x^p-x^0-\lambda|^2=(t^p-1)^2.$$

而
$$|x^p-x^0|^2=\sum_{i=1}^{N}(\lambda_i t^p+\xi_i^p)^2$$

$$=(t^p)^2|\lambda|^2+2\sum_{A=1}^{N}\lambda_i\xi_i^p t^p+|\xi^p|^2=(t^p)^2$$

$$|x^p-x^0-\lambda|^2=|\lambda|^2(t^p-1)^2+2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\xi_i^p(t^p-1)+|\xi^p|^2$$
$$=(t^p-1)^2.$$

因为$|\lambda|=1$，也即

$$|\xi^p|^2+2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\xi_i^p t^p=0; \qquad |\xi^p|^2+2\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\xi_i^p(t^p-1)=0.$$

由此得出 $\xi_i^p=0$，$(i=1,2,\cdots N)$，即

$$x_i^p=x_i^0+\lambda_i t^p,\qquad i=1,2,\cdots,N. \tag{A·2}$$

上面定理说明E_N和其一条直线l，各自的坐标系(x)与(t)间的关系由(A·2)的映象相联系。下面定理A·9是A·8的逆定理。

定理A·9 设(x)是欧几里得空间E_N上的坐标系，l是映象

$$x_i^p=x_i^0+\lambda_i t^p,\quad |\lambda|=1,\quad i=1,2,\cdots,\ N,\quad t\in R_1 \tag{A·3}$$

之下的值域。那么l是一直线，且方程(A·3)在l上建立以x_0为原点，以$x_0+\lambda$为单位点的一坐标系。

证明 设p，q是(A·3)值域里的点。那么

$$x_i^p-x_i^q=\lambda_i(t^p-t^q),\qquad i=1,2,\cdots,N,$$

且

$$|x^p-x^q|=|\lambda|\ |t^p-t^q|=|t^p-t^q|.$$

由此即得l是一直线，且(A·3)于l上给出一原点在x^0 $(t^0=0)$，单位点在$x^0+\lambda$ $(t^1=1)$的坐标系。

定义 定理A·8、A·9中的λ，称为直线l的方向余弦。直线l_1与l_2相交于x^0点，如果对于l_1上的点x^1和l_2上的点x^2，有勾股定理：

$$|x^1-x^2|^2=|x^1-x^0|^2+|x^2-x^0|^2$$

成立，则称l_1与l_2相正交（或垂直）。当两直线l_1，l_2的方向余弦满足$\lambda_1=(\pm1)\lambda_2$时，称$l_1$与$l_2$互相平行。

定理A·10 设(x)是E_N的坐标系，且令l_1，l_2的方程分别为

$$l_1: \quad x_i^p = x_i^0 + \lambda_i^1 t^p, \qquad i = 1, 2, \cdots, N,$$

$$l_2: \quad x_i^p = x_i^0 + \lambda_i^2 t^p,$$

那么 l_1与l_2互相垂直$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^1 \lambda_i^2 = 0$。 (A·4)

证明 设$x^1 \in l_1$， $x^2 \in l_2$，那么存在t^1，t^2，使得

$x_i^1 = x_i^0 + \lambda_i^1 t^1$， $x_i^2 = x_i^0 + \lambda_i^2 t^2$， $i = 1, 2, \cdots, N$。

因而

$$|x^1 - x^2|^2 = \sum_{i=1}^{N} (\lambda_i^1 t^1 - \lambda_i^2 t^2)^2 = (t^1)^2 + (t^2)^2$$

$$-2t^1 \cdot t^2 \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^1 \lambda_i^2$$

及

$$|x^1 - x^0|^2 + |x^2 - x^0|^2 = (t^1)^2 + (t^2)^2$$

因此

$$|x^1 - x^2|^2 = |x^1 - x^0|^2 + |x^2 - x^0|^2 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^1 \lambda_i^2 = 0,$$

即l_1与l_2垂直的充要条件是 $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^1 \lambda_i^2 = 0$。

定义 设A与B是E_N的点，定义p点是从A到B方向上的h点（h是一实数，$|AB|$表A, B间距离），当且仅当

$$|AP| = |h|\ |AB| \qquad |BP| = |1-h|\ |AB| \qquad (A\cdot5)$$

定理A·11 (*a*)设(x)是E_N的坐标系。点p是A到B方向上的h点的充要条件是

$$x_i^p - x_i^A = h(x_i^B - x_i^A)\text{或}x_i^p = (1-h)x_i^A + hx_i^B,$$
$$i = 1, \cdots N. \qquad (A\cdot6)$$

(*b*)一从A到B方向上的h点与从B到A方向上的$(1-h)$点相重合。

证明 (*a*)设(x)是E_N的坐标系。p是E_N的点。那么存在$\xi^p = (\xi_1^p, \xi_2^p, \cdots \xi_N^p)$，满足

$$\left.\begin{aligned} &x_i^p - x_i^A = h(x_i^B - x_i^A) + \xi_i^p \qquad i = 1, 2, \cdots N, \\ \text{即} \\ &x_i^p - x_i^B = (h-1)(x_i^B - x_i^A) + \xi_i^p \end{aligned}\right\}(A\cdot7)$$

将$(A\cdot7)$代入$(A\cdot5)$，和定理$A\cdot8$中同样计算，得

$$|\xi^p|^2 + 2\sum_{i=1}^{N} h\xi_i^p(x_i^B - x_i^A) = 0,$$

$$|\xi^p|^2 + 2\sum_{i=1}^{N}(h-1)\xi_i^p(x_i^B - x_i^A) = 0$$

成立。由此得出$\xi_i^p = 0$，于是$(A\cdot6)$成立。

反之，当$(A\cdot6)$成立，$(A\cdot5)$显然成立。

(*b*)是(*a*)的直接结果。

定理A·12 (*a*)设A，B是E_N内不同的点，那么E_N中从A到B方向上的所有h点组成一条直线，这里h是实数。

(*b*)E_N内有唯一的直线通过它的不同的两点。

证明 设(x)是E_N的坐标系，x^A, $x^B x^p$分别是A, B, P点的坐标。若p是从A到B方向上的h点，那么

$$x_i^p = x_i^A + \lambda_i^{AB} t^p, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \text{其中} \lambda_i^{AB} = \frac{x_i^B - x_i^A}{|AB|}, \quad (A \cdot 8)$$

表示过A，B的直线，由定理$A \cdot 10$，取$h = \frac{t^p}{|AB|}$，表明从A到B方向上的h点在$(A \cdot 8)$表示的直线上。另一方面，如果p在$(A \cdot 8)$所给直线上，那么p点满足$(A \cdot 6)$，且$t^p = h|AB|$。

以上论证说明仅有唯一直线$(A \cdot 8)$通过A, B。

定理A·13 设l是E_N中一条直线，p_1是E_N中不在l上的点。那么存在唯一的过p_1与l垂直的直线l_1。若l的方程为

$$x_i = x_i^0 + \lambda_i t, \qquad i = 1, 2, \cdots N, \qquad (A \cdot 9)$$

p_1的坐标为$(\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_N)$，那么$l$与$l_1$的交点$p_2$的$(t)$坐标$t^*$为：

$$t^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overline{x}_i - x_i^0) \qquad (A \cdot 10)$$

证明 设l与l_1交点的(x)坐标为$(x_1^*, \cdots x_N^*)$，它满足$(A \cdot 9)$：$x_i^* = x_i^0 + \lambda_i t^*$，$t^*$为某一数，$x^*$，$\overline{x}$均在$l_1$上，因而$x_i^* - \overline{x}_i$与$l_1$的方向余弦成比例。由$l$与$l_1$正交的条件$(A \cdot 4)$导出$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i^* - \overline{x}_i) = 0$，也即$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ (x_i^0 + \lambda_i t^* - \overline{x}_i) = 0$，由此可得$t^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\overline{x}_i - x_i^0)$。

定义 设$\vec{l}$是E_N内的有向直线，$\overrightarrow{AB}$是一有向线段。A'是过A与$\vec{l}$垂直的直线与$\vec{l}$的交点，B'是过B与$\vec{l}$垂直的直线与$\vec{l}$的交点（图$A\cdot2$），称有向距离$\overrightarrow{A'B'}$为$\overrightarrow{AB}$在$\vec{l}$上的投影，记作

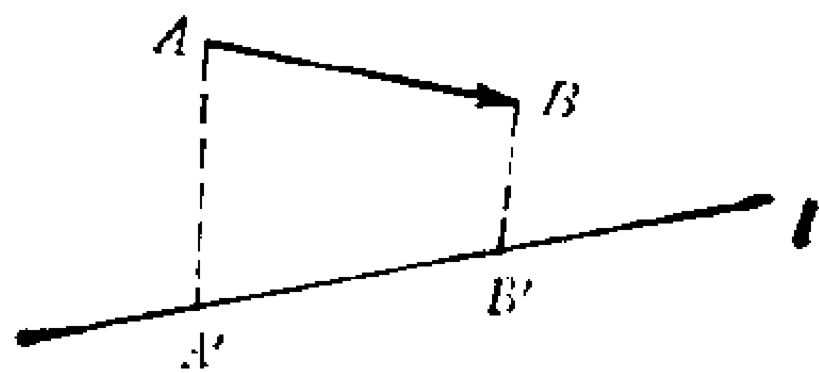


图 A·2

$$p_{roj_{\vec{l}}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}.$$

定理A·14 设(x)是E_N的坐标系，$\vec{l}$为有向直线，其方向余弦$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N)$，$\overrightarrow{AB}$是一有向线段。那么

$$p_{roj_{\vec{l}}}\overrightarrow{AB}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x_i^B-x_i^A).$$

证明 据定理$A\cdot13$及投影的定义，A'，B'的(t)坐标分别是：$t^{A'}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x_i^A-x_i^0)$，$t^{B'}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x_i^B-x_i^0)$。因此

$$p_{roj_{\vec{l}}}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=t^{B'}-t^{A'}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x_i^B-x_i^A)$$

(2) E_N中的矢

如同二维、三维情况，定义E_N内的矢为有向线段的等价类。

定义 有向线段$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$等价，当且仅当对于E_N中的

每条直线$\vec{l}$都有

$$\mathrm{proj}_{\vec{l}}\ \overrightarrow{AB}=\mathrm{proj}_{\vec{l}}\overrightarrow{CD}.$$

下面是关于等价有向线段基本性质的定理，它的证明留给读者。

定理A·15 (*a*)若(x)是E_N的坐标系，那么当且仅当$x_i^B-x_i^A=x_i^D-x_i^C$ $(i=1,2,\cdots,N)$时，$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$等价。

(*b*) 等价的有向线段记成$\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}$，若$\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}$那么$\overrightarrow{CD}\approx\overrightarrow{AB}$。

(*c*) 若$\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{CD}\approx\overrightarrow{EF}$，那么 $\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{EF}$。

(*d*) 设$\overrightarrow{AB}$及p点给定，那么存在唯一的点q，使$\overrightarrow{pq}\approx\overrightarrow{AB}$。

(*e*) 若$\overrightarrow{AB}\approx\overrightarrow{DE}$，$\overrightarrow{BC}\approx\overrightarrow{EF}$，那么 $\overrightarrow{AC}\approx\overrightarrow{DF}$。

定义 E_N中有向线段的等价类称为矢，即E_N中使$\overrightarrow{AB}$彼此等价的点序偶(A,B)的集是一个矢。矢的一个序偶(A,B)称为矢的一个表示，以$\mathbf{v}(AB)$表示含有$\overrightarrow{AB}$的等价类的矢。

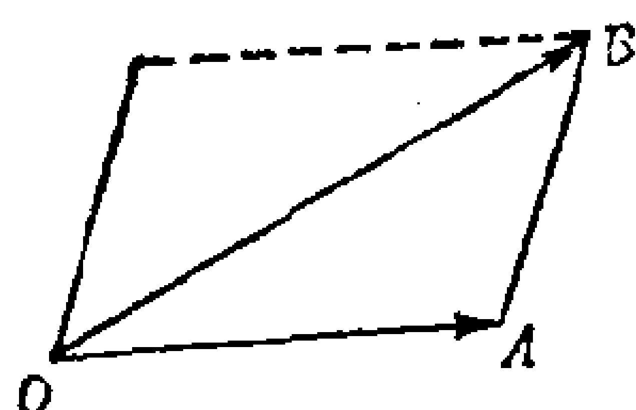
直观地，矢$\mathbf{v}(AB)$是$\overrightarrow{AB}$在空间中"平移"得到所有互相等价的有向线段的全体。

对于E_N中的矢，如同三维矢那样定义矢的加法，数与矢相乘及两矢的数量积运算。

定义 设$\mathbf{v}$，$\mathbf{w}$是矢，它们的表示分别为$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{AB}$定义$\mathbf{v}+\mathbf{w}$是以$\overrightarrow{OB}$为表示的矢$\mathbf{u}$，即 $\mathbf{u}(OB)=\mathbf{v}(OA)+\mathbf{w}(AB)$。

若h是实数，是C从A到B方向的h点，定义$h\mathrm{v}=\mathrm{v}(OC)$。

v的一切表示的共同长度记作$|\mathrm{v}|$，并称$|\mathrm{v}|$为v的长度（图$A\cdot3$）。



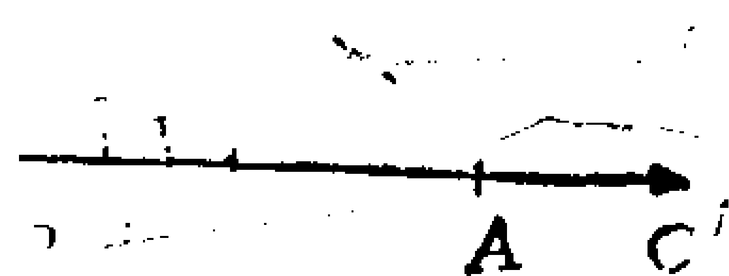


图 A·3

设(x)是E_N的坐标系。从原点$0=(0,0,\cdots,0)$到$I_i=(0,0,\cdots 0,1,0,\cdots 0)$点（$I_i$点除第$i$个坐标为1之外，其他坐标均为零），以$\overrightarrow{OI_i}$为其表示的矢，记为$e_i$。

定理A·16 设(x)是E_N的坐标系，A，B是E_N的点，

那么
$$\mathrm{v}(AB)=\sum_{i=1}^{N}(x_i^B-x_i^A)\,e_i. \qquad (A\cdot11)$$

证明 为了书写的简便，对N＝3 证明定理。由定理A·15之(d)，$\mathrm{v}(A,B)$有一表示$\overrightarrow{op}$，p的坐标为$(x_1^B-x_1^A,x_2^B-x_2^A,x_3^B-x_3^A)$。另设$R_1,R_2,R_3$，$q_1,q_2,q_3$有坐标

$R_1=(x_1^B-x_1^A,o,o)$，　$R_2=(o,x_2^B-x_2^A,o)$，

$R_3=(o,o,x_3^B-x_3^A)$；

$q_1=R_1$，　$q_2=(x_1^B-x_1^A,x_2^B-x_2^A,o)$，　$q_3=p$。

这样，R_1是从o到I_1方向上的$(x_1^B-x_1^A)$点；R_2是从o到I_2方向上的$(x_2^B-x_2^A)$点；R_3是从o到I_3方向上的$(x_3^B-x_3^A)$点。$\mathrm{v}(q_1q_2)=\mathrm{v}(oR_2)$，$\mathrm{v}(q_2q_3)=\mathrm{v}(oR_3)$，$\mathrm{v}(o,R_1)=(x_1^B-x_1^A)\mathrm{e}_1$，$\mathrm{v}(oR_2)=(x_2^B-x_2^A)\mathrm{e}_2$，$\mathrm{v}(oR_3)=(x_3^B-x_3^A)\mathrm{e}_3$。

于是有

$$v(op)=v(oq_1)+v(q_1q_2)+v(q_2q_3),$$

即

$$v(AB)=\sum_{i=1}^{N}(x_i^B-x_i^A)\ e_i\text{。}$$ 定理$A\cdot16$获证。

定理$A\cdot16$中那样的$e_1e_2,\cdots e_N$是互相垂直的单位矢组，称作一组正交基。

定理A·17 设$e_1,e_2,\cdots,e_N$是E_N内一组正交单位矢，$v=a_1e_1+\cdots+a_Ne_N$，$w=b_1e_1+\cdots+b_Ne_N$。那么

$$\left.\begin{aligned} v+w&=\sum_{i=1}^{N}(a_i+b_i)e_i,\\ hv&=\sum_{i=1}^{N}ha_ie_i\ (h\text{为实数}),\\ |v|&=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_N^2}. \end{aligned}\right\}\qquad (A\cdot12)$$

证明 于E_N中建立以$v(o,I_i)=e_i$为基的坐标系(x)，这里o是原点，I_i为第i个单位点。那么由定理$A\cdot16$设 A,B,C坐标分别是$(a_1,\cdots a_N)$，$(a_1+b_1,\cdots,a_N+b_N)$，$(ha_1,\cdots,ha_N)$的点，那么

$v=v(oA)$，$w=v(AB)$，$hv=v(oc)$，$v+w=v(oB)$

根据$(A\cdot11)$便得$(A\cdot12)$成立。

下面关于矢的运算性质定理是运算定义的直接结果。

定理A·18 (a)矢的加法运算满足域公理的A_1……A_5：A_1加法的封闭性；A_2交换律$a+b=b+a$；A_3结合律$(a+b)+c=a+(b+c)$；A_4存在零矢o，满足$a+o=a$；A_5负矢的存在性，即$a+x=o$有解$-a$。

(*b*) 设v，w是两个矢，c,d为实数，那么

$$(c+d)\mathbf{v}=c\mathbf{v}+d\mathbf{v};$$

$$c(\mathbf{v}+\mathbf{w})=c\mathbf{v}+c\mathbf{w};$$

$$c(d\mathbf{v})=(cd)\mathbf{v};$$

$$1\mathbf{v}=\mathbf{v};$$

$$0\mathbf{v}=\mathbf{0};$$

$$-\mathbf{v}=(-1)\mathbf{v}。$$

定义 设u，v是E_N的矢，定义u，v的点乘积（也称数量积）为

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{2}[|\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2-|\mathbf{u}|^2-|\mathbf{v}|^2].$$

点乘积不依赖于坐标系，但能用坐标表示之。

定理A·19 设u，v w是E_N的矢，(x)是E_N的坐标系，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$，…，$\mathbf{e}_N$是正交单位矢组成的基。若$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{N}a_i\mathbf{e}_i$，$\mathbf{u}=\sum_{i=1}^{N}b_i\mathbf{e}_i$，那么

(i) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\sum_{i=1}^{N}a_ib_i;$

(ii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u};$

(iii) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=|\mathbf{u}|^2;$

(iv) $\mathbf{u}(c\mathbf{v}+d\mathbf{w})=c(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+d(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$ （c,d是数）。

定理$A\cdot19$是定理$A\cdot16$，$A\cdot17$及点乘积定义的直接结果，细节留给读者。

（3）矢的外积

现在把面积、体积的这些几何量用有关矢的运算来表示，并将它推广为E_N中矢的外积运算。

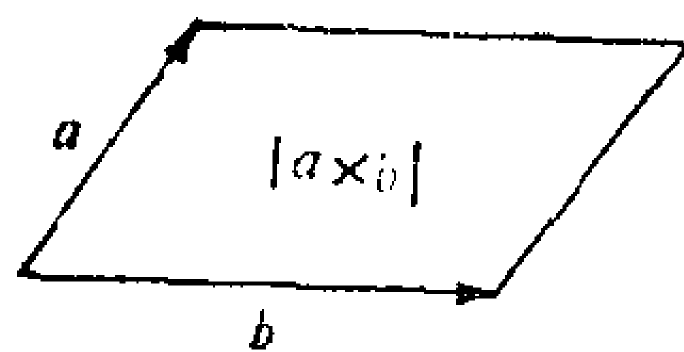


图 A·4

平面上两个矢a，b如图A·4所示，a，b决定一平行四边形，它的面积是矢a×b的长度：$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}||\sin(\widehat{ab})|$。a×b是a与b的叉积，$\sin(\widehat{ab})$中$(\widehat{ab})$表示a与b的夹角。如果把$|a|\cdot|b|\sin(\widehat{ab})$定义为$a,b$的一种表示$a,b$张成的平行四边形"有向面积"的运算，能够把这种运算推广来表示高维空间中的"有向面积"、"有向体积"。

定义 称$|a||b|\sin(\widehat{ab})$为a与b的外积，记为$a\wedge b$。即$a\wedge b=|a|\cdot|b|\sin(\widehat{ab})$。$a\wedge b$表示$a,b$张成平行四边形的"有向面积"，其正负决定于$\sin(\widehat{ab})$。

定理A·20 设a，b，c是矢，外积具有性质

$$\left.\begin{aligned}&\text{(i)（斜对称性）}\ \mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=-\mathbf{b}\wedge\mathbf{a};\\&\text{(ii)（分配律）}\ \mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\\&\qquad+\mathbf{a}\wedge\mathbf{c};\\&\text{(iii)（结合律）}\ (k\mathbf{a})\wedge\mathbf{b}=k(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\\&\qquad=\mathbf{a}\wedge(k\mathbf{b}),k\text{是数。}\end{aligned}\right\}\qquad(A\cdot13)$$

定理A·20容易按定义验证，还可借助$\mathbf{R}_2$中坐标系，将$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$表示为$\begin{vmatrix}a_1, & a_2\\ b_1, & b_2\end{vmatrix}$（行列式中$(a_1,a_2)=\mathbf{a},(b_1,b_2)=\mathbf{b}$）逐

条验证。

我们再分析三维空间中的长度、面积、体积。显然矢可表示“有向线段”，两个矢决定一“平行四边形”，三个矢决定一“平行六面体”。（图$A\cdot 5$）。

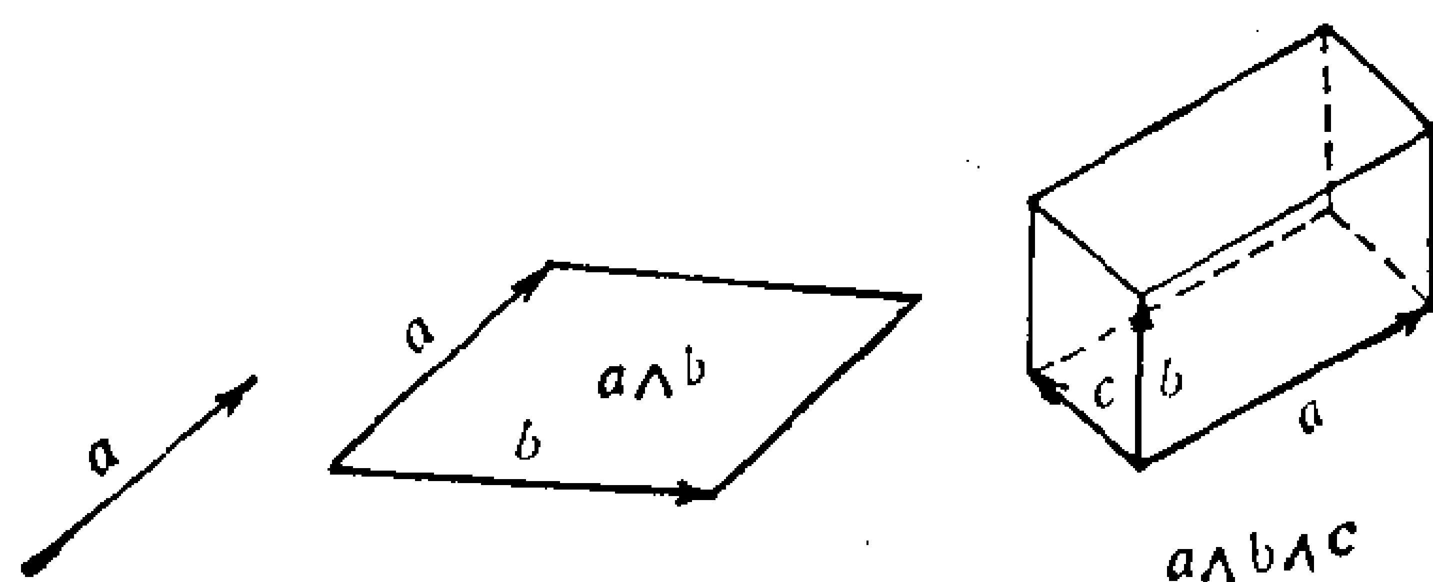


图 $A\cdot 5$

自然地，可以建立这样的体系：

（i） 用矢a表示“有向长度”；

（ii） 用$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$表示由a，b所张成平行四边形的“有向面积”。

（iii） 用$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\wedge\mathbf{c}=\mathbf{a}\wedge(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})$表a，b，c所张成的平行六面体的“有向体积”。

（iv） 外积运算满足（$A\cdot 13$）式所列的性质。

（v） $|\mathbf{a}|$，$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|$，$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}|$就是无向的“长度”、“面积”和“体积”。

能够在一坐标系下来说明这样的体系的存在性。于$\mathbf{R}_3$中取一组正交基$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$，分别表示$x_1$轴，$x_2$轴，$x_3$轴方向上的单位矢，以

$$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2,\quad \mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3,\quad \mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$$

分别表示x_1-x_2平面，x_2-x_3平面，x_3-x_1平面上的“单位有向面积”。以

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$$

表示空间中的“单位有向体积”。这样规定的$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$间的外积运算显然有如下性质：

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_3 = 0;$$

$$\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = -(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1), \quad \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 = -(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2),$$

$$\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = -(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3);$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \\ &= -(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3) = -(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2) \\ &= -(\mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_1). \end{aligned}$$

设 $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \mathbf{e}_i$, $\quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{3} c_i \mathbf{e}_i$, (用$A \cdot 13$)式的性质：外积结合律、斜对称性、分配律计算$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$和$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c}$，即得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \wedge (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \\ &\quad + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \wedge \mathbf{c} \\ &= \{ (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 \\ &\quad + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 \} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

$$
=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3.
$$

由解析几何知道$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}|$就是a，b，c混合积的绝对值，即上式右端三阶行列式的绝对值，它正是a，b，c，张成平行六面体的无向的体积。通过直接计算可知$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|=\left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}}$恰好是a，b张成平行四边形的无向面积。如果把$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$，$\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$看成互相垂直的"有向面积"，那么上面$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$之右端可视为在基$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2$，$\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$，$\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1$之下的一个"矢"。按这种观点能把三维空间中的讨论推广为N维空间中的有向体积。

设E_N中$\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots\mathbf{e}_N$分别为$x_1,x_2,\cdots x_N$轴方向上单位矢的正交基。那么

（1）任何一个矢a表示一"有向长度"，它可用$\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_N\}$的线性组合表示成$\mathbf{a}=a_1\mathbf{e}_1+\cdots+a_N\mathbf{e}_N$。

（2）任给两个矢a，b决定一平行四边形，$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$表示它的"有向面积"，想象它为一新矢；它的正交基为$\{\mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant N\}$（共$\frac{n(n-1)}{2}$个单位矢），$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$可唯一地表示成

$$
\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}=\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)\ \mathbf{e}_i\wedge\mathbf{e}_j.
$$

外积运算具有（A·13）所列的运算性质，而且$|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}|$
$=\left\{\sum_{i<j}(a_ib_j-a_jb_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$就是通常的无向面积。

（3）仿（2）类推，E_N中l个矢$\mathbf{a}_1$，$\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_l$，$l\leqslant N$，决定一"$l$维平行体"，它的"有向$l$-维体积"可以用$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_l$表示。把它想象为以$\{\mathbf{e}_{i_1}\wedge\mathbf{e}_{i_2}\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_l};\ 1\leqslant i_1\leqslant i_2<\cdots\leqslant N\}$这样$\frac{N!}{(n-l)!l!}$个单位矢构成正交基之下的矢。$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_l$唯一地表示成：

$$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_l=\sum_{i_1<i_2\cdots<i_l}D_{i_1;i_2\cdots;i_l}\mathbf{e}_{i_1}\wedge\mathbf{e}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_{i_l},$$

其系数$D_{i_1\ i_2;\cdots i_l}$是一个l阶行列式。且

$$|\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_l|=\{\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_l}D^2_{i_1\ i_2\cdots i_l}\}^{\frac{1}{2}},$$

就是$\mathbf{a}_1,\cdots\mathbf{a}_l$张成的$l$－维无向体积。

特别$l=N$，上述正交基就只有$\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_N$这一个元素，此时

$$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_N=\det(\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_N)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_N.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝实分析基础
作者＝王友方编译
页数＝７２５
ＳＳ号＝１０６６２５１３
出版日期＝１９８５年０１月第１版